

具有复变量的机会约束优化

Raneem Madani¹ and Abdel Lisser¹

Université Paris-Saclay, CNRS, CentraleSupélec, Laboratoire des Signaux et
Systèmes (L2S), 91190, Gif-sur-Yvette, France.
{raneem.madani, abdel.lisser}@centralesupelec.fr

摘要 涉及复变量的优化问题在求解时, 通常会被转换为实变量问题, 这往往以牺牲收敛速度和可解释性为代价。本文介绍了一种新的形式化方法来处理一个涉及复随机变量的显著的随机优化问题, 该问题被称为复杂机会约束问题 (CCCP)。研究特别考察了线性 CCCP 在两种情况下的情形: 一种情况是各自具有概率约束, 另一种情况则是联合概率约束。对于各自的情况, 核心方法将 CCCP 重新表述为确定性的二阶锥规划 (SOCP) 问题, 确保与原始 CCCP 等价。对于联合情况, 则通过推导合适的上下界来实现近似, 这也导致了 SOCP 的公式化。最后, 在信号处理应用中的一个具体实例——使用 MVDR 的最小方差波束形成问题存在不匹配的情况下进行数值实验, 证明所提出的形式化方法优于文献中现有的方法。还包含了一种对联合与各自 CCCP 情况之间的比较分析。

Keywords: 随机优化 · 机会约束规划 · 联合约束问题 · 二阶锥规划 · 复正态分布 · 自适应波束成形。

1 介绍

数学优化是在遵守定义的约束条件的同时最大化或最小化目标的系统过程。然而, 许多优化问题因数据或模型中的不确定性而变得复杂。这导致了一个被称为不确定性下的优化或随机优化的关键子领域, 该领域最早由乔治·丹茨格在 20 世纪 50 年代提出 [1]。这个领域被广泛研究是因为现实世界的问题往往涉及不可预测的因素, 这些因素无法完全预料。解决这些不确定性对于开发既可靠又有效的解决方案至关重要。

处理优化中不确定性的一个突出框架是机会约束规划 (CCP), 该方法由 Abraham Charnes 和 William W. Cooper 在 1959 年提出 [2]。CCP 通过将它们表示为概率条件直接将不确定性纳入约束条件中。在此方法中, 约束必须以预定义的置信水平得到满足, 确保可行性和风险之间的平衡。处理复

杂决策变量的 CCP 问题的重要性日益明显，这主要是因为其在各种现实世界领域的应用，例如信号处理 [3]（参见第 7 节）。值得注意的是，解决这些问题需要利用变量的复数性、随机变量的分布以及依赖于 z 及其共轭 $\bar{z}$ 的关系矩阵的替代方法。这些方法与使用 $\mathbb{CR}$ -微积分（Wirtinger 微积分 [4][5]）将复变量转换为实数的方法有显著不同。后者方法会丢失一些可利用的特性 [6][7]。

处理复变量的另一个关键原因是转换计算的影响。将复变量转化为实数会使得问题的维度加倍，可能导致如表 1 所示的计算时间增加、收敛速度变慢、维度灾难相关的问题 [8] 以及算法精度降低，正如 [9] 中所示。作者证明，在复数域中求解优化问题比将问题转换到实数域更准确，特别是在应用于量子计算问题时。

表 1. 使用梯度下降 (GD) 和 SPSA[9] 最小化 $\|\sqrt{A} z\|$ 的平均目标值和计算时间，迭代次数为 50,000 次，维度为 10D 和 20D 的复数和实数空间。复数算法 (GD_C , $SPSA_C$) 实现了与实数空间转换 (GD_R , $SPSA_R$) 相当的精度，同时显著减少了计算时间。

size	GD_C	GD_R	GD_C	GD_R	$SPSA_C$	$SPSA_R$	GD_C	GD_R
	obj	obj	time	time	obj	obj	time	time
10	0.0	0.1	20.3	40.1	0.7	0.5	33.7	63.1
20	0.1	0.1	49.3	180.6	1.6	1.4	76.8	275.9

我们的工作动机源于解决量子优化中的挑战，其中混合经典-量子优化技术已成为一种强大的方法，用于解决当今嘈杂的中间规模量子 (NISQ) 计算机上的问题。这些方法通过在经典计算机上运行优化算法来结合经典和量子计算的优势，并根据量子处理器得出的目标函数值进行指导。例如，在量子近似优化算法 (QAOA) [10] 中，预期成本哈密顿矩阵被优化以确定变分参数。将该问题转换为其实数对应形式会导致其物理意义的丧失、幺正算子关键特性的退化以及不必要的问题维度增加。量子系统中的不确定性，如时变噪声 [11]、非均匀量子系综和哈密顿量的不确定性 [12][13]，需要能够处理不可预测动态并保持控制策略质量的优化框架。具有复杂决策变量的 CCP 提供了一种有效的方法来建模和管理这些不确定性，确保在量子优化中获得高质量和可靠的结果。

