

# 跳跃式确定性模型在竞争市场中的微观经济系 统分析

Alain M. Dikandé<sup>1\*</sup> and H. Ntahombagana Matabaro<sup>2†</sup>

<sup>1\*</sup>Laboratory of Research on Advanced Materials and Nonlinear Science,  
Department of Physics, Faculty of Science, University of Buea, PO Box  
63, Buea, Cameroon.

<sup>2</sup>African Institute for Mathematical Sciences (AIMS), Summerhill  
Estates, East Legon Hills, Santoe, Accra, Ghana.

\*Corresponding author(s). E-mail(s): [dikande.alain@ubuea.cm](mailto:dikande.alain@ubuea.cm);

Contributing authors: [hormisdas@aims.edu.gh](mailto:hormisdas@aims.edu.gh);

†This author contributed equally to this work.

## 摘要

Behrens-Feichtinger 模型为生产相同产品并在同一市场中竞争的两家公司的销售额共演化提供了确定性的图像。该模型涉及一种主动投资策略，即这两家公司的临时投资额取决于其在市场中的相对位置。在这项工作中，我们对称为跳跃发展的特定演化模式感兴趣，在这种模式下，每家公司都有可能轮流在一个有限的时间段内主导市场。通过引入两个适当的变量，即两家公司在任何时间点的销售差和总销售额，我们考察了有利于该模型跳跃发展动力学的条件。对由此产生的耦合离散非线性方程固定点稳定性的分析进行了执行，并生成了关于弹性系数的销售差异与总销售量的分岔图。时序分析表明，当模型特征参数取特定值且与两家公司投资策略差异相关的弹性系数相对较高时，由销售差在正负分支之间周期振荡所表征的跳跃发展状态得到了稳定。为了确保在跳跃发展动态过程中商品供应充足，需要保证任何时间点的累计销售额为正值。

**Keywords:** Behrens-Feichtinger 模型，主动投资策略，销售差额和销售总额，分岔，跳跃动力学

# 1 介绍

现代经济的空间时间组织表现出类似于非线性动力系统 [1, 2] 的特征。在这方面, 近年来越来越多的证据表明, 当今金融系统的空间和时间演变的极端复杂性可以通过使用非线性动力系统理论中的数学模型来捕捉 [2–4]。在这些模型中, 那些涉及系统非随机驱动演化的模型, 也称为确定性模型 [5, 6], 因其可以展示出丰富的动态模式而引起了极大的兴趣, 其中包括规则和混沌阶段, 尽管系统本身没有内在的随机性 [3, 4, 7–10]。Behrens-Feichtinger 双伙伴模型 [11–16] 描述了两个微观经济系统 (为了简化我们考虑两个企业) 在一个共同的商品市场中竞争的动力学, 是这种确定性模型的一个原型。该模型假设这两个企业通过采用不对称的投资策略生产相同的产品, 这些策略在模型中由一个“弹性”参数表示, 这个参数决定了它们各自投资规模的接近或远离程度。更明确地说, 它们的临时投资取决于其在市场上的相对位置, 因此当企业  $X$  相对于企业  $Y$  具有优势时会投入更多, 而当企业  $Y$  相对于企业  $X$  处于不利地位时则会增加投资。用  $x_n$  和  $y_n$  分别表示在同一离散时间  $n$  上公司  $X$  和  $Y$  的相对销售额, Behrens-Feichtinger 模型由以下两个耦合的 Logistic 型非线性差分方程 [11, 13–16] 表示:

