

手性纳米管基约瑟夫森结中的完美超电流二极管效率

Joseph J. Cuozzo^{1,*} and François Léonard¹

¹Materials Physics Department, Sandia National Laboratories, Livermore, CA 94551, USA.

超电流二极管效应 (SDE) 描述了超导系统中的现象, 其中从超导状态切换到正常状态的开关电流大小对于正负电流偏置是不同的。尽管这样的二极管效应在约瑟夫森器件中普遍存在, 但在约瑟夫森结中观察到二极管效应并实现完美二极管效率的基本条件仍然不清楚。在这项工作中, 我们基于金兹堡-朗道理论分析了手性纳米管基约瑟夫森结的超电流二极管特性。我们发现, 在沿管平行施加磁场时, 即使系统中不存在自旋轨道相互作用, 结上也会出现二极管效应和异常相位。令人惊讶的是, 结中的 SDE 独立于异常相位。相反, 我们确定了一种由磁通量量子化保护的非互易持久电流可以激活 SDE, 甚至在没有高阶配对隧穿过程的情况下也是如此。我们表明这种新型的 SDE 原则上可导致完美二极管效率, 突显了如何利用持久电流来设计高效超电流二极管。

随着对低功耗快速电子设备在低温操作下需求的增长, 非互易超导器件的快速发展最近已经发生^{1,2}。非互易效应已经在块体超导体中³⁻⁷以及约瑟夫森结中⁸⁻¹⁹ (JJs) ——两个通过隧道势垒弱耦合的超导电极, 例如正常金属或绝缘体——被广泛研究。在 JJ 中, 约瑟夫森二极管效应 (JDE) 表现为设备从超导态切换到耗散态时正负阈值电流大小的不同, 如图 1(a) 所示。尽管几十年前这种效果已经在具有几何不均匀性的设备中被知晓, 但由于在均匀设备中超导二极管效应的报道引起了新的兴趣, 在这些设备中非互易性源于微观相互作用。在这些系统中, 特别是在没有施加磁场的情况下, 二极管效应支持了奇异状态的发现, 例如时间反演对称性破坏的超导态^{20,21}。其他零磁场超电流二极管包括基于铁基超导体的 JJ²², 扭曲双层石墨烯的 JJ²³, 扭曲三层石墨烯²⁴, 阻碍原子绝缘体 JJ²⁵, 受压 PbTaSe₂²⁶ 和多铁性 JJ²⁷。关于这些系统和其他系统中 SDE 的性质仍存在一些开放问题, 这需要进行进一步的理论建模来解决 SDE 的基本限制。

理论上对 JDE 的描述经常从直观的角度关注对称性论点, 即破缺的反演和时间反演对称性^{1,28-30}。假设这些对称性被破坏, 可以考虑电流-相位关系 (CPR)²: $I_s(\phi) = a \sin(\phi) + b \cos(\phi) + c \sin(2\phi) + d \cos(2\phi)$ 。这里 ϕ 是约瑟夫森结上的相位, 而 a, b, c 和 d 是描述相干库珀对隧穿 (a 和 b) 以及成对共隧穿 (c 和 d) 超电流通道权重的实数常量。参数 b 和 d 与结点中的时间反演对称性 (TRS) 破坏相关。当这四个常数均非零并被视为独立参数时, 普遍的组合结果是 (a, b, c, d) 导致 $I_{c+} \neq |I_{c-}|$, 其中 $I_{c+} = \max(I_s)$ 和 $I_{c-} = \min(I_s)$, 约瑟夫森二极管效应得以实现 (见图 1(a)), 效率为 $\eta = \frac{I_{c+} + I_{c-}}{I_{c+} - I_{c-}}$ 。使

用 $I_s(\phi)$ 的最小形式, 显然无法实现完全有效的超电流二极管, 其中 I_{c+} 或 I_{c-} 为零。虽然理想二极管操作已在交流极限中被识别³¹⁻³³, 但在直流情况下仍存在一个问题: 原则上, 在直流极限下运行的完美有效的约瑟夫森二极管是否可能? 我们通过考虑手性纳米管基约瑟夫森结 (ChNt-JJs) 来肯定地回答了这个问题。

在本工作中, 我们提出了一种针对沿管方向施加磁场的 ChNt-JJ 的现象学 Ginzburg-Landau (GL) 理论。我们考虑了一个遵守反演对称性的各向异性自由能泛函, 并选择非高对称轴上的周期性边界条件来定义手性纳米管, 见图 1(b-c)。首先, 我们展示了在这个系统中, 尽管没有自旋轨道耦合, ChNt-JJ 仍会发展出

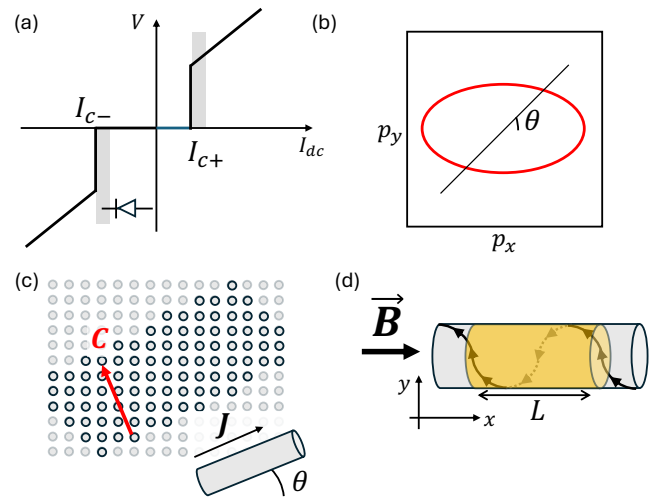


Figure 1. (a) 具有负二极管极性的超电流二极管的电压-电流曲线示意图。(b) C_2 对称费米面的示意图。(c) 方格晶格上的手性纳米管示意图。(d) ChNt-JJs 和诱导约瑟夫森二极管效应的螺旋持续电流的卡通图。