重新表述技术对于通过将机会约束转化为更易于分析和求解的形式来管理优化中的机会约束至关重要。对于单个线性机会约束，在一定条件下可以将其等效地重新表述为二阶锥规划 (SOCP) [14][15]。对于具有连续随机变量的线性联合机会约束，[16] 中使用 copula 理论提供了一个完整的证明以将问题转化为确定性问题。然后，提出了各种凸近似方法，例如 [17]，Cheng 和 Lisser 利用泰勒级数和分段方法推导出了上下界。

本文介绍了一种处理涉及不确定性的复数变量优化问题的新方法，称为复机会约束规划 (CCCP)。据我们所知，具有复随机变量的 CCP 的一般形式此前尚未被制定或解决。我们的工作重点是线性情况，其中目标和约束都是线性的，并且随机变量遵循复正态分布。我们解决了两类关键问题：第一类是个体 CCCP，我们将随机问题通过利用均值和方差的特性转化为等效的 SOCP。第二类是具有相关矩阵行的联合 CCCP。为此，我们使用 copulas 来处理随机向量之间的依赖关系，将联合 CCCP 转换为确定性问题。由于得到的问题是双凸性的，我们通过泰勒级数近似导出下界，并利用分段方法导出上界来进行逼近求解。结果已经扩展到涵盖决策变量的非线性情况，同时在随机变量方面保持线性。为了展示其实际应用价值，我们将这些发现应用于一个鲁棒波束成形问题，特别解决具有不匹配情况下的 MDVR（最小方差无失真响应）案例。

论文组织如下：第 2 节介绍了预备知识和问题表述。第 3 节介绍了 CCCP 问题。第 4 节讨论了复仿射函数的正态分布。第 5 节介绍了个体-CCCP。第 6 节深入探讨了联合-CCCP，详细说明了该问题并提供了上下界逼近。第 7 节展示了来自信号处理的应用（MVDR 与不匹配），并通过仿真实验比较了我们的方法与文献中的方法，并且还对比了个别和联合 CCCP。最后，第 8 节总结了一切。

2 预备知识

复向量集表示为 $\mathbb{C}^n$ 。复数可以写成 $z = (x, y) = x + iy$ ，其中 $x = \Re(z)$ 是 z 的实部， $y = \Im(z)$ 是 z [18] 的虚部。 z 的复共轭定义为 $\bar{z} = (x, -y) = x - iy$ 。 z 的转置和复共轭转置分别表示为 z^T 和 z^H 。 z 的欧几里得范数等于 $\|z\| = \sqrt{zz^H} = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。对于一个复随机向量 $z \in \mathbb{C}^n$ [19]，设 μ_z, Γ_z 和 C_z 分别是均值、协方差矩阵和相关矩阵，则复正态分布由 $z \sim \mathcal{N}_c(\mu_z, \Gamma_z, C_z)$ 给出。

Definition 1. 随机向量 z 的均值、协方差和关系矩阵由以下给出：

$$\mu_z = \mathbb{E}[z] = \mathbb{E}[x] + i\mathbb{E}[y] \quad (1)$$

$$\text{Cov}(z, z) = \Gamma_z = \Gamma_x + \Gamma_y + i(\Gamma_{yx} - \Gamma_{xy}) \quad (2)$$

$$\text{Cov}(z, \bar{z}) = C_z = \Gamma_x - \Gamma_y + i(\Gamma_{yx} + \Gamma_{xy}) \quad (3)$$

属性：

1. 协方差矩阵是厄米特矩阵，关系矩阵是对称的。
2. $\text{Cov}(z, w) = \overline{\text{Cov}(w, z)}$.
3. $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \text{Cov}(\alpha z, w) = \alpha \text{Cov}(z, w)$ 并且 $\text{Cov}(z, \alpha w) = \bar{\alpha} \text{Cov}(z, w)$ 。
4. $\text{Cov}(\sum_i z_i, \sum_j w_j) = \sum_{i,j} \text{Cov}(z_i, w_j)$.
5. 协方差矩阵 Γ_z 是半正定的： $a^H \Gamma_z a \geq 0, \forall a \in \mathbb{C}^n$.
6. 如果 $z \sim \mathcal{N}_c(\mu_z, \Gamma_z, C_z)$ 是随机变量，并且如果 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 和 $b \in \mathbb{C}^n$ ，则 $Az + b \sim \mathcal{N}_c(A\mu_z + b, A\Gamma_z A^H, AC_z A^T)$.

