

稳定不可约非定向结面

TYE LIDMAN AND LISA PICCIRILLO

摘要. 我们给出四维球面中结曲面可约性的初等障碍。作为一种新应用，我们构造了稳定不可约的非定向曲面。

在四维 knot 理论中，人们研究闭合的（不一定可定向的）曲面到四球面中的嵌入。与经典情况类似，存在标准的未打结的嵌入¹一些结曲面可以分解为一个结曲面与一个（非球形的）不结曲面的连通和；具有这种分解的曲面被称为可约的。文献中有很多产生不可约结曲面的方法，参见例如 [BMS82, Gor81, Lit81, Liv85, Mae77, Yos98]。然而，对于 RP^2 ，这是最简单的非显然不可约表面，尚未找到不可约的例子。

猜想 1 (木ノ下猜想，见 [KS98] 注记 3.7). 任何嵌入的实射影平面在 S^4 中都与一个不打结的射影平面和一个打结的 2-球面的连通和同胚。

我们无法证伪 Kinoshita 猜想，但我们通过研究分支双覆盖的基本群的群同调贡献了一种新的初等证明不可约性的方法。我们受到了 Kervaire [Ker69, p.1] 的一个观察的启发，但请注意，之前的某些不可约性证明也以其他方式利用了群同调。我们的方法实际上建立了一个更强的不可约概念；如果不存在表面 S' ，使得有 $\chi(S') > \chi(S)$ 和未结面 U, U' ，且 $S \# U$ 和 $S' \# U'$ 等价，则称表面 S 为稳定不可约。稳定不可约蕴含不可约，一般读者可以安全忽略“稳定”这个词的出现。利文斯顿构造了任意亏格 [Liv85] 的可定向稳定不可约曲面的例子，但构造非可定向的稳定不可约曲面似乎仍然没有解决。

定理 1. 如果 S 是在 B^4 中带有 $\chi(S) = 2 - 2k < 2$ 和 $rk(H_2(\pi_1(\Sigma_2(S)))) = k$ 的带状曲面的两倍，则 S 是稳定不可约的。

这里 $\Sigma_2(S)$ 指的是分支双覆盖。将使用带状假设来证明该分支双覆盖包含许多同调本质的平方零球面。利用该定理，我们可以很容易地构造稳定不可约曲面。

推论 1. 对于任何 $k > 0$ ，存在闭合连通曲面 S 在 S^4 中具有 $\chi(S) = 2 - 2k$ 并且是稳定不可约的。这些曲面 S 可以取定向或非定向。

我们的示例具有（正常）欧拉数 0。Maggie Miller 指出，找到稳定不可约的 ± 4 克莱因瓶将是有趣的。

本文组织如下。我们首先在假设该定理成立的情况下给出所需稳定不可约曲面的构造。然后，我们证明该定理的一个较弱版本以说明障碍的概念。接着我们证明该定理。最后，我们给出另一种

¹对于每一个闭合的不可定向曲面 Σ 和可以作为 Σ 在 S^4 中的嵌入法向欧拉数的整数 e ，都存在一个与该曲面类型和法向欧拉数相匹配的平凡结 $U_{\Sigma, e}$ 。

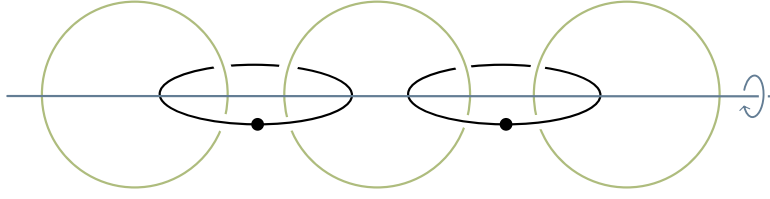


图 1. 一个表示四维流形 X' 带有 $H_2(X') = \mathbb{Z}$ 的柄图可以通过沿着绿色曲线的电缆附加 2-柄来获得, 该四维流形允许对合并且基本群为 $T(2, 3, 7)$ 。特别地, 从左到右, $(7, 2)$, $(3, 2)$ 和 $(2, 1)$ 电缆适用。任何框架的选择都可行。