异常相。在打破反演对称性的 JJ 中已经研究了异常相与 JDE 之间的联系³⁴，但直到现在，尚未确定 ChNt-JJs 中是否存在以及可能的异常相来源。我们还发现，在没有配对共隧穿的情况下存在二极管效应，这是由

于受到 ChNt-JJ 中的磁通量子化保护的非互易持久电流造成的。在这种情况下，一个与相位无关的持续电流使我们设定二极管效率的上限，展示了如何在 ChNt-JJs 中实现完美效率。我们建模了一个具有自由能泛函中高阶项的超导 ChNt³⁵：

$$F[\psi] - F[0] = \int_{\Omega} d\mathbf{r}_0 \left(\alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{2m_0} |\mathbf{p}_0 \psi|^2 + \frac{1}{4m_0^2 \zeta_0} |\mathbf{p}_0^2 \psi|^2 \right) + \int_{\Omega} d\mathbf{r}_0 \frac{1}{2m_1} (|p_{x0} \psi|^2 - |p_{y0} \psi|^2) \\ + \int_{\Omega} d\mathbf{r}_0 \frac{|p_{x0}^2 \psi|^2 + |p_{y0}^2 \psi|^2 - \frac{1}{2} \{p_{x0}, p_{y0}\} \psi|^2}{4m_1^2 \zeta_1} + \int_{\Omega} d\mathbf{r}_0 \frac{|p_{x0}^2 \psi|^2 + |p_{y0}^2 \psi|^2 - \frac{3}{2} \{p_{x0}, p_{y0}\} \psi|^2}{4m_2^2 \zeta_2}. \quad (1)$$

这里， $m_0 < m_1, m_2, \zeta_0, \zeta_1, \zeta_2 > 0, \alpha \propto (T - T_c)$ 和 β 是通常的 GL 系数，并且 $\mathbf{p} = -i\hbar (\nabla - i\frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A})$ 是动量算子。系统的原子晶格定义在一个二维平面上 $\Omega \in \mathbb{R}^2$ 。这里动能对 F 的贡献具有反演对称性，而 C_2 具有旋转对称性当 $1/m_1 \neq 0$ 时。这对应于椭圆形费米面，见图 1(b)。周向矢量 $\mathbf{C} = 2\pi R(-\sin \theta, \cos \theta)$ ，其中 R 是纳米管的半径，定义了应用于纳米管的周期性边界条件，见图 1(c)。为了简化我们的分析，我们将实空间基底旋转至 $\mathbf{r} = R(\theta)\mathbf{r}_0$ ，其中 $R(\theta)$ 是 2x2 的旋转矩阵。在这种情况下，Ginsburg-Landau 方程为（详见补充信息）

$$\mathbf{J} = \frac{2e\hbar}{i} \begin{pmatrix} \rho_1 - \rho_4 p_x^2 - \rho_7 p_y^2 - \rho_8 p_x p_y & \rho_3 - \frac{\rho_8}{2} (p_x^2 - p_y^2) - \frac{\rho_6}{2} p_x p_y \\ \rho_3 - \frac{\rho_8}{2} (p_x^2 - p_y^2) - \frac{\rho_6}{2} p_x p_y & \rho_2 - \rho_4 p_y^2 - \rho_7 p_x^2 + \rho_8 p_x p_y \end{pmatrix} \mathbf{j} \quad (2)$$

$$\left[\alpha + \beta |\psi|^2 - (\rho_1 p_x^2 + \rho_2 p_y^2 + 2\rho_3 p_x p_y) + \rho_4 (p_x^4 + p_y^4) + (\rho_6 + 2\rho_7) p_x^2 p_y^2 + 2\rho_8 (\rho_3^2 p_y - p_x p_y^3) \right] \psi = 0, \quad (3)$$

其中 $\mathbf{j} = \psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^* - i\frac{4e}{\hbar c} \mathbf{A} |\psi|^2$ 。与简化的 C_2 对称性相关的系数是 $\rho_1 = \mu_1 \cos^2 \theta + \mu_2 \sin^2 \theta$ ， $\rho_2 = \mu_2 \cos^2 \theta + \mu_1 \sin^2 \theta$ ，和 $\rho_3 = (\mu_2 - \mu_1) \sin 2\theta$ 其中 $\mu_{1/2} = (m_1 \pm m_0)/(2m_0 m_1)$ 。自由能中的高阶动能项决定了系数 $\rho_4 = (\kappa_1 + \lambda \cos 4\theta)/2$ ， $\rho_6 = -2(\kappa_2 + \lambda \cos 4\theta)$ ， $\rho_7 = (\kappa_1 + 2\kappa_2 - \lambda \cos 4\theta)/2$ ，以及 $\rho_8 = -\lambda \sin 4\theta$ 其中 $\kappa_1 = \frac{1}{2m_0^2 \zeta_0} + \frac{1}{4m_1^2 \zeta_1}$ ， $\kappa_2 = \frac{1}{4m_2^2 \zeta_2}$ ，和 $\lambda = \frac{1}{4m_1^2 \zeta_1} + \frac{1}{2m_2^2 \zeta_2}$ 。当 $\theta \bmod \frac{\pi}{2} \neq 0$ 时，纳米管是手性的，并且 $\rho_3 \neq 0$ ，导致沿纳米管方向的镜像对称性破坏。这里的超流刚度张量将超电流密度 $\mathbf{J}$ 与凝聚态电流 $\mathbf{j}$ 相关联，现在具有 $\mathbf{p}$ -依赖性。