3 复杂机会约束问题 (CCCCP)

复杂数量约束问题如下所示：

$$\begin{aligned} (\text{CCCCP}) \quad & \min f(z, \xi) \\ & s.t. \quad g(z, \xi) = 0 \\ & \mathbb{P}[h(z, \xi) \leq 0] \geq p, \end{aligned}$$

其中 $f : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{R}$, $g : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^k$ 和 $h : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ 。确定性决策变量由复数向量 $z \in \mathbb{C}^n$ 给出，而 ξ 是包含所有以复随机变量形式出现的不确定性的复随机向量。我们两类，第一类是独立 CCCC，要求每个约束以一定的概率独立满足，然后 $p = [p_1, \dots, p_m], p_i \in [0, 1]; \forall i$ 是概率向量。另一类是联合 CCCC，要求集合中的所有不等式约束以一定的联合概率同时满足，然后 $p \in [0, 1]$ 。在本文中，我们假设可行集非空且 $p \geq 0.5$ 。

4 复仿射函数的正态分布

在本节中，我们介绍了两个在这篇论文中起关键作用的引理。我们讨论了由 $\Re(c^H z)$ 和 $\Re(Az - b)$ 给出的复随机变量仿射函数实部的分布。

Lemma 1. 如果 $c_j; j = 1, \dots, n$ 是随机变量且具有 $c_j \sim \mathcal{N}_c(\mu_{c_j}, \Gamma_{c_j}, C_{c_j})$, 如果 c_j 的实部和虚部是独立的, 那么 $\Re(c^H z)$ 具有

$$\Re(c^H z) \sim \mathcal{N}\left(\Re(\mu_c^H z), \frac{1}{2}(\Re(z^H \Gamma_c z + z^H C_c \bar{z}))\right) \quad (4)$$

的真实正态分布。此外, 方差是一个二次函数。

证明. 使用定义 (1) 来求均值和协方差矩阵, F 的均值由以下给出:

$$\mathbb{E}[\Re(c^H z)] = \Re(\mu_c^H z) \quad (5)$$

利用性质 (4), 方差由以下给出:

$$\text{Var}\left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \bar{c}_j z_j + \bar{z}_j c_j\right) = \frac{1}{4} (\text{Var}(\sum_{j=1}^n \bar{c}_j z_j) + \text{Var}(\sum_{j=1}^n \bar{z}_j c_j)) \quad (6)$$

$$+ \text{Cov}(\sum_{j=1}^n \bar{c}_j z_j, \sum_{j=1}^n \bar{z}_j c_j) + \text{Cov}(\sum_{j=1}^n \bar{z}_j c_j, \sum_{j=1}^n \bar{c}_j z_j) \quad (7)$$

通过对方差性质的应用分解该项, 并使用定义 (1), 方差将等于:

$$\frac{1}{2} \Re(z^H \Gamma_c z + z^T C_c z) = x^T \Gamma_{c^r} x + x^T (\Gamma_{c^r c^i} + \Gamma_{c^i c^r}) y + y^T \Gamma_{c^i} y \quad (8)$$

为了保证方差的半正定性, $\Gamma_{c^r c^i}$ 必须为零。

Lemma 2. 令 $a_{ij} \sim \mathcal{N}_c(\mu_{a_{ij}}, \Gamma_{a_{ij}}, C_{a_{ij}})$ $j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, m$ 和 $b_i \sim \mathcal{N}_c(\mu_{b_i}, \Gamma_{b_i}, C_{b_i})$, $i = 1, \dots, m$, 如果 $A_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ 的实部和虚部是独立的, 则 $\Re(A_i z - b_i)$ 是实正态分布, 具有

$$\Re(A_i z - b_i) \sim \mathcal{N}\left(\Re(\mu_{A_i} z) - \mu_{b_i}, \frac{1}{2} \Re(z^H \Gamma_{A_i} z + z^T C_{A_i} z) + \sigma_{b_i}\right), \quad i = 1, \dots, m \quad (9)$$

此外, $\Re(A_i z - b_i)$ 的协方差矩阵是一个二次函数。

证明. 类似于引理 (1) 的证明。

从此点开始, 我们假设 c 的实部和虚部是独立的, $A_i, i = 1, \dots, m$ 的实部和虚部是独立的, 并且 $b_i, A_i \forall i$ 是独立的, 我们考虑线性 CCCP。