简单构建稳定不可约嵌结曲面的方法。为了方便起见, 我们在光滑范畴内工作, 但请注意, 我们的方法也适用于拓扑范畴。

推论的证明. 为了构造满足定理假设的结曲面, 我们将首先选择一个合适的群 G , 我们将其强加为出现作为 $\pi_1(\Sigma_2(S))$ 。我们从情况 $\chi(S) = 0$ 开始。我们选择一个有限呈现的群 G , 其中包含 $b_2(G) = 1$ 并且具有缺陷 -1 的呈现。有许多这样的群组, 例如三角形群

$$T(2, 3, 7) = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^7 = xyz = 1 \rangle$$

具有 $H_2(T(2, 3, 7)) = \mathbb{Z}$ [EW05, p.576]。

为了构建 S , 我们将构建一个闭合的四维流形 X , 带有 $b_2(X) = 2$ 和一个对合 φ , 带有所述的 $X/\varphi = S^4$; 分支集在 X/φ 中将是 S 。通过构造 $\Sigma_2(S) = X$ 。为了构建 X , 我们首先从 0、1 和 2 把手对应于一个缺陷 -1 表示法来构建一个 4-流形 X' , 使得 $\pi_1(X') = G$ 和 $H_2(X') = \mathbb{Z}$, 并且使得 X' 有一个对合 φ , 它通过强逆作用于每个把手。² 见图 1 以示例 $G = T(2, 3, 7)$ 。2-柄框架不影响基本群或对合, 因此我们可以随意选择它们; 特别是, 可以使 X' 的交表形式为偶数或奇数。由于 φ 是每个柄上的强倒置, X' 的手柄下降到分支集的拓扑结构而不是商流形的拓扑结构。由于 X' 没有 3-柄, 分支集将是在 B^4 中的带子曲面。然后通过加倍 X' 得到 X , 并且在 X 上存在一个 (加倍的) 对合, 我们仍然称之为 φ 。所以我们看到 X 是一个结曲面 S 在 S^4 中的双重分支覆盖, 而 S 是一个丝带曲面的双重。如果 X 是自旋的, 则 S 是一个环面, 而 S 是一个克莱因瓶, 如果 X 不是自旋的话。由于克莱因瓶是由双重构造而成, 其正则欧拉数为 0。定理表明 S 是稳定不可约的。为了获得具有负欧拉特征的例子, 请注意 $\#_\ell S$ 仍然是一个带状表面的双重, 并且 $b_2(\pi_1(\Sigma_2(\#_\ell S))) = \ell$ 。再次应用该定理。 $\square$

在证明定理之前, 我们先进行一个适用范围更广的预备命题, 这可能与 Kinoshita 猜想相关。

命题 1. 设 S 是 S^4 中的一个非球面的结曲面。如果 $b_2(\pi_1(\Sigma_2(S))) > 0$, 则 S 不是一个结 2-球面与一个平凡曲面的连通和。

²我们不声称总是可以构建一个容许这种对合的流形体 G , 但在实践中通常很简单。

证明. 假设矛盾存在, $S = N \# U$ 其中 N 是一个扭结的 2-球面, 并且 U 是一个非扭结曲面. 然后, $\Sigma_2(S)$ 是 $\Sigma_2(N)$ 和 $\Sigma_2(U)$ 的连通和, 其中后者是 CP^2 's, $\overline{CP^2}$'s 和 $S^2 \times S^2$'s 的连通和. 这表明 $\pi_1(\Sigma_2(N)) = \pi_1(\Sigma_2(S))$. 回忆一下, 扭结的 2-球面在 S^4 上的分支双覆盖总是有理同调 4-球面, 特别是 $0 = b_2(\Sigma_2(N))$.

由于可以将单元粘贴到指数为 ≥ 3 的 $\Sigma_2(N)$ 上来构建一个用于 $\pi_1(\Sigma_2(N))$ 的 Eilenberg-MacLane 空间, 因此我们有 $b_2(\Sigma_2(N)) \geq b_2(\pi_1(\Sigma_2(N)))$. 我们现在得到了以下矛盾.

$$0 = b_2(\Sigma_2(N)) \geq b_2(\pi_1(\Sigma_2(N))) = b_2(\pi_1(\Sigma_2(S))) > 0. \quad \square$$

定理的证明类似于命题的证明, 但我们需要对 $\pi_2(\Sigma_2(N))$ 在 $H_2(\Sigma_2(N))$ 中的像做一些分析.