为了建立 SDE 的条件，我们考虑沿纳米管 $\mathbf{B} = B_{ext} \mathbf{x}$ 的外部磁场，这破坏了时间反演对称性。周期性边界条件导致 p_y 是一个好的量子数 $p_y^{(n)} = \hbar(\pi R^2 B_{ext}/\Phi_0 + n)/R$ 对于某些 $n \in \mathbb{Z}$ ，其中 Φ_0 是磁通量子。为了简单起见，我们限制在小直径纳米管和最低子带的情况下，并设置 $p_y^{(n)} = p_y^{(0)}$ 。然后序参

量是

$$\psi(x, y) = \psi_x(x) e^{ip_y^{(0)} y/\hbar}, \quad (4)$$

对于某个复值函数 ψ_x 。从这里，为了计算约瑟夫森结中的超电流，我们需要对方程 (3) 在结内的解应用适当的边界条件。最简单的约瑟夫森结模型使用刚性边界条件³⁶

$$\psi_x(x \leq 0) = \psi_{\infty}, \quad \psi_x(x \geq L) = \psi_{\infty} e^{i\phi}, \quad (5)$$

其中定义结的正常区域是 $0 \leq x \leq L$ ， ϕ 是结上的相位差，并且 $\psi_{\infty} = \sqrt{-\alpha/\beta}$ 。对于结的边界条件可以进行更严格的处理，在二维和三维几何结构中这可能是重要的³⁷，但是对于我们的准一维系统，刚性边界条件提供了足够的定性准确性。假设 $T \lesssim T_c$ 和一个短连接 $L \ll \xi$ ，其中 ξ 是超导相干长度，我们可以通过标准方式线性化求解方程 3 并找到

$$\psi_x(x) \approx \psi_{\infty} L^{-1} e^{iax} (L - x + x e^{i(\phi - aL)}), \quad (6)$$

其中 $a = -\frac{\rho_3 p_y^{(0)}}{\hbar \rho_1}$ 。然后通过求解方程 (2) 中的 J_x 来计算 ChNt-JJ 的电流相位关系，由于超流刚度各向异性，需要 $\mathbf{j}$ 的两个分量：

$$\mathbf{j} = \begin{pmatrix} \frac{2i\psi_\infty^2}{L} \sin(\phi - aL) + 2ia\psi_0^2 |L - x + x^{i(\phi - aL)}|^2 \\ \frac{2i\psi_0^2 p_y^{(0)}}{\hbar} |L - x + x^{i(\phi - aL)}|^2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

写成 $j_0 = \rho_1 j_x + \rho_3 j_y$ 并注意到 $\partial_x j_0 = 0 = \partial_y j_0$ ，我们可以重新排列方程 (2) 中的 J_x 表达式为

$$J_x = \frac{e\hbar}{i\rho_1} [2\rho_1 j_0 - (\rho_8 \rho_1 - 2\rho_3 \rho_4) p_x^2 j_y] + \frac{e\hbar}{i\rho_1} [(\rho_8 \rho_1 + 2\rho_3 \rho_7) p_y^2 + (\rho_6 \rho_1 - 2\rho_3 \rho_8) p_x p_y] j_y. \quad (8)$$

从方程 (7)，我们看到 $p_y j_y = 0$ 。然后 CPR 由

$$I_s(\phi) = I_c \left[\sin \tilde{\phi} + \frac{2\hat{\Phi}}{LR} \gamma^{-1} (1 - \cos \tilde{\phi}) \right]. \quad (9)$$

给出这里 $I_c = \frac{4e\hbar \rho_1 \psi_\infty^2 A_\perp}{L}$ ， $\tilde{\phi} = \phi - \phi_0$ ， $\phi_0 = -\frac{\rho_3 p_y^{(0)} L}{\hbar \rho_1}$ ， $\hat{\Phi} = \pi R^2 B_{ext} / \Phi_0$ 和

$$\gamma = \frac{(\frac{m_1}{m_0} + \cos 2\theta)^2 \csc 2\theta}{2m_1(\kappa_1 - \lambda - 2\lambda \frac{m_1}{m_0} \cos 2\theta)}. \quad (10)$$

方程 (9) 中的 CPR 在 2π 相移 $I_s(\phi) = I_s(\phi + 2\pi)$ 下不变，反映出无论是将导线中的序参数的相位改变 2π 都不会改变物理状态。临界电流 I_c 与常规表达式不同，因为它依赖于手性角 $\rho_1 = \rho_1(\theta)$ 。

让我们首先考虑一个简单的情况，其中方程 (1) 中的 $\mathcal{O}(p^4)$ 项消失 ($\gamma^{-1} = 0$)，从而 $I_s = I_c \sin \tilde{\phi}$ 。这里存在一个异常相位 ϕ_0 ，其中 ChNt-JJ 在其自由能的最小值处为 $\phi_0 \neq 0$ 和 $I_s(-\phi) \neq -I_s(\phi)$ (在时间反演对称性破坏下是允许的)。关于纳米管的各向异性， $\phi_0 \propto \sin 2\theta / m_1$ ，以及几何和磁场 $\phi_0 \propto B_{ext} A_n$ 其中 A_n 是连接处纳米管的表面积。后一种关系意味着 ϕ_0 在连接长度 L 上呈线性，类似于短 Rashba 连接³⁶。此处异常相位的存在是由于纯粹的轨道机制³⁸，而不是更常见的自旋-轨道机制^{36,39}。