5 个体-CCCP

设 c_j, a_{ij} 和 b_i 是具有已知概率分布的复随机变量, 则:

$$\begin{aligned}
 (P1) \quad & \min \sum_{j=1}^n \Re(\bar{c}_j z_j) \\
 \text{s.t.} \quad & \mathbb{P} \left[\sum_{j=1}^n \Re(a_{ij} z_j - b_i) \leq 0 \right] \geq p_i, \quad \forall i \\
 & \Re(z) \geq 0, \quad \Im(z) \geq 0
 \end{aligned}$$

5.1 个体 CCCP 作为 SOCP

本节旨在将随机问题 (P1) 转化为一个确定性问题, 这是一个复杂的二阶问题。使用引理 (1), 新的确定性目标函数最小化可以表示如下:

$$q_1 \Re(\mu_c^H z) + q_2 \sqrt{\frac{1}{2}(z^H \Gamma_c z + \Re(z^H C_c \bar{z}))} \quad (10)$$

其中 q_1 和 q_2 是均值和方差的非负权重。设

$$h_i = \sum_{j=1}^n \Re(\bar{a}_{ij} z_j) - b_i = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2}(a_{ij} z_j + \bar{a}_{ij} \bar{z}_j) - b_i, \quad \forall i \quad (11)$$

因此问题的约束是:

$$\mathbb{P} \left[(h_i - \mu_{h_i}) \text{Cov}(h_i)^{-\frac{1}{2}} \leq -\mu_{h_i} \text{Cov}(h_i)^{-\frac{1}{2}} \right] \geq p_i, \quad \forall i \quad (12)$$

设 $\Phi(x)$ 表示标准正态分布的累积分布函数在 x 处的值。约束条件表示为:

$$\Phi \left(-\mu_{h_i} \text{Cov}(h_i)^{-\frac{1}{2}} \right) \geq p_i \iff \mu_{h_i} + \Phi^{-1}(p_i) \sqrt{\text{Cov}(h_i)} \leq 0 \quad (13)$$

然后, 问题 10 的确定性等价可以写成:

$$\begin{aligned}
 (P2) \quad & \min \quad q_1 \Re(\mu_c^H z) + q_2 \sqrt{\frac{1}{2} \Re(z^H \Gamma_c z + z^H C_c \bar{z})} \\
 \text{s.t.} \quad & \Re(\mu_{A_i} z) - \mu_{b_i} + \Phi^{-1}(p_i) \sqrt{\frac{1}{2} \Re(z^H \Gamma_{A_i} z + z^T C_{A_i} z)} + \sigma_{b_i} \leq 0, \quad \forall i \\
 & \Re(z) \geq 0, \quad \Im(z) \geq 0
 \end{aligned}$$

Theorem 1. 问题 (P2) 是一个凸优化问题, 进一步说, 它是一个二阶锥问题。

证明. 令 $s = [\Re(z) \ \Im(z) \ 1]^T$, $K_0 = [\Re(\mu_c) \ \Im(\mu_c) \ 0]^T$, $K_1 = \begin{bmatrix} \Gamma_{\Re(c)} & O^{n \times n} & O^{n \times 1} \\ O^{n \times n} & \Gamma_{\Im(c)} & O^{n \times 1} \\ O^{1 \times n} & O^{1 \times n} & 0 \end{bmatrix}$

$K_{2_i} = \begin{bmatrix} \Gamma_{\Re(A_i)} & O^{n \times n} & O^{n \times 1} \\ O^{n \times n} & \Gamma_{\Im(A_i)} & O^{n \times 1} \\ O^{1 \times n} & O^{1 \times n} & \sigma_{b_i} \end{bmatrix}$, $K_{3_i} = [-\Re(\mu_{A_i}) \ -\Im(\mu_{A_i}) \ \mu_{b_i}]^T$.

使用引理 (2), 随机线性规划问题可以表示为等价的确定性非线性规划问题:

$$\begin{aligned}
 (\text{P3}) \quad & \min q_1 s^T K_0 + q_2 \|\sqrt{K_1}^T s\| \\
 \text{s.t.} \quad & \Phi^{-1}(p_i) \|\sqrt{K_{2_i}}^T s\| \leq s^T K_{3_i}, \quad \forall i \\
 & s \geq 0
 \end{aligned}$$