定理的证明. 假设 S 是一个欧拉特征数为 $2 - 2k$ 的结曲面, 由在 B^4 中加倍一条带状曲面得到. 那么 $b_2(\Sigma_2(S)) = 2k$. 假设存在一个结曲面 S' , 其具有 $\chi(S') > \chi(S)$ 和未结曲面 U, U' , 使得 $S \# U = S' \# U'$. 通过进一步稳定 U 和 U' (如有需要, 使用一个未打结的 RP^2), 我们可以假设 U 和 U' 都是未打结的 RP^2 s 的和. 令 $\ell = b_2(\Sigma_2(U))$, $\ell_{\pm} = b^{\pm}(\Sigma_2(U))$, 所以 $\ell = \ell_+ + \ell_-$. 定义 ℓ', ℓ'_+ , 和 ℓ'_- 类似地对于 U' . 根据定义, $\ell' > \ell$. 我们将研究限制在 $\pi_2(\Sigma_2(S \# U))$ 的像上的 $H_2(\Sigma_2(S \# U))$ 的交形式 (以及对于 $S' \# U'$ 类似的情况), 并通过获得两种不同分解的不同限制形式得出矛盾. 注意, $\Sigma_2(U)$ 是 CP^2 和 $\overline{CP^2}$ 的连通和, 因此 $\pi_1(\Sigma_2(S \# U)) = \pi_1(\Sigma_2(S))$. 因此, $b_2(\pi_1(\Sigma_2(S \# U))) = k$ 由假设和 $b_2(\Sigma_2(S \# U)) = 2k + \ell$. Hopf 精确序列对于路径连通空间 [Hop42] 应用于 $S \# U$ 给出:

$$\pi_2(\Sigma_2(S \# U)) \rightarrow H_2(\Sigma_2(S \# U)) \rightarrow H_2(\pi_1(\Sigma_2(S \# U))) \rightarrow 0.$$

序列意味着 $\pi_2(\Sigma_2(S \# U))$ 在 $H_2(\Sigma_2(S \# U))$ 中的像是秩 $k + \ell$. 我们可以如下实现 $im(\pi_2(\Sigma_2(S \# U)))$ 的一个全秩子群的几何化. 由于 S 是通过加倍一条带面获得的, 因此存在一个由 $H_2(\Sigma_2(S))$ 表示的秩为 k 的子群, 该子群由两两不相交、平方零嵌入球体组成. 与该 k 子群正交, 来自 $H_2(\Sigma_2(U))$ 的 $im(\pi_2(\Sigma_2(S \# U)))$ 中有一个秩为 ℓ 的子群, 对限制相交形式贡献了一个 $\ell_+[+1] \oplus \ell_-[-1]$ 直和项. 因此, 限制相交形式的非退化部分具有秩 ℓ .

然而, 从 $S' \# U'$ 的角度来看, 来自 $\Sigma_2(U')$ 中球面类的 $im(\pi_2(\Sigma_2(S' \# U')))$ 的一个秩为 ℓ' 的子群对相交形式贡献了一个 $\ell'_+[+1] \oplus \ell'_-[-1]$ 直和项. 这意味着受限相交形式的非退化部分的秩至少为 $\ell' > \ell$, 这是一个矛盾. $\square$

备注 1. 我们还可以证明, 在上述推论的证明中构建的克莱因瓶不能分解为两个 (可能是嵌结的) 射影平面的连通和. 如果存在这样的分解, 则有 $\Sigma_2(S) = P_1 \# P_2$, 其中 P_1 和 P_2 分别是整同调 CP^2 的. 由于 $\sigma(\Sigma_2(S)) = 0$, 不失一般性, $Q_{P_1} = (+1)$ 和 $Q_{P_2} = (-1)$. 然而, $T(2, 3, 7)$ 不分裂为群的自由积³, 因此要么 $\pi_1(P_1) = T(2, 3, 7)$ 要么 $\pi_1(P_2) = 0$ 或反之亦然. 我们考虑前者; 后者的论证类似. 在这种情况下, 由于 P_2 是单连通的, $H_2(P_2)$ 在 π_2 的像中; 特别是, 我们可以在 π_2 的像中找到一个平方 -1 类. 由于 $\Sigma_2(S)$ 是一个双重, 它有一个保定向同胚. 这意味着我们也可以在 π_2 的像

³看到 $T(2, 3, 7)$ 不可能作为群的自由积分解的一种方式如下. 由于 $T(2, 3, 7)$ 是一个双曲反射群, 其凯莱图中去掉一个顶点后的补图是连通的. 然而, 在非平凡群的自由积的凯莱图中去掉一个顶点后的补图是不连通的.