$$x_{n+1} = (1 - \alpha)x_n + \frac{a}{1 + \exp[-c(x_n - y_n)]}, \quad (1)$$

$$y_{n+1} = (1 - \beta)y_n + \frac{b}{1 + \exp[-c(x_n - y_n)]}. \quad (2)$$

在上述集合中, 实数和正参数  $\alpha$  和  $\beta$  分别是公司  $X$  和  $Y$  在没有投资的情况下在离散时间  $n$  上销售额衰减率。实参数  $a$  和  $b$  分别是公司  $X$  和  $Y$  的投资规模, 而实数且为正的参数  $c$ , 通常称为“弹性”系数 [13], 衡量了两家公司在投资策略上的差异程度。Behrens-Feichtinger 模型动力学的特殊特征已在几项研究 [11, 13–15] 中通过时间序列分析或将其耦合集 (1)-(2) 视为二维离散映射而揭示。这些研究揭示了该耦合系统的问题的解要么是规则周期或多重周期非谐振振动, 要么是混沌轨迹, 这取决于模型参数  $\alpha, \beta, a, b$  和  $c$  的特定值。也就是说, 已经预测到了一个混沌吸引子 (见图. 1 对于  $a = 0.16, b = 0.9, \alpha = 0.46, \beta = 0.7$  和  $c = 105$  具有一个不稳定固定点 ( $x = 0.0118222, y = 0.0436998$ )。时间序列分析的解决方案  $x_n, y_n$  要么是单周期, 要么是多周期非谐振振动, 这取决于这些参数的值。这样的周期性非谐振振动中的一部分显示在图 2 中, 对应于两种公司的销售都是有规律的变化。然而, 两家公司中的其中一家可能会决定相对于另一家增加其收益并因此采用挑衅性的投资策略, 导致两家公司的销售额不再定期同步, 从而进入一个混乱的演化状态。

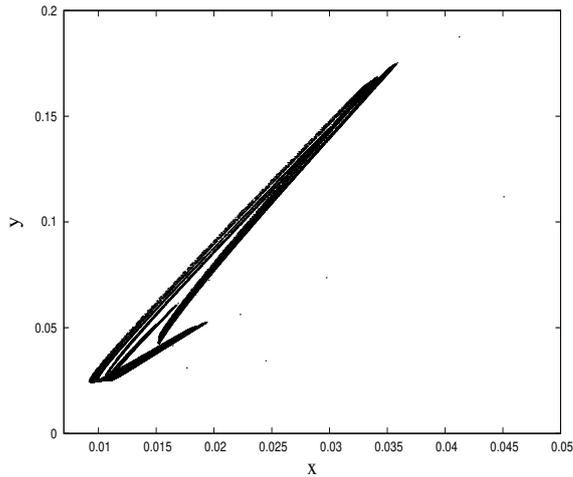


图 1 耦合离散映射 (1)-(2) 相平面中的混沌吸引子, 对于  $a = 0.16, b = 0.9, \alpha = 0.46$  和  $\beta = 0.7$ 。观察到的混沌轨道已与相同参数值下的一个现有不稳定固定点相关联 (参见例如文献 [13])。

除了在文献中广泛讨论过的常规和混沌状态 [11, 13-15], 还可以考虑一种状态, 在这种状态下, 两家公司的投资策略使得它们交替地控制市场一段时间。在这种特定的状态下, 两家公司的销售预计会保持有限但相反的变化, 这样, 在这一特定时间段内, 其中一家公司的销售额最低而另一家的销售额最高。这种演化模式, 两种公司的“蛙跳”式销售变化, 在一个公司之间竞争而不影响彼此共同市场的长期稳定和存在的情境中可能是相关的。

在这项工作中, 我们研究了 Behrens-Feichtinger 模型可能演变为一种“蛙跳”状态的条件。为此, 我们引入两个适当的变量, 并用它们将 Behrens-Feichtinger 模型重新表述为描述  $X$  和  $Y$  公司销售差额和总和演化的两个耦合离散非线性方程系统。在第 2 节中, 我们使用两个新变量重新表述 Behrens-Feichtinger 模型, 并寻找新的耦合非线性离散方程系统的不动点解。由于这些不动点的长期方程无法通过解析方法求解, 我们采用 Brent 算法以弹性系数  $c$  作为控制参数来数值提取两个不动点。还将通过对销售差额和总和的分岔图进行不稳定不动点的全局稳定性分析, 观察在增加  $c$  时不动点如何演变。我们的目标是识别出  $c$  值的范围, 在这个范围内跳跃领先机制更有可能被青睐并稳定下来。在第 3 节中, 将数值求解新的两个耦合离散非线性方程组, 并为模型参数的一些特定组合生成销售差额和总和的离散时间序列。在这些时间序列中, 跳跃制度将通过销售差额从正分支到负分支的周期性振荡表现出来, 两家公司的累计 (或总和) 销售额在任何时间  $n$  都保持为正值。本文以总结和结论性评论结束 (第 4 节)。