如果 K_1 和 K_{2_i} 是半正定矩阵, 则 (P2) 给出 SOCP。

6 联合-CCCP

线性 CCCP 使用 copulas 理论来表示行依赖。

$$\begin{aligned}
 (\text{P4}) \quad & \min \sum_{j=1}^n \Re(\bar{c}_j z_j) \\
 \text{s.t.} \quad & \mathbb{P}[\Re(Az - b) \leq 0] \geq p, \\
 & \Re(z) \geq 0, \quad \Im(z) \geq 0
 \end{aligned}$$

其中 c, A , 和 b 是复正态分布。

Theorem 2. 问题 (P4) 等价于以下双凸型问题:

$$\begin{aligned}
 (\text{P5}) \quad & \min q_1 \Re(\mu_c^H z) + q_2 \sqrt{\frac{1}{2} \Re(z^H \Gamma_c z + z^H C_c \bar{z})} \\
 \text{s.t.} \quad & \Re(\mu_{A_i} z) - \mu_{b_i} + \Phi^{-1}(p^{y_i^{\frac{1}{\phi}}}) \sqrt{\frac{1}{2} \Re(z^H \Gamma_{A_i} z + z^T C_{A_i} z) + \sigma_{b_i}} \leq 0, \quad \forall i \\
 & \sum_{i=1}^m y_i = 1, \quad \Re(z) \geq 0, \quad \Im(z) \geq 0, \quad y \geq 0
 \end{aligned}$$

证明. 证明已在 [16] 中完成。

6.1 问题 (P5) 的下近似和上近似

为了找到 (P5) 的 SOCP 近似, 我们通过推导上界和一个可行的下界来近似分位数函数。

(P5) 的下界近似 为了制定具有下界解的确定性问题 (P5), 我们使用围绕切点 N, r_l , $l = 1, \dots, N, r_l \in (0, 1]$ 的泰勒级数展开来近似分位数函数 $\Phi_l = \Phi^{-1}(p^{y_l^{1/\theta}})$, 其中使用了 $r_1 < r_2 < \dots < r_N$ 。逼近函数由以下给出:
 $\hat{\Phi}_{1l} = \Phi^{-1}(p^{r_l^{1/\theta}}) + \Phi^{-1'}(p^{r_l^{1/\theta}}) p^{r_l^{1/\theta}} \ln(p) r_l^{1/\theta-1} \frac{1}{\theta} (y - r_l) = a_{1l} + b_{1l} y$,
 其中 $b_{1l} = \Phi^{-1'}(p^{r_l^{1/\theta}}) p^{r_l^{1/\theta}} \ln(p) r_l^{1/\theta-1} \frac{1}{\theta}$ 和 $a_{1l} = \Phi^{-1}(p^{r_l^{1/\theta}}) - b_{1l} r_l$ 。
 $\hat{\Phi}_1 = \max_{l=1, \dots, N} \hat{\Phi}_{1l}$ 是下逼近函数。

Theorem 3. 令 $\hat{r}_i = (\hat{r}_{i1}, \dots, \hat{r}_{in})$ 。结合 $\Phi^{-1}(p^{y_i^{1/\theta}})$ 的近似, 我们得到问题 (P5) 如下的近似:

$$\begin{aligned}
 (P6) \quad & \min \quad q_1 \Re(\mu_c^H z) + q_2 \sqrt{\frac{1}{2} \Re(z^H \Gamma_c z + z^H C_c \bar{z})} \\
 & s.t. \quad \Re(\mu_{A_i} z) + \sqrt{\frac{1}{2} \Re(r_i^H \Gamma_{A_i} r_i + r_i^T C_{A_i} r_i) + \sigma_{b_i} - \mu_{b_i}} \leq 0, \forall i \\
 & \quad \Re(r_{ij}) \geq \Re(a_{1l} z_j + b_{1l} m_{ij}), \quad \forall i, j, l \\
 & \quad \Im(r_{ij}) \geq \Im(a_{1l} z_j + b_{1l} m_{ij}), \quad \forall i, j, l \\
 & \quad \sum_{i=1}^m m_{ij} = z_j, \forall j, \quad \Re(z) \geq 0, \quad \Im(z) \geq 0, \quad m \geq 0
 \end{aligned}$$

此外, 此近似的最优值是 (P5) 的下界。

证明. 首先, 我们知道分位数函数 $\Phi^{-1}(p^{y^{1/\theta}})$ 对于所有 $p \geq 0.5$ 都是凸的。因此, 对于任意切点 r_l , $l = 1, \dots, N$,

$$\Phi^{-1}(p^{y^{1/\theta}}) \geq \hat{\Phi}_1 = \max_{l=1}^N \{\hat{\Phi}_{1l}\}. \quad (14)$$