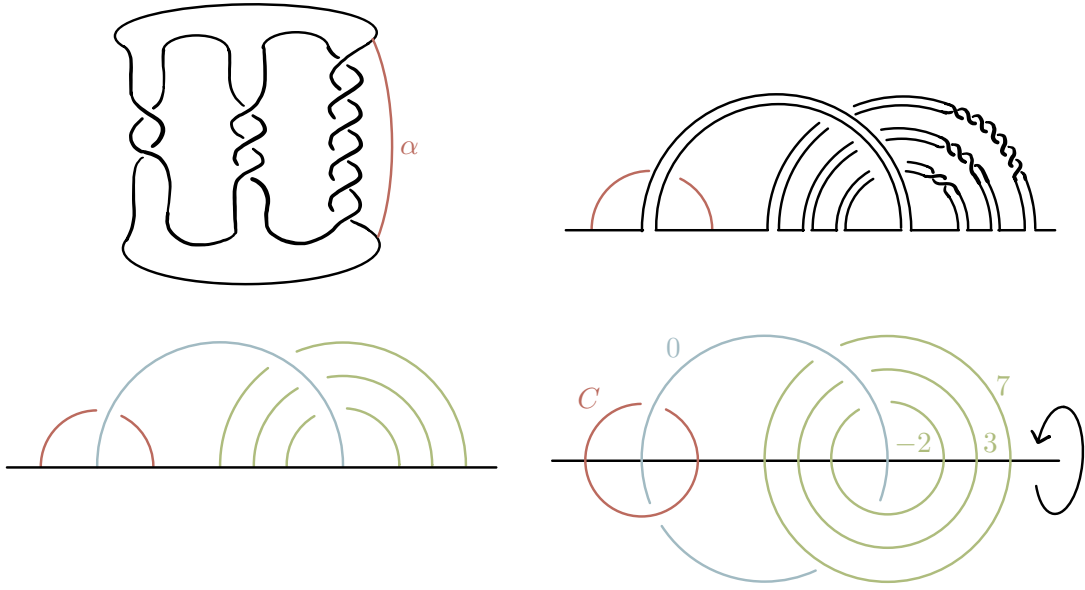


图 2. 左上角, 我们看到弧线 α , 带手术从 $P(-2, 3, 7)$ 到 $P(-2, 3, 7, n)$, 其中 n 是带中的半扭转数。右上角, 我们将 $P(-2, 3, 7) \cup \alpha$ 同胚到一个方便的位置。然后观察到, 通过标记在左下角的蓝色和绿色弧线进行结部分替换, 可以得到 $P(-2, 3, 7)$ 是从水平平凡纽结论得出的。根据 Montesinos 技巧, $\Sigma_2(P(-2, 3, 7))$ 是通过对右下角的蓝色和绿色链环进行手术而得到的水平平凡纽结论的双重覆盖。对这个链接进行手术得到 $S^2(0; 1/2, -1/3, -1/7)$, 我们看到 α 提升为一个正规纤维。关于在分支集和手术描述之间转换的更多细节, 我们发现 [Blo11, Figure 19] 很有帮助。

中找到 $H_2(\Sigma_2(S))$ 中的 $+1$ 类。这表明 $H_2(X)$ 的所有部分都在 π_2 的像中, 这与 Hopf 完美序列相矛盾。我们注意到 Yoshikawa 在 [Yos98] 中的许多不可约克莱因瓶满足相同类型的不可分解性。

我们通过给出满足定理假设的曲面的一种替代构造方法来结束讨论; 特别是它们的分支双覆盖的基本群将是 $T(2, 3, 7)$ 。这种构造更直接地来自于一个带子表面的加倍。