我们也可以通过对速度 $v(p_x)$ 的分析来获得关于异常相位 ϕ_0 的一些直觉。在这种情况下，我们有 $\Delta v_x = v_x(p_x) - v_x(-p_x) = 4\rho_3 p_y^{(0)}$ ，因此

$$\phi_0 = -\frac{\Delta v_x L}{4\hbar \rho_1}. \quad (11)$$

之前对 Rashba 纳米线 JJ 在磁场垂直于电流流向的情况下进行的工作表明，由自旋轨道相互作用⁴⁰引起的异常相位与安德烈夫束缚态谱中的相移 $\varphi_0 \propto \Delta v_{F,\sigma} L$ 相关，其中 $\Delta v_{F,\sigma}$ 是结中两个自旋通道费米速度之差。因此，在 Rashba JJ 和 ChNt-JJs 中的异常相直接与凝聚体速度破缺的手征对称性相关。这表明当凝聚速度是非互易时，可以产生异常相，并且当凝聚波函数中的凝聚速度的非互易性不能通过规范变换消除时，JDE 就会形成⁴¹。

回到方程 9 的完整解，我们观察到 CPR 采取了一种非常规的二部形式 $I_s(\phi) = \tilde{I}_s(\phi) + I_0$ ，其中 I_0 是独立的 ϕ 。相位无关项 I_0 表示与由于 Little-Parks 效应而围绕管流动的超电流相关的手性管中的持续电流。我们有 $I_0 \propto B_{ext} \sin(2\theta)$ ，因此只有当管是手性的并且施加了外部磁场时，电流才非零。虽然磁场诱导的环绕管的超电流 (即 $J_y \neq 0$ 与常规预期相反，令人惊讶的是这种持续电流直接贡献了二极管效应。在这种情况下持续电流的图示见图 1(d)，其中电流沿着螺旋形的路径环绕手性管流动。为了保持平衡状态下持续电流形成闭合回路的要求，结点将自我调整到相同的异常相位 ($\phi = \phi_0$)，从而在 x 方向上没有净超电流流动。

我们可以将方程 (9) 中的持续电流与由 Meissner 屏蔽引起的非互易性的接点 CPR 中相位独立的超电流进行比较¹⁷。在参考文献¹⁷中，Meissner 效应由于 Andreev 束缚态的谱流而产生持续电流，导致 $\int_0^{2\pi} I_s d\phi = 0$ ，但在我们的工作中我们发现 $\int_0^{2\pi} I_s d\phi \neq 0$ 。参考文献¹⁷中的屏蔽电流只有当更高谐波进入 CPR 时才会引起二极管效应，即在隧穿振幅的二次方阶中，二极管效应消失。这表明由超电极中的 Meissner 效应产生的持续电流进入了接点上的高阶配对隧穿通道，导致通道之间的干涉从而产生二极管效应。而在我们的情况下，导致二极管效应的持续电流并不依赖于配对通道干涉或任何相位相干的 Josephson 隧穿过程。持续电流与方程 (1) 中的 $\mathcal{O}(p^4)$ 项相关，我们发现用描述配对隧穿的项替换 $\mathcal{O}(p^4)$ 项并不必然导致二极管效应 (见附录)。此外，持续电流受到磁通量子化的保护，因此当阶参数 ψ 在 ChNt-JJ 中非零时，持续电流中的非互易分量通常会穿过结。在不对称的 SQUIDS³¹ 中也发现了类似的持续电流。在那里，磁通量子化决定了器件的磁特性，并且屏蔽引

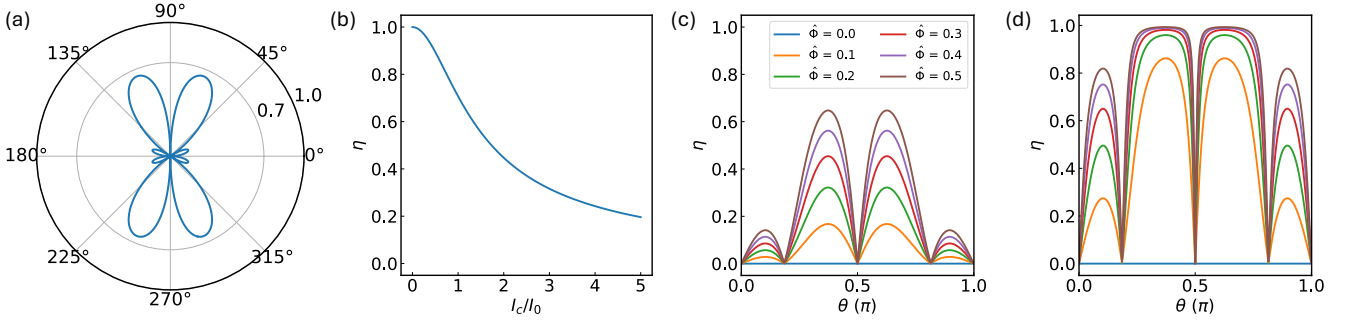


Figure 2. (a) 在极坐标中 η 与 θ 的对比，对于 $\hat{\Phi} = 0.5$ 和 $L/R = 10$ 。(b) η 与 I_0/I_c 的对比。 η 与 θ 对比 $\hat{\Phi} = 0, 0.1, \dots, 0.5$ ，带有 (c) $L/R = 10$ 和 (d) $L/R = 1$ 。这里我们使用了 $m_1/m_0 = 5$ 、 $\kappa_1 m_1/R^2 = 50$ 和 $\lambda m_1/R^2 = 10$ 。