由于 $\sqrt{\frac{1}{2} \Re(z^H \Gamma_{A_i} z + z^T C_{A_i} z) + \sigma_{b_i}} \geq 0$, 则 $\forall i$ 我们有:

$$\left\{ z : \Re(\mu_{A_i} z) + \Phi^{-1}(p^{y_i^{1/\theta}}) \sqrt{\frac{1}{2} \Re(z^H \Gamma_{A_i} z + z^T C_{A_i} z) + \sigma_{b_i}} \leq \mu_{b_i} \right\} \quad (15)$$

$$\subset \left\{ z : \Re(\mu_{A_i} z) + \hat{\Phi}_1 \sqrt{\frac{1}{2} \Re(z^H \Gamma_{A_i} z + z^T C_{A_i} z) + \sigma_{b_i}} \leq \mu_{b_i} \right\}. \quad (16)$$

上界 - 分段线性逼近 为了构造问题 (P5) 的一个上逼近解, 我们从区间 $(0, 1]$ 中选择 N 个插值点 $r_l, l = 1, \dots, N$, 并且有 $r_1 < r_2 < \dots < r_N$, 用 Φ_l 表示 $\Phi^{-1}(p^{r_l^{1/\theta}})$ 。令 $\hat{\Phi}_{2l}$ 为对应的分段线性近似函数 $\Phi^{-1}(p^{y^{1/\theta}})$ 。我们有:

$$\hat{\Phi}_{2l} = \Phi_l + \frac{y - r_l}{r_{l+1} - r_l}(\Phi_{l+1} - \Phi_l) = a_{2l} + b_{2l}y \quad (17)$$

其中 $a_{2l} = \frac{r_{l+1}\Phi_l - r_l\Phi_{l+1}}{r_{l+1} - r_l}$ 和 $b_{2l} = \frac{\Phi_{l+1} - \Phi_l}{r_{l+1} - r_l}$ 。定义 $\hat{\Phi}_2 = \max_{l=1, \dots, N} \hat{\Phi}_{2l}$ 为上界逼近函数。

Theorem 4. 令 $\hat{r}_i = (\hat{r}_{i1}, \dots, \hat{r}_{i,n})$ 。结合 $\Phi^{-1}(p^{y_i^{1/\theta}})$ 的近似, 我们得到问题 (P5) 的如下近似:

$$\begin{aligned} (P7) \quad & \min \quad q_1 \Re(\mu_c^H z) + q_2 \sqrt{\frac{1}{2} \Re(z^H \Gamma_c z + z^H C_c \bar{z})} \\ & s.t. \quad \Re(\mu_{A_i} z) + \sqrt{\frac{1}{2} \Re(r_i^H \Gamma_{A_i} r_i + r_i^T C_{A_i} r_i) + \sigma_{b_i}} - \mu_{b_i} \leq 0, \forall i \\ & \quad \Re(r_{ij}) \geq \Re(a_{2l} z_j + b_{2l} m_{ij}), \quad \forall i, j, l \\ & \quad \Im(r_{ij}) \geq \Im(a_{2l} z_j + b_{2l} m_{ij}), \quad \forall i, j, l \\ & \quad \sum_{i=1}^m m_{ij} = z_j, \forall j, \quad \Re(z) \geq 0, \quad \Im(z) \geq 0, \quad m \geq 0 \end{aligned}$$

此外, 如果 $p \sum y_i^{* \frac{1}{\theta}} \leq \Phi \left(\frac{-\mu_{A_i} z - b_i}{\sigma_{A_i} z - b_i} \right)$, 那么这个近似的最优值是 (P6) 的一个上界。

证明. 同证明定理 3。

7 模拟实验

实现是在 Python 环境中完成的, 我们的优化问题使用 CVXPY 解决。

自适应波束成形中的失配问题 我们的形式化已经应用于自适应波束成形, 采用 MVDR[20]。假设我们有多传感器 N , 窄带波束形成器的输出信号是 $y(t) = w^H x(t)$, 其中 t 是样本索引, $w \in \mathbb{C}^M$ 波束成形加权系数, 而 $x(t) = S(t) + v(t)$ 是阵列观测快照向量。其中, $S(t) = s(t)a_s$ 和 $v(t)$ 分别是