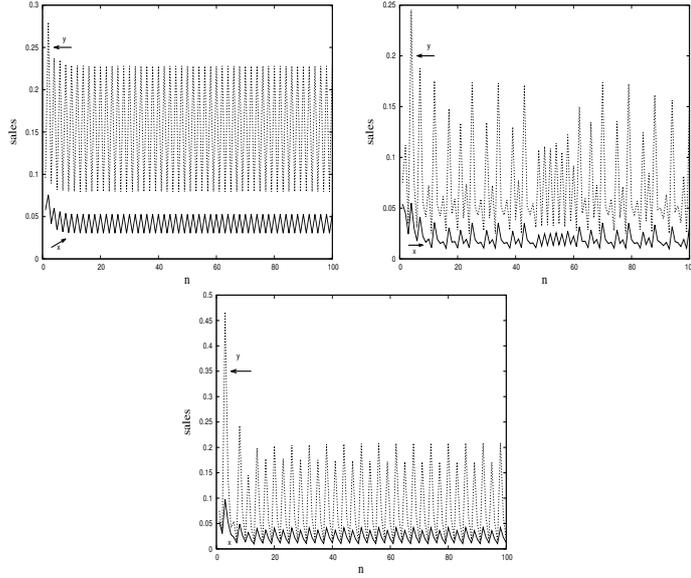


图 2 公司 X 和 Y 的销售量  $x_n$  和  $y_n$  的时间序列, 分别为  $a = 0.16, b = 0.9, \alpha = 0.46$  和  $\beta = 0.7$ 。三个图形对应三个不同的  $c$  值:  $c = 25$  (左图)、 $c = 105$  (中图) 和  $c = 200$  (右图)。

## 2 跳跃方程: 不动点和分岔

考虑离散系统 (1)-(2) 的特定演化模式, 这种模式有利于两家公司 X 和 Y 交替主导其共同市场的局面。在此情况下, 两家公司的销售额  $x_n$  和  $y_n$  之间的差异可以周期性地从正值变为负值, 在一个典型的演变中让人想起许多物理系统中的超车现象 [17-21]。为了研究离散系统 (1)-(2) 在超车状态下的动力学, 我们引入了两个新变量, 即  $z_n$  和  $w_n$  分别对应销售  $x_n$  和  $y_n$  在时间  $n$  的差值和总和:

$$z_n = x_n - y_n, \quad w_n = x_n + y_n. \quad (3)$$

有了这两个新变量, 方程 (1) 和 (2) 变为:

$$z_{n+1} = (1 - \alpha_1) z_n + \beta_1 w_n - \frac{b_1}{1 + \exp(-cz_n)}, \quad (4)$$

$$w_{n+1} = (1 - \alpha_1) w_n + \beta_1 z_n + \frac{a_1}{1 + \exp(-cz_n)}, \quad (5)$$

其中:

$$\alpha_1 = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \beta_1 = \frac{\beta - \alpha}{2}, \quad a_1 = a + b, \quad b_1 = b - a. \quad (6)$$

给出的离散方程组 (公式 4) -(5) 也是非线性的, 根据公式 (6), 这些耦合离散非线性方程的特征参数由 Behrens-Feichtinger 模型 (1) -(2) 的参数决定。

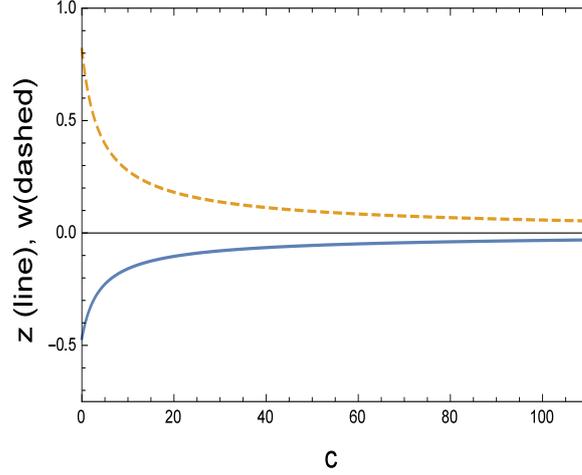


图 3 根  $z_0$  (实线) 和  $w_0$  (虚线) 耦合系统 (7)-(8) 的解, 绘制于  $c$  针对  $a = 0.16, b = 0.9, \alpha = 0.46$  和  $\beta = 0.7$ 。