入了对超导二极管效应有贡献的非互易持续电流，但发现配对隧穿也是产生二极管效应所必需的³¹。因此，ChNt-JJs 展现了一种新的 SDE 类型，在这种类型中，持续电流无需配对隧穿。

二极管效率具有特别简单的形式： $\eta = I_0/\tilde{I}_c$ ，其中 $\tilde{I}_c$ 是 $\tilde{I}_s(\phi)$ 的最大值。这可以解析求解：

$$\eta = \frac{2\hat{\Phi}/(LR)}{\sqrt{(2\hat{\Phi}/(LR))^2 + \gamma^2}}, \quad (12)$$

这里我们假设了 $\gamma^{-1} \neq 0$ ；否则，二极管效应消失 ($\eta = 0$)。 η 作为手性角 θ 的函数的一个代表性计算结果如图 2(a) 所示，表明在手性角 $\theta = n\pi/2$ 处， η 对于 $n \in \mathbb{Z}$ 受到抑制，这与文献³⁵一致。我们还观察到在某些手性角度 θ_0 (例如 $\sim 0.18\pi$) 下 η 的抑制作用，其中 $\gamma^{-1} = 0$ 对于 $\cos 2\theta_0 = \frac{m_0(\kappa_1 - \lambda)}{2\lambda m_1}$ 。我们观察到 η 是温度的独立的。这是由于两个量 ($I_{c+} + I_{c-}$) 和 ($I_{c+} - I_{c-}$) 具有相同的温度标度。我们还看到对于 $0 < \hat{\Phi} < 1$ ，有 $\text{sgn}(\eta) = \text{sgn}(B_{ext})$ 。这两个特征都与使用 GL 理论预测的超导手性纳米管³⁵的超导二极管效应形成对比 (即在没有连接的情况下) 其中该情况下的 η 对 T 敏感并且通常在 $0 < \hat{\Phi} < 1$ 处改变符号。在 Ref.³⁵ 中，通过使用纳米管中的一个现象学配对破裂库珀对动量来计算二极管效应，并导致一个小的 $\eta (< 0.03)$ 。方程 (12) 的结果忽略了超导引线中的去配对动量。这种配对破坏机制预计在实际实验中会起到一定作用，暗示二极管效应可能在现实中具有某种弱的 T -依赖性。

评估 η 的上限，我们看到 $\eta \rightarrow 1$ 如 $I_c/I_0 = \gamma LR/2\hat{\Phi} \rightarrow 0$ ，所示，见图 2(b)。这一极限原则上是通过优化外在贡献 $\hat{\Phi}/LR$ 以主导由手性纳米管的超流刚度 (即 $m_1, m_2, \kappa_1, \lambda$) 决定的内在贡献 γ 来实现的。

这里不能通过减小 R 来任意增强 $p_y^{(0)}$ ，因为凝聚态的更大动能最终会导致超导状态被抑制³⁵。然后，优化 η 的关键参数是一个较小的结长度 L ，如图 2(c-d) 所示。图 2(c) 展示了对于中等接头长度 $L/R = 10$ 的 η 与 θ 。这里当 $\hat{\Phi}$ 增加到 0.5 时， η 逐渐接近其最大值 0.7。然而，当 $L/R = 1$ 时，图 2(d) 显示 η 迅速接近近乎完美的二极管效率 ($\eta = 1$)，随着 $\hat{\Phi}$ 增加超过 0.2。我们通过几何量 $\eta = \sin \Theta$ 量化这种外在贡献的主导地位，其中 $\Theta = \arctan(I_0/I_c)$ ，这表明 η 的值被限制为 $|\eta| \leq 1$ 。因此，在原则上有可能实现完美的二极管效率而不借助非平衡效应^{32,33,42}。实际上，由于我们假设了 $m_0 < m_1$ (通常是这种情况)， η 只能接近这个手性纳米管系统中的理想极限值 $\frac{m_1}{m_0} + \cos 2\theta > 0$ ，但没有根本性的限制反对 $m_0 = m_1$ 。

在这项工作中，我们提出了一种用于手性纳米管-JJ 的 GL 理论。我们推导出当磁场平行于管子方向施加时，在结处发展起来的纯轨道异常相位。二极管效应被认为与异常相位⁴³密切相关，但在这里我们发现它独立于 SDE。我们也展示了这里的二极管效应的起源是一个非互易的持续电流，该电流受到磁通量子化的保护，并可能导致近乎完美的二极管效率。虽然我们的分析不是针对特定材料系统进行的，但这些一般论点适用于各种手性纳米管-JJs。测试手性纳米管中 SDE 的理想设置是使用单壁纳米管，因为与涡旋相关的效应将被抑制。已经证明，NbSe₂ 的薄片可以诱导碳纳米管的超导性，并能够在高磁场下探测超导效应⁴⁴。这可能是未来研究手性纳米管中超电流二极管效应的一个有用平台。