$x(t)$ 的期望信号和干扰加噪声分量, $s(t)$ 和 a_s 是期望信号波形及其导向矢量 (空间特征)。最优权向量可以通过计算 SINR 函数的最大值获得:

$$\text{SINR} = \frac{w^H R_s w}{w^H R_{i+n} w} \quad (18)$$

R_s, R_{i+n} 是信号的协方差和干扰及噪声的协方差。因此, 最大化 (18) 等价于 [21]:

$$\min w^H R_{i+n} w \quad \text{s.t.} \quad w^H a_s = 1 \quad (19)$$

其中最优解为 $w^* = R_{i+n}^{-1} a / a^H R_{i+n}^{-1} a$ 且 SINR 为 $= \sigma_s^2 a^H R_{i+n}^{-1} a$ 。在实践中, 导向矢量的估计存在误差。所开发的波束形成器 [22] 的关键思想是明确将导向矢量不确定性建模为 $\tilde{a}_s = \delta + a_s \neq a_s$, 其中 $\tilde{a}_s$ 和 a_s 分别是实际和假设的信号导向矢量。在 [23] 中, Vorobyov 等人重新将问题公式化为一个概率约束问题, 并将其转换为确定性问题。在这项工作中, 我们使用我们的形式主义解决了这个概率约束问题以优化 w 。CCCP 问题如下:

$$\min w^H R_{i+n} w \quad (20)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbb{P}[-\Re(\delta^H w) \leq \Re(a^H w) - 1] \geq p, \quad \Re(a^H w) \geq 0, \quad \Im(a^H w) = 0 \quad (21)$$

其中 δ 是圆周独立同分布的零均值复高斯随机变量。使用引理 (1) 和定理 (7.1), 我们得到以下等效的确定性问题:

$$\min w^H R_{i+n} w \quad (22)$$

$$\text{s.t.} \quad \Phi^{-1}(p) \|C_\delta^{1/2} w\| / 2 \leq \Re(a^H w) - 1, \quad \Re(a^H w) \geq 0, \quad \Im(a^H w) = 0 \quad (23)$$

仿真参数配置如 [23], 传感器数量为 $M = 8$, 样本数量为 $K = 100$, 阵列

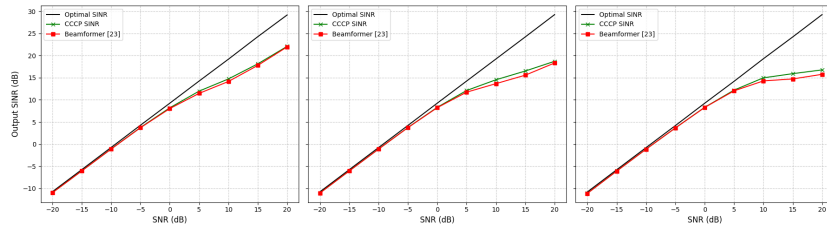


图 1. SINR 与 SNR 的对比关系 (左图 INR=5, 中图 INR=20, 右图 INR=40)。

元素之间的间距为 $d = 0.5$ 波长, 概率为 $p = 0.95$ 。期望信号的到达方向

(DOA) 是 $\theta_s = 3^\circ$ 。两个干扰信号的 DOA 分别为 30° 和 50° 。扰动方差设置为 $\sigma_\delta^2 = 0.3M$ ，协方差为 $Cov_\delta = \sigma_\delta^2 / MI_M$ 。噪声功率是 $\sigma_n^2 = 1$ ，进行 200 次仿真运行。

图 1 展示了我们的方法和在 [23] 中提出的方法的输出 SINR 作为信噪比 (SNR) 的函数。结果显示，我们的方法显著优于测试过的波束形成器在 [23] 中的表现。此外，我们的方法解决了任意复高斯分布的问题，并且实部和虚部之间是独立的。相比之下，先前的研究假设导向矢量中的不确定性遵循零均值独立同分布的高斯分布。另外，我们的方法适用于多种接收信号场景。

个体与联合 CCCP 的比较 另一个约束已被施加到问题上 (20, 21)，其为 $\Re(\delta_i^H w) + \Re(a_i^H w) \leq \alpha$ ，参数与之前相同，以抑制可能来自强源的干扰信号。该问题被作为联合和单独的 CCCP 来解决以便进行比较，正如预期并在图 2 中所示，联合 CCCP 的表现优于单独的 CCCP，在后者中，你可能会从风险区域采样。

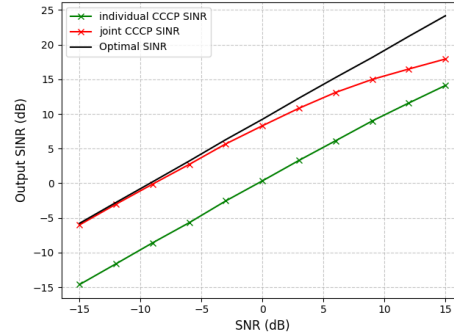


图 2. 输出 SINR 当 INR = 20, 100 次运行和 $\alpha = 0.7$ 。问题作为单独的 CCCP 和联合 CCCP 解决。

8 结论

本文提出了一种通过复数机会约束优化编程 (CCCP) 来优化涉及复杂变量的真实世界应用的新方法。我们的重点是处理具有特定置信水平的约束条件下的随机实验。我们解决了一个特殊的复数优化问题，即遵循复高斯分布的复数随机变量的线性规划。我们将问题重新公式化为确定性问题，