耦合系统方程的不动点 (4)-(5) 是以下  $2 \times 2$  非线性代数方程的解对  $(z_0, w_0)$ :

$$\alpha_1 z_0 - \beta_1 w_0 + \frac{b_1}{1 + \exp(-cz_0)} = 0, \quad (7)$$

$$\alpha_1 w_0 - \beta_1 z_0 - \frac{a_1}{1 + \exp(-cz_0)} = 0. \quad (8)$$

后者系统使用布伦特算法进行了数值求解, 对于 Illustrations 我们考虑了之前曲线中使用的相同特征参数值, 即  $a = 0.16$ 、 $b = 0.9$ 、 $\alpha = 0.46$  和  $\beta = 0.7$ 。弹性系数  $c$ , 用于衡量两家公司投资策略的差异, 代表了一个合适的控制参数, 并将作为数值生成固定点的变量。在图 3 中, 我们绘制了  $z_0$  (线) 和  $w_0$  (点) 相对于  $c$  的变化。我们看到当  $c = 0$ ,  $z_0$  取一个负的阈值, 并随着  $c$  的增加渐近地趋向于零。同时, 对于  $c = 0$ ,  $w_0$  处在一个正的阈值, 并且随着  $c$  变得非常大时, 渐近地趋向于零。请注意,  $z_0$  和  $w_0$  通过线性关系相关联, 可以通过结合方程 (7) 和 (8) 来展示。确实, 从这两个公式我们得到:

$$w_0 = z_0 \frac{a_1 \alpha_1 - b_1 \beta_1}{a_1 \beta_1 - b_1 \alpha_1}. \quad (9)$$

这一关系建议选择参数的方式使得  $a_1 \beta_1 - b_1 \alpha_1 \neq 0$ 。此外, 在图中观察到的  $z_0$  和  $w_0$  的变化。3 表明销售总额  $w_0$  将始终为正, 而销售额之差  $z_0$  始终为负, 对于模型特征参数所选择的具体值。

让我们检查二维离散映射 (4)-(5) 关于不动点  $(z_0, w_0)$  的无穷小偏差  $(\delta z_{n+1}, \delta w_{n+1})$  的稳定性。描述这些无穷小变换的方程可以通过线性  $2 \times 2$  矩阵方

程表示：

$$(\delta z_{n+1}, \delta w_{n+1}) = J_c(z_0, w_0) (\delta z_n, \delta w_n), \quad (10)$$

其中，控制固定点  $(z_0, w_0)$  附近无穷小变换的 Jordan 矩阵  $J_c(z_0, w_0)$  可以通过以下方式获得：

$$J_c(z_0, w_0) = \begin{pmatrix} 1 - \alpha_1 - \frac{c b_1}{4 \cosh^2(c z_0/2)} & \beta_1 \\ \beta_1 + \frac{c a_1}{4 \cosh^2(c z_0/2)} & 1 - \alpha_1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

二维映射的一周期轨道是由从固定点出发的连续迭代生成的点  $(z, w)$ ，这导致了一个序列  $(z_0, w_0), (z_1, w_1), \dots, (z_N, w_N)$  通过线性变换 (10)。在此序列中，稳定周期一轨道将需要  $|\text{trace}[J_c(z_0, w_0)]| \leq 2$ ，这表明了周期一轨道的稳定性条件：

$$8(1 - \alpha_1) - c b_1 \text{sech}^2(c z_0/2) = \pm 8. \quad (12)$$

对于从图中出现的不动点  $(z_0, w_0) = (0, 0)$ ：3 对于较大的  $c$ ，要求 (12) 导致  $c$  的两个可能值：一个负值是无关的，因此应该排除，以及一个用模型特征参数表示的正值：

$$c_c = \frac{16 + 8\alpha_1}{b_1}. \quad (13)$$

由于在方程中获得的数量  $c_c$  (13) 是弹性参数  $c$  的临界值，对于该值，周期一轨道是不稳定的，可以预期在  $c = c_c$  处会发生倍周期分岔。关于弹性系数  $c$ ，两个公司销售额的差  $z$  (左图) 和和  $w$  (右图) 的分岔图如图所示。4 对于  $a = 0.16$ ,  $b = 0.9$ ,  $\alpha = 0.46$  和  $\beta = 0.7$ 。这些参数值意味着  $b_1 = 0.74$  和  $\alpha_1 = 0.58$ ，使得公式 (13) 得出  $c_c = 27.891891892$ 。这与图 4 中所示的两个分岔图中首次观察到周期加倍分岔时  $c$  的值一致。