致谢 J.J.C 对 Catalin D. Spataru、Wei Pan 和 Enrico Rossi 的有益讨论表示感谢。桑迪亚实验室的工作得到了一个 LDRD 项目的资助。桑迪亚国家实验室是由 Honeywell International Inc. 的全资子公司 National Technology & Engineering Solutions of Sandia, LLC (NTESS) 管理和运营的多任务实验室，为美国能源部国家安全管理局 (DOE/NNSA) 提供服务，合同编号 DE-NA0003525。本文由 NTESS 的员工撰写。该员工而非 NTESS 拥有本文的权利、所有权和利益，并对其内容负责。文中可能表达的任何主观观点或意见并不一定代表美国政府的观点。出版商承认，美国政府保留非独家、全额支付、不可撤销的世界范围内的许可，以出版或复制本文的已发布形式，或将此权利授予他人，用于美国政府的目的。根据 DOE 公开访问计划，DOE 将向公众提供联邦资助研究结果的访问权限。

* jjcuozz@sandia.gov

- [1] Y. Zhang, Y. Gu, P. Li, J. Hu, and K. Jiang, General theory of josephson diodes, *Phys. Rev. X* **12**, 041013 (2022).
- [2] M. Nadeem, M. S. Fuhrer, and X. Wang, The superconducting diode effect, *Nature Reviews Physics* **5**, 558 (2023).
- [3] J. Hu, C. Wu, and X. Dai, Proposed design of a josephson diode, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 067004 (2007).
- [4] K. Halterman, M. Alidoust, R. Smith, and S. Starr, Supercurrent diode effect, spin torques, and robust zero-energy peak in planar half-metallic trilayers, *Phys. Rev. B* **105**, 104508 (2022).
- [5] H. Wu, Y. Wang, Y. Xu, P. K. Sivakumar, C. Pasco, U. Filippozzi, S. S. P. Parkin, Y.-J. Zeng, T. McQueen, and M. N. Ali, The field-free josephson diode in a van der waals heterostructure, *Nature* **604**, 653 (2022).
- [6] H. Narita, J. Ishizuka, R. Kawarazaki, D. Kan, Y. Shiota, T. Moriyama, Y. Shimakawa, A. V. Ognev, A. S. Samardak, Y. Yanase, and T. Ono, Field-free superconducting diode effect in noncentrosymmetric superconductor/ferromagnet multilayers, *Nature Nanotechnology* **17**, 823 (2022), publisher: Nature Publishing Group.
- [7] Y. Hou, F. Nichele, H. Chi, A. Lodesani, Y. Wu, M. F. Ritter, D. Z. Haxell, M. Davydova, S. Ilić, O. Glezakou-Elbert, A. Varambally, F. S. Bergeret, A. Kamra, L. Fu, P. A. Lee, and J. S. Moodera, Ubiquitous superconducting diode effect in superconductor thin films, *Phys. Rev. Lett.* **131**, 027001 (2023).
- [8] X. Shi, W. Yu, Z. Jiang, B. Andrei Bernevig, W. Pan, S. D. Hawkins, and J. F. Klem, Giant supercurrent states in a superconductor-inas/gasb-superconductor junction, *Journal of Applied Physics* **118**, 133905 (2015), <https://doi.org/10.1063/1.4932644>.
- [9] E. Bocquillon and *et al.*, Gapless Andreev bound states in the quantum spin Hall insulator HgTe, *Nature Nanotech* **12**, 137 (2017).
- [10] S. Pal and C. Benjamin, Quantized josephson phase battery, *Europhysics Letters* **126**, 57002 (2019).
- [11] K. Misaki and N. Nagaosa, Theory of the nonreciprocal josephson effect, *Phys. Rev. B* **103**, 245302 (2021).
- [12] C. Baumgartner, L. Fuchs, A. Costa, J. Picó-Cortés, S. Reinhardt, S. Gronin, G. C. Gardner, T. Lindemann, M. J. Manfra, P. E. F. Junior, D. Kochan, J. Fabian, N. Paradiso, and C. Strunk, Effect of rashba and dresselhaus spin – orbit coupling on supercurrent rectification and magnetochiral anisotropy of ballistic josephson junctions, *Journal of Physics: Condensed Matter* **34**, 154005 (2022).
- [13] C. Baumgartner, L. Fuchs, A. Costa, S. Reinhardt, S. Gronin, G. C. Gardner, T. Lindemann, M. J. Manfra, P. E. Faria Junior, D. Kochan, J. Fabian, N. Paradiso, and C. Strunk, Supercurrent rectification and magnetochiral effects in symmetric josephson junctions, *Nature Nanotechnology* **17**, 39 (2022).
- [14] K.-R. Jeon, J.-K. Kim, J. Yoon, J.-C. Jeon, H. Han, A. Cottet, T. Kontos, and S. S. P. Parkin, Zero-field polarity-reversible Josephson supercurrent diodes enabled by a proximity-magnetized Pt barrier, *Nature Materials* **21**, 1008 (2022), publisher: Nature Publishing Group.
- [15] B. Pal, A. Chakraborty, P. K. Sivakumar, M. Davydova, A. K. Gopi, A. K. Pandeya, J. A. Krieger, Y. Zhang, M. Date, S. Ju, N. Yuan, N. B. M. Schröter, L. Fu, and S. S. P. Parkin, Josephson diode effect from cooper pair momentum in a topological semimetal, *Nature Physics* **18**, 1228 (2022).
- [16] T. H. Kikkeler, A. A. Golubov, and F. S. Bergeret, Field-free anomalous junction and superconducting diode effect in spin-split superconductor/topological insulator junctions, *Phys. Rev. B* **106**, 214504 (2022).
- [17] M. Davydova, S. Prembabu, and L. Fu, Universal josephson diode effect, *Science Advances* **8**, eabo0309 (2022), <https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/sci->

[adv.abo0309](#).