从而将单个 CCCP 转化为一个确定性的 SOCP。对于联合 CCCP，我们使用泰勒级数和分段切线近似，制定了一个涉及两个固有凸函数乘积的确定性问题。所获得的最佳值作为原始问题上下界之间的紧密差距。实验表明，联合 CCCP 优于单个 CCCP，在许多应用中提供了更高的准确性和速度。

参考文献

1. G. Dantzig, R. Fulkerson, and S. Johnson, "Solution of a large-scale traveling-salesman problem," *Journal of the Operations Research Society of America*, vol. 2, 1954, pp. 393–410.
2. A. Charnes and W. W. Cooper, "Chance-constrained programming," *Management Science*, 1959.
3. S. Ma and D. Sun, "Chance constrained robust beamforming in cognitive radio networks," *IEEE Communications Letters*, vol. 17, 2012, pp. 67–70.
4. W. Wirtinger, "Zur formalen Theorie der Funktionen von mehr komplexen Veränderlichen," *Mathematische Annalen*, vol. 97, 1927, pp. 357–375.
5. R. Remmert, *Theory of Complex Functions*, vol. 122, Springer, 1991.
6. N. R. Goodman, "Statistical analysis based on a certain multivariate complex Gaussian distribution (an introduction)," *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 34, 1963, pp. 152–177.
7. B. Picinbono, "Second-order complex random vectors and normal distributions," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 44, 1996, pp. 2637–2640.
8. R. Bellman, "Dynamic programming," *Science*, vol. 153, 1966, pp. 34–37.
9. J. Gidi, B. Candia, A. D. Muñoz-Moller, A. Rojas, L. Pereira, M. Muñoz, L. Zambrano, and A. Delgado, "Stochastic optimization algorithms for quantum applications," *Physical Review A*, vol. 108, 2023, p. 032409.
10. E. Farhi, J. Goldstone, and S. Gutmann, "A quantum approximate optimization algorithm," *arXiv preprint arXiv:1411.4028*, 2014.
11. E. Knill, "Quantum computing with realistically noisy devices," *Nature*, vol. 434, 2005, pp. 39–44.
12. K. C. Young, R. Blume-Kohout, and D. A. Lidar, "Adiabatic quantum optimization with the wrong Hamiltonian," *Physical Review A – Atomic, Molecular, and Optical Physics*, vol. 88, 2013, p. 062314.
13. X. Fei, L. T. Brady, J. Larson, S. Leyffer, and S. Shen, "Binary quantum control optimization with uncertain Hamiltonians," *INFORMS Journal on Computing*, 2024.

14. A. Prékopa, *Stochastic Programming*, vol. 324, Springer, 2013.
15. R. Henrion and C. Strugarek, “Convexity of chance constraints with independent random variables,” *Computational Optimization and Applications*, vol. 41, 2008, pp. 263–276.
16. J. Cheng, M. Houda, and A. Lisser, “Chance constrained 0 – 1 quadratic programs using copulas,” *Optimization Letters*, 2015.
17. J. Cheng and A. Lisser, “A second-order cone programming approach for linear programs with joint probabilistic constraints,” *Operations Research Letters*, 2012.
18. L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1979.
19. R. A. Wooding, “The multivariate distribution of complex normal variables,” *Biometrika*, vol. 43, 1956, pp. 212–215.
20. H. Cox, R. Zeskind, and M. Owen, “Robust adaptive beamforming,” *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 35, 1987, pp. 1365–1376.
21. S. J. Kim, A. Magnani, A. Mutapcic, S. P. Boyd, and Z. Q. Luo, “Robust beamforming via worst-case SINR maximization,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, 2008, pp. 1539–1547.
22. S. Vorobyov, A. Gershman, and Z. Q. Luo, “Robust adaptive beamforming using worst-case performance optimization: A solution to the signal mismatch problem,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 51, 2003, pp. 313–324.
23. S. A. Vorobyov, H. Chen, and A. B. Gershman, “On the relationship between robust minimum variance beamformers with probabilistic and worst-case distortionless response constraints,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, 2008, pp. 5719–5724.