令 D 表示 $P(-2, 3, 7) \# -P(-2, 3, 7)$ 的典型带盘。附加一个带子 B 将 $P(-2, 3, 7)$ 和项转换为任何 Pretzel 结 $P(-2, 3, 7, n)$, 该过程由图 2 左上角框架中的弧线 α 引导。将表面 $D \cup B$ 翻倍以得到一个带结的环面或克莱因瓶 S 。 S 的可定向性由 n 的奇偶性决定。因为 S 是一个翻倍, 它必然具有正常的欧拉数 0。我们现在分析分支双重覆盖及其基本群。

注意 $\Sigma_2(D)$ 是 $(Y - B^3) \times I$, 其中 Y 是 Seifert 纤维空间 $S^2(0; 1/2, -1/3, -1/7)$ 。我们在图 2 中概述了这一证明。在分枝覆盖中, B 提升为一个 2-柄附着。令 C 表示弧 α 的提升。因此, $\pi_1(\Sigma_2(S))$ 可以描述为通过 C 的正规闭包对 $\pi_1(Y)$ 取商的结果。从图 2 可以看出, C 是 Y 的正则纤维。在 Seifert 纤维空间的基本群中杀死一个正则纤维给出了基底轨道空间的轨道基本群 (参见例如 [Sco83, Lemma 3.2]), 在这种情况下是 $T(2, 3, 7)$ 。因此, $\Sigma_2(S)$ 的基本群是 $T(2, 3, 7)$ 。由于 S 是一个带状曲面的两倍, 因此该定理适用。

致谢

TL 部分得到了 NSF 赠款 DMS-2105469 的支持。TL 感激 SLMath, 在 2023 年夏季数学研究项目期间, 该项目在旁边开始进行。同时感谢德克萨斯大学奥斯汀分校数学系的热情接待。LP 部分得到了 Sloan Fellowship、Clay Fellowship 和 Simons 协作项目“低维拓扑的新结构”的支持。我们感谢 Anthony Conway、Jeff Danciger、Cameron Gordon 和 Maggie Miller 的有益讨论。

REFERENCES

- [Blo11] Jonathan M. Bloom. A link surgery spectral sequence in monopole Floer homology. *Adv. Math.*, 226(4):3216–3281, 2011.
- [BMS82] A. M. Brunner, E. J. jun. Mayland, and Jonathan Simon. Knot groups in S^4 with nontrivial homology. *Pac. J. Math.*, 103:315–324, 1982.
- [EW05] Graham Ellis and Gerald Williams. On the cohomology of generalized triangle groups. *Comment. Math. Helv.*, 80(3):571–591, 2005.
- [Gor81] C. McA. Gordon. Homology of groups of surfaces in the 4-sphere. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 89(1):113–117, 1981.
- [Hop42] Heinz Hopf. Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe. *Comment. Math. Helv.*, 14:257–309, 1942.
- [Ker69] Michel A. Kervaire. Smooth homology spheres and their fundamental groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 144:67–72, 1969.
- [KS98] Atsuko Katanaga and Osamu Saeki. Embeddings of quaternion space in S^4 . *J. Aust. Math. Soc., Ser. A*, 65(3):313–325, 1998.
- [Lit81] R. A. Litherland. The second homology of the group of a knotted surface. *Q. J. Math., Oxf. II. Ser.*, 32:425–434, 1981.
- [Liv85] Charles Livingston. Stably irreducible surfaces in S^4 . *Pacific J. Math.*, 116(1):77–84, 1985.
- [Mae77] Toru Maeda. On the groups with Wirtinger presentations. *Math. Sem. Notes Kobe Univ.*, 5(3):347–358, 1977.
- [Sco83] Peter Scott. The geometries of 3-manifolds. *Bull. London Math. Soc.*, 15(5):401–487, 1983.
- [Yos98] Katsuyuki Yoshikawa. The order of a meridian of a knotted Klein bottle. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 126(12):3727–3731, 1998.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, NORTH CAROLINA STATE UNIVERSITY

Email address: `tlid@math.ncsu.edu`

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, THE UNIVERSITY OF TEXAS AT AUSTIN

Email address: `lisa.piccirillo@austin.utexas.edu`