- [18] S. Ilić, P. Virtanen, T. T. Heikkilä, and F. S. Bergeret, Current rectification in junctions with spin-split superconductors, *Phys. Rev. Appl.* **17**, 034049 (2022).
- [19] M. Trahms, L. Melischek, J. F. Steiner, B. Mahendru, I. Tamir, N. Bogdanoff, O. Peters, G. Reece, C. B. Winkelmann, F. von Oppen, and K. J. Franke, Diode effect in josephson junctions with a single magnetic atom, *Nature* **615**, 628 (2023).
- [20] S. Y. F. Zhao, X. Cui, P. A. Volkov, H. Yoo, S. Lee, J. A. Gardener, A. J. Akey, R. Engelke, Y. Ronen, R. Zhong, G. Gu, S. Plugge, T. Tummuru, M. Kim, M. Franz, J. H. Pixley, N. Poccia, and P. Kim, Time-reversal symmetry breaking superconductivity between twisted cuprate superconductors, *Science* **382**, 1422 (2023), <https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.abl8371>.
- [21] W. Yu, J. J. Cuzzo, K. Sapkota, E. Rossi, D. X. Rademacher, T. M. Nenoff, and W. Pan, Time reversal symmetry breaking and zero magnetic field josephson diode effect in dirac semimetal Cd_3As_2 mediated asymmetric squids, *Phys. Rev. B* **110**, 104510 (2024).
- [22] G. Qiu, H.-Y. Yang, L. Hu, H. Zhang, C.-Y. Chen, Y. Lyu, C. Eckberg, P. Deng, S. Krylyuk, A. V. Davydov, R. Zhang, and K. L. Wang, Emergent ferromagnetism with superconductivity in $\text{Fe}(\text{Te},\text{Se})$ van der waals josephson junctions, *Nature Communications* **14**, 6691 (2023).
- [23] J. Díez-Mérida, A. Díez-Carlón, S. Y. Yang, Y.-M. Xie, X.-J. Gao, J. Senior, K. Watanabe, T. Taniguchi, X. Lu, A. P. Higginbotham, K. T. Law, and D. K. Efetov, Symmetry-broken Josephson junctions and superconducting diodes in magic-angle twisted bilayer graphene, *Nature Communications* **14**, 2396 (2023), publisher: Nature Publishing Group.
- [24] J.-X. Lin, P. Siriviboon, H. D. Scammell, S. Liu, D. Rhodes, K. Watanabe, T. Taniguchi, J. Hone, M. S. Scheurer, and J. Li, Zero-field superconducting diode effect in small-twist-angle trilayer graphene, *Nature Physics* **18**, 1221 (2022), publisher: Nature Publishing Group.
- [25] H. Wu, Y. Wang, Y. Xu, P. K. Sivakumar, C. Pasco, U. Filippozzi, S. S. P. Parkin, Y.-J. Zeng, T. McQueen, and M. N. Ali, The field-free Josephson diode in a van der Waals heterostructure, *Nature* **604**, 653 (2022), publisher: Nature Publishing Group.
- [26] F. Liu, Y. M. Itahashi, S. Aoki, Y. Dong, Z. Wang, N. Ogawa, T. Ideue, and Y. Iwasa, Superconducting diode effect under time-reversal symmetry, *Science Advances* **10**, eado1502 (2024), doi: 10.1126/sciadv.adol1502.
- [27] H.-Y. Yang, J. J. Cuzzo, A. J. Bokka, G. Qiu, C. Eckberg, Y. Lyu, S. Huyan, C.-W. Chu, K. Watanabe, T. Taniguchi, and K. L. Wang, Field-resilient supercurrent diode in a multiferroic josephson junction (2024), [arXiv:2412.12344 \[cond-mat.mes-hall\]](#).
- [28] L. Onsager, Reciprocal relations in irreversible processes. i., *Phys. Rev.* **37**, 405 (1931).
- [29] R. Kubo, Statistical-mechanical theory of irreversible processes. i. general theory and simple applications to magnetic and conduction problems, *Journal of the Physical Society of Japan* **12**, 570 (1957), <https://doi.org/10.1143/JPSJ.12.570>.
- [30] G. L. J. A. Rikken, J. Fölling, and P. Wyder, Electrical magnetochiral anisotropy, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 236602 (2001).
- [31] J. J. Cuzzo, W. Pan, J. Shabani, and E. Rossi, Microwave-tunable diode effect in asymmetric squids with topological josephson junctions, *Phys. Rev. Res.* **6**, 023011 (2024).
- [32] M. Valentini, O. Sagi, L. Baghumyan, T. de Gijssels, J. Jung, S. Calcaterra, A. Ballabio, J. Aguilera Servin, K. Aggarwal, M. Janik, T. Adletzberger, R. Seoane Souto, M. Leijnse, J. Danon, C. Schrade, E. Bakkers, D. Chrastina, G. Isella, and G. Katsaros, Parity-conserving cooper-pair transport and ideal superconducting diode in planar germanium, *Nature Communications* **15**, 169 (2024).
- [33] R. Seoane Souto, M. Leijnse, C. Schrade, M. Valentini, G. Katsaros, and J. Danon, Tuning the josephson diode response with an ac current, *Phys. Rev. Res.* **6**, L022002 (2024).
- [34] S. Reinhardt, T. Ascherl, A. Costa, J. Berger, S. Gronin, G. C. Gardner, T. Lindemann, M. J. Manfra, J. Fabian, D. Kochan, C. Strunk, and N. Paradiso, Link between supercurrent diode and anomalous josephson effect revealed by gate-controlled interferometry, *Nature Communications* **15**, 4413 (2024).
- [35] J. J. He, Y. Tanaka, and N. Nagaosa, The supercurrent diode effect and nonreciprocal paraconductivity due to the chiral structure of nanotubes, *Nature Communications* **14**, 3330 (2023).