### 3 跳跃动态的时间序列分析

图 3 所示的不动点解以及关于  $c$  的分叉图。4 建议销售差异  $z$  始终为负，而销售额之和  $w$  始终为正，两者都随着  $c$  的增大逐渐趋向于零。这些行为实际上并不是普遍存在的，事实上它们特定于数值模拟中用于生成的  $a, b, \alpha$  和  $\beta$  的值。具体来说，对于跳跃演化而言，希望  $z$  能够从正值周期性振荡到负值，反映出企业在一段时间内交替领先的位置。图中显示的  $x_n$  和  $y_n$  的时间序列。1 已经表明了企业  $Y$  的长期垄断，在图中。5 我们绘制了  $z_n$  (实线) 和  $w$  (点) 的时间序列，对于  $a = 0.16$ ,  $b = 0.9$ ,  $\alpha = 0.46$ ,  $\beta = 0.7$  和两个不同的  $c$  值，以突出显示所有数量级的  $c$  缺乏跳跃现象。随着  $c$  增加，销售差异  $z_n$  周期性波动但仍保持在负值分支中。

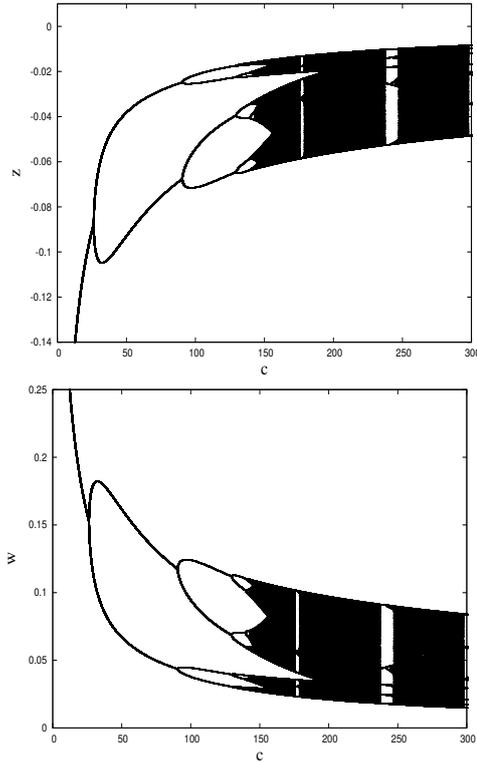


图 4 分岔图关于  $c$  的销售差异  $z$  (左图) 和总和  $w$  (右图), 对于  $b_1 = 0.74$  和  $\alpha_1 = 0.58$ 。

清楚地表明在上述分析中以及包括 [13] 在内的大多数研究中使用的值  $a = 0.16$ 、 $b = 0.9$ 、 $\alpha = 0.46$  和  $\beta = 0.7$  不适用于该系统的跳跃动力学。图 6 显示了时间序列的图像  $z_n$  和  $w_n$  现在针对  $a = 0.7, b = 0.45, \alpha = 0.7, \beta = 0.4$  以及三个不同的  $c$  值, 即  $c = 10$  (左图),  $c = 20$  (中图) 和  $c = 150$  (右图)。这一组参数值有利于跳跃前进, 可以看出随着  $c$  的增加, 跳跃前进的动力学得到增强。在图中。7 我们绘制了  $z_n$  和  $w_n$  相对于  $n$  的图表, 针对  $a = 0.9, b = 0.6, \alpha = 0.7$  和  $\beta = 0.46$ , 并在图中。8 相同的数量被绘制为  $a = 0.95, b = 0.35, \alpha = 0.85$  和  $\beta = 0.15$ 。在这两张图中, 也可以观察到在弹性系数  $c$  的相对较高值时发生交错动力学。一个关于从耦合离散非线性方程 (4- (5)) 中涌现的跳跃现象很有趣的事实是, 公司  $X$  的销售额衰减率应该大于或至少等于公司  $Y$  对应的参数 (即  $\alpha \leq \beta$ )。此外, 公司  $X$  的投资规模  $a$  应大于或至少等于  $b$ , 即公司的投资规模  $Y$  (即  $a \leq b$ )。值得注意的是, 这两家公司的累计瞬时销售量  $w_n$  总是为正, 最终接近于零但不会变为负值。后一种行为确保了在两家公司跳跃式发展过程中不会出现货物短缺的情况。