- [36] A. Buzdin, Direct coupling between magnetism and superconducting current in the josephson φ_0 junction, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 107005 (2008).
- [37] D. Kochan, A. Costa, I. Zhumagulov, and I. Žutić, Phenomenological theory of the supercurrent diode effect: The lifshitz invariant (2023), [arXiv:2303.11975 \[cond-mat.supr-con\]](https://arxiv.org/abs/2303.11975).
- [38] A. Banerjee, M. Geier, M. A. Rahman, C. Thomas, T. Wang, M. J. Manfra, K. Flensberg, and C. M. Marcus, Phase asymmetry of andreev spectra from cooper-pair momentum, *Phys. Rev. Lett.* **131**, 196301 (2023).
- [39] W. Mayer, M. C. Dartiailh, J. Yuan, K. S. Wickramasinghe, E. Rossi, and J. Shabani, Gate controlled anomalous phase shift in Al/InAs Josephson junctions, *Nature Communications* **10.1038/s41467-019-14094-1** (2020), [arXiv:1905.12670](https://arxiv.org/abs/1905.12670).
- [40] T. Yokoyama, M. Eto, and Y. V. Nazarov, Anomalous josephson effect induced by spin-orbit interaction and zeeman effect in semiconductor nanowires, *Phys. Rev. B* **89**, 195407 (2014).
- [41] J. Hasan, D. Shaffer, M. Khodas, and A. Levchenko, Supercurrent diode effect in helical superconductors, *Phys. Rev. B* **110**, 024508 (2024).
- [42] H. Su, J.-Y. Wang, H. Gao, Y. Luo, S. Yan, X. Wu, G. Li, J. Shen, L. Lu, D. Pan, J. Zhao, P. Zhang, and H. Q. Xu, Microwave-assisted unidirectional superconductivity in al-inas nanowire-al junctions under magnetic fields, *Phys. Rev. Lett.* **133**, 087001 (2024).
- [43] M. Amundsen, J. Linder, J. W. A. Robinson, I. Žutić, and N. Banerjee, Colloquium: Spin-orbit effects in superconducting hybrid structures, *Rev. Mod. Phys.* **96**, 021003 (2024).
- [44] C. Bäuml, L. Bauriedl, M. Marganska, M. Grifoni, C. Strunk, and N. Paradiso, Supercurrent and phase slips in a ballistic carbon nanotube bundle embedded into a van der waals heterostructure, *Nano Letters* **21**, 8627 (2021), pMID: 34634912, <https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.1c02565>.

配对共隧穿的包含

到目前为止，我们对手性纳米管的分析忽略了库珀对共隧穿的贡献。我们现在将展示异常相位和对共隧穿的结合不是 ChNt-JJ 中 JDE 的充分条件。为了包含共隧穿效应，我们假设自由能有一个额外的贡献，形式为

$$F_{kin}^2[\psi] = \Gamma \int d\mathbf{r} (f_{kin}(\psi))^2 \quad (13)$$

$$f_{kin}(\psi) = \frac{1}{2m_0} |\mathbf{p}_0 \psi|^2 + \frac{1}{2m_1} (|p_{x0} \psi|^2 - |p_{y0} \psi|^2), \quad (14)$$

其中 f_{kin} 是配对凝聚自由能密度的动能部分，而 $\Gamma \in \mathbb{R}$ 与 JJ 之间的配对共隧穿概率成正比。然后，一个短程弹道手性纳米管基 JJ 的超电流密度由

$$\mathbf{J} = \frac{2e\hbar}{i} (1 + 2\Gamma f_{kin}(\psi)) \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_3 \\ \rho_3 & \rho_2 \end{pmatrix} \mathbf{j}. \quad (15)$$

给出。重要的是，我们看到公式 (13) 形式在配对和配对共隧穿通道中创造了相同的超流刚度各向异性。在这种情况下，小直径管的 CPR 为

$$I_s(\phi) = \frac{4e\hbar \rho_1 \psi_\infty^2 A_\perp}{L} \sin(\phi + \phi_0) \cdot \left[1 + 4\hbar^4 \Gamma \frac{\psi_\infty^2 \rho_1}{L^2} (1 - \cos(\phi + \phi_0)) \right] \quad (16)$$

$$= I_c (1 + 2\delta_\Gamma) \sin \tilde{\phi} - \delta_\Gamma \sin 2\tilde{\phi}, \quad (17)$$

，其中 $\delta_\Gamma = 2\hbar^4 \Gamma \psi_\infty^2 \rho_1 / L^2$ 。显然，尽管存在异常相位和配对隧穿，但没有二极管效应。这是因为将成对电流通道中的各向异性传播到成对隧穿通道中，在两个通道中出现了相同的异常相位，从而抑制了两个通道之间的任何干涉效应。如果包含的是 f_{kin} 的各向同性配对隧穿项，则可能会在通道之间产生一些干扰，导致 JDE，但 GL 方程需要数值解。