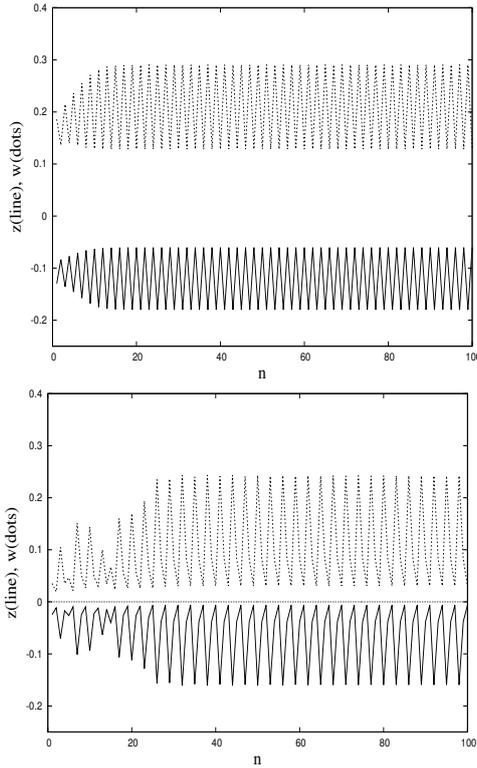


图 5 离散时间序列的销售差异  $z_n$  (实线) 和总和  $w_n$  (点), 对于  $a = 0.16$ ,  $b = 0.9$ ,  $\alpha = 0.46$  和  $\beta = 0.7$ 。左图:  $c = 20$ , 右图:  $c = 200$ 。

## 4 总结与结论性评论

Behrens-Feichtinger 模型在过去的研究中被广泛考虑, 并且已经确立该模型具有丰富的动态特性, 范围从规则的周期非谐振振荡到混沌演化, 这取决于其特征参数的值。在本研究中, 我们考察了系统的动力学, 重点关注一种特定的进化模式, 我们称之为蛙跳式发展。在这种特定模式下, 两家公司的销售额假定是相反发展的, 因此在有限的时间段内, 一家公司的销售额会超过另一家公司, 并且反之亦然。这种蛙跳式的动态特征由与两公司销售差异相关的变量的周期性振荡描述, 该变量由于蛙跳式动力学而预期从正值周期性地变为负值。我们发现, 这种特定的进化模式需要适当选择模型的特征参数值。值得注意的是, 在任何时候  $n$  的总销售额始终为正, 确保了产品的可用性以满足消费者需求。

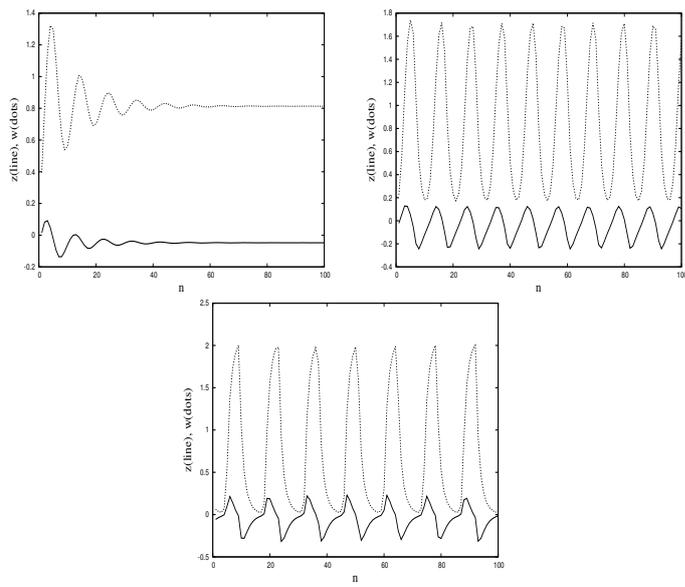


图 6 离散时间序列的销售差值  $z_n$  (实线) 和总和  $w_n$  (点), 对于  $a = 0.7$ ,  $b = 0.45$ ,  $\alpha = 0.7$  和  $\beta = 0.4$ 。左图:  $c = 10$ , 中图:  $c = 20$ , 右图:  $c = 150$ 。

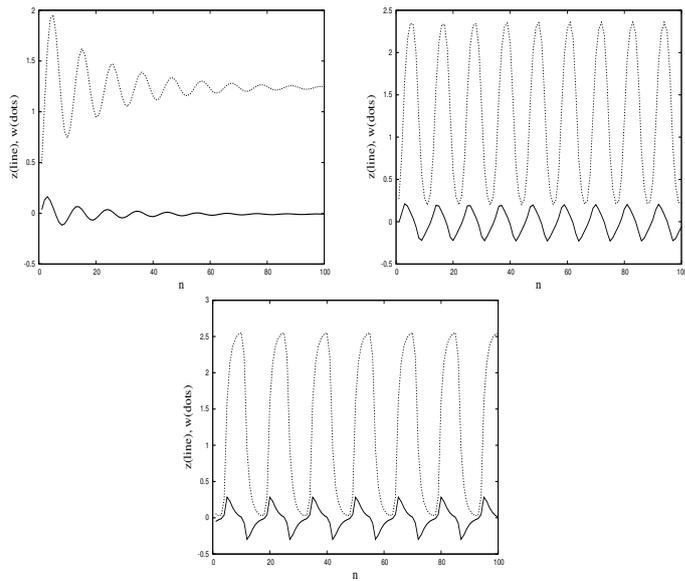


图 7 离散时间序列的销售差异  $z_n$  (实线) 和总和  $w_n$  (点), 对于  $a = 0.9$ ,  $b = 0.6$ ,  $\alpha = 0.7$  和  $\beta = 0.46$ 。左图:  $c = 10$ , 中图:  $c = 20$ , 右图:  $c = 150$ 。

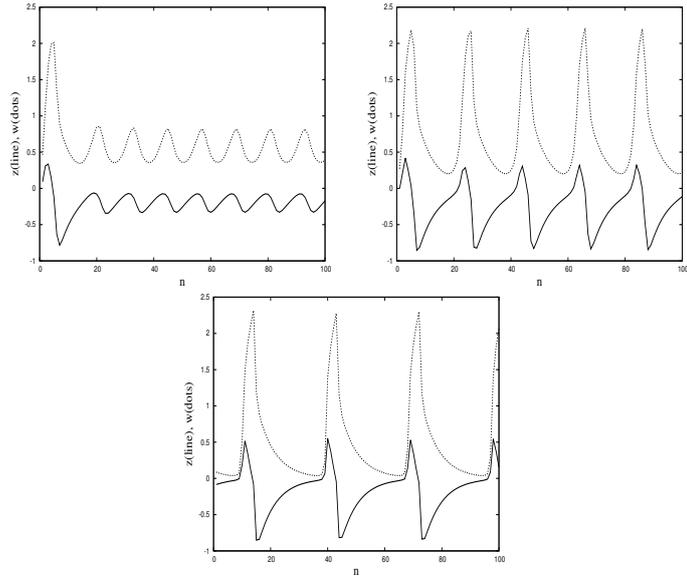


图 8 离散时间序列的销售差异  $z_n$  (实线) 和总和  $w_n$  (点), 对于  $a = 0.95$ ,  $b = 0.35$ ,  $\alpha = 0.85$  和  $\beta = 0.15$ 。左图:  $c = 10$ , 中图:  $c = 20$ , 右图:  $c = 150$ 。

## 致谢

A. M. Dikandé 感谢亚历山大·冯·洪堡基金会的支持, 在“回访奖学金计划”的框架下, 他访问了复杂系统物理马克斯普朗克研究所 (MPIPKS)。H. N. Matabaro 感谢非洲数学科学研究所 (AIMS) 赞助他在加纳 AIMS 的学术停留。

## 声明

### 资金支持

本工作未申请任何资金支持。

### 利益冲突

作者声明他们与本文讨论的主题或材料没有任何组织或实体的关联或参与, 无论是财务利益还是非财务利益。

### 数据可用性

数据共享不适用于本文, 因为在当前研究中没有生成或分析任何数据集。

## 作者贡献声明

A. M. Dikandé: 概念化, 调查, 数值模拟, 验证, 原始草稿的编写。  
H. N. Matabaro: 调查, 正式分析, 验证。

## References

- [1] Weidlich and Braun M., "The master equation approach to nonlinear economics", *J. Evol. Econ.* **2**, 233-265 (1992).
- [2] Lines M. (Editor), "Nonlinear dynamical systems in Economics" (Springer, Wien-New York, 2005).
- [3] Lorenz H. W., "Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion" (2nd Edition, Springer-Verlag, New York-Berlin, Heidelberg, 1997).
- [4] Chen P., "Empirical and theoretical evidence of economic chaos", *Syst. Dynam. Rev.* **4**, 81-108 (1998).
- [5] Sorger R., "Dynamic Economic Analysis: Deterministic Models in Discrete Time" (Cambridge University Press, Cambridge, 2015).
- [6] Dockner E. J., Hartl R. F., Luptacik M. and Sorger G. (Eds.). "Optimization, Dynamics, and Economic Analysis: Essays in Honor of Gustav Feichtinger" (Springer, Berlin, 2000).
- [7] Kopel M., "Improving the performance of an economic system: controlling chaos", *J. Evol. Econ.* **7** (1997) 269-289.
- [8] Puu T., "Attractors, Bifurcation, and Chaos: Nonlinear Phenomena in Economics" (Springer, New York, 2000).
- [9] Orlando G., Bufalo M. and Stoop R., "Financial markets? deterministic aspects modeled by a low-dimensional equation", *Scientific Reports* **12**, 1693 (2022).
- [10] Demmel R., "The basic deterministic macroeconomic model", in: Fiscal Policy, "Public Debt and the Term Structure of Interest Rates. Lecture

Notes in Economics and Mathematical Systems”, vol 476. (Springer, Berlin, Heidelberg, 1999).

- [11] Feichtinger G., in: Haag G., Mueller U., Troitzsch K. G. (Eds.), ”Economic Evolution and Demographic Change” (Springer, Berlin, 1992).
- [12] Holyst J. A., Hagel T., Haag G. and Weidlich W., ”How to control a chaotic economy?”, *J. Evol. Econ.* **6**, 31-42 (1996).
- [13] Holyst J. A. and Urbanowicz K., ”Chaos control in economical model by time-delayed feedback method”, *Physica A* **287**, 587-598 (2000).
- [14] Salarieh H. and Alasty A., ”Delayed feedback control via minimum entropy strategy in an economic model”, *Physica A* **387**, 851-860 (2008).
- [15] Behrens D. A., Feichtinger G. and Prskawetz A., ”Complex dynamics and control of arms race”, *Eur. Jour. Oper. Res.* **100**, 192-215 (1997).
- [16] Perc M., ”Microeconomic uncertainties facilitate cooperative alliances and social welfare”, *Economics Let.* **95**, 104-109 (2007).
- [17] Malomed B. A., ”Leapfrogging solitons in a system of coupled KdV equations”, *Wave Motion* **9**, 401-411 (1987).
- [18] Liu A. K., Pereira N. R., Ko D. R. S, ”Weakly interacting internal solitary waves in neighbouring pycnoclines”, *J. Fluid Mech.* **122**, 187-194 (1982).
- [19] Weidman P. D. and Johnson M., ”Experiments on leapfrogging internal solitary waves”, *J. Fluid Mech.* **122**, 195-213 (1982).
- [20] Nitsche M., Weidman P. D., Grimshaw R., Ghrist M. and Fornberg B., ”Evolution of solitary waves in a two-pycnocline system”, *J. Fluid Mech.* **642**, 235-277 (2010).
- [21] Achere Nkongho A., Akong Ngate L., Dikandé A. M. and Essimbi B. Z., ”Leapfrogging dynamics of interacting solitons in weakly coupled nonlinear transmission lines”, *SN Applied Sciences* **1**, 552 (2019).