

广义的 Erdős-Rogers 超图问题

Xiaoyu He *

Jiaxi Nie[†]

2025 年 4 月 9 日

摘要

给定 r -一致超图 G 和 F 及一个整数 n , 设 $f_{F,G}(n)$ 是最大的 m , 使得每个 n -顶点 G -free-图都有一个 F -free 诱导子图包含 m 个顶点。我们证明了当 G 是 F 的迭代爆破的子图时, $f_{F,G}(n)$ 在 n 上是多项式的。作为部分逆定理, 我们证明如果 G 不是 F -迭代扩展的子图, 并且是 2-紧密连接的, 则 $f_{F,G}(n)$ 最多为 n 的多对数函数。我们的界限推广了 Dudek 和 Mubayi 在 F 和 G 是完全图的情况下得到的结果。

1 介绍

给定 r -均匀超图 (此后称为 r -图) G 和 F 以及一个整数 $n \geq 1$, 我们令 $f_{F,G}(n)$ 是最大的整数 m , 使得每个 n 顶点的不含 G 的 r -图包含一个不含 F 的诱导子图, 该子图有 m 个顶点。当 $F = K_r^r$ 单边 r -图时, 确定 $f_{K_r^r,G}(n)$ 等同于确定经典的非对角超图拉姆塞数, 这是极值组合学中的中心问题之一。即使是对于图而言, 我们对这些数字的了解仍然相当有限: 对于 K_3 , Ajtai-Komlós-Szemerédi [1] 和 Kim [15] 表明 $f_{K_2,K_3}(n) = \Theta(\sqrt{n} \log n)$; 对于 K_4 , Mattheus 和 Verstraëte [16] 表明 $f_{K_2,K_4}(n) = n^{1/3+o(1)}$ 。我们仍然不知道当 G 是 C_4 或 K_5 时 $f_{K_2,G}(n)$ 的正确指数。

厄多斯和罗杰斯 [10], 通过对角线拉姆齐问题的推广, 开始了对 $f_{K_s,K_t}(n)$ 的研究; 这些问题自那时以来引起了广泛关注, 并被称为厄多斯-罗杰斯问题。关于 $t = s + 1$ 的最新研究成果来自 Dudek-Mubayi [8] 和 Mubayi-Verstraëte [18], 他们确定了边界

$$\Omega(\sqrt{n \log n / \log \log n}) = f_{K_s,K_{s+1}}(n) = O(\sqrt{n \log n}).$$

。对于 $t = s + 2$, Sudakov [19] 和 Janzer-Sudakov [14] 表明。

$$n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{6s-6}} (\log n)^{\Omega(1)} = f_{K_s,K_{s+2}}(n) = O(n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{8s-10}} (\log n)^3).$$

最近, Mubayi-Verstraëte [17] 和 Balogh-Chen-Luo [3], 随后 Gishboliner、Janzer 和 Sudakov [12] 开始了对函数 $f_{F,G}(n)$ 的系统性研究, 其中 F 和 G 是图。他们的结果主要关注当 G 是一个团的情形, 并在 F 满足某些性质 (如无团、二分图、包含一个圈或具有较大的最小度) 时, 为 f_{F,K_r} 建立了界。

在这篇论文中, 我们考虑将这一研究方向自然推广到超图。请注意, 之前的 $f_{F,G}(n)$ 的界都是多项式形式的。我们的第一个结果表明这不是巧合: 我们找到了一个充分条件使得 $f_{F,G}(n)$ 是多项式的, 这个条件被所有成对的图满足。设 H 和 G 为 r -图。对于顶点 v 的 H 和一个正整数 t , 我们令 $H(v,t)$ 为通过向 H 添加 $t-1$ 副的 v 而得到的 r 图。进一步, 我们令 $H(v,F)$ 通过将 $v(F)-1$ 个 v 加到 H 上获得, 这与 v 一起诱导出一个 F 的副本。

定义 1. 令 G 和 F 为 r -图。我们说 G 是一个 F -迭代扩展如果

*School of Mathematics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA 30332. Email: xhe399@gatech.edu.

[†]School of Mathematics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA 30332. Email: jnie47@gatech.edu.

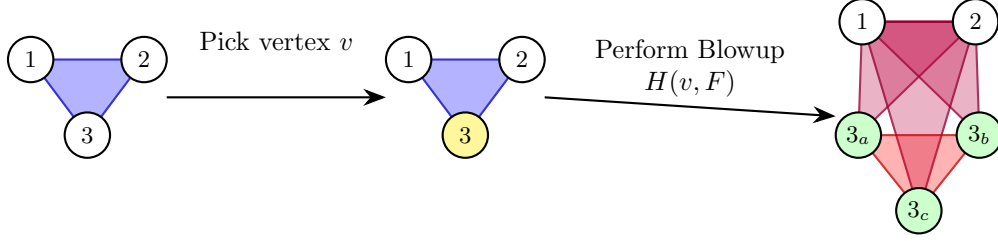


图 1: 迭代吹胀 $H(v, F)$ 当 $H = F = K_3^3$ 。

(1) $G = F$; 或

2 $G = H(v, F)$ 其中 H 是一个 F -迭代的爆破。

当 $G = K_3^3$ 和 F 是一个 K_3^3 -迭代吹胀的子图时, Erdős 和 Hajnal [9] 证明了存在某个常数 c 使得 $f_{K_3^3, F}(n) \geq n^c$ (参见 [6, 11])。我们扩展了这一结果, 表明如果 G 是 F -次迭代膨胀的一个子图, 则 $f_{F, G}(n)$ 具有多项式下界。

定理 1.1 (证明在 Section 2)。令 $r \geq 2$ 和令 G 和 F 为 r -图。如果 G 是一个 F 迭代膨胀的子图, 那么存在一个仅依赖于 F, G 的常数 $c > 0$, 使得对于足够大的 n , 成立。

$$f_{F, G}(n) \geq n^c.$$

定理 1.1 是一个直接推广的超额饱和论证, 这个论证是 Erdős 所熟知的 (参见 [11]), 但我们为了完整性而包含了一个证明。

请注意, 在图的情况下, 从任意非空图 F 开始, 可以获得具有任意大的团数的 F -迭代膨胀。因此, 每个图 G 都是一个 F -迭代膨胀的子图。因此定理 1.1 再现了图中 $f_{F, G}(n)$ 是多项式这一事实。更多有趣的现象出现在超图中, 如 Conlon-Fox-Gunby-He-Mubayi-Suk-Verstraëte-Yu [5] 的近期工作中所示, 他们证明了如果 G 紧密相连且不是三部分的, 则

$$f_{K_3, G}(n) = O((\log n)^{3/2}). \quad (1)$$

我们的第二个结果将 (1) 推广到了 Erdős-Rogers 的设置。我们说一个 r -图 F 是 k -紧密相连, 如果它的边可以按顺序排列为 $e_1, e_2, \dots, e_t$, 使得对于每个 $2 \leq i \leq t$ 都存在 $1 \leq j \leq i-1$ 使得 $|e_i \cap e_j| \geq k$ 。特别地, $(r-1)$ -紧密连接是通常的紧密连接概念。对于任意集合 X , 我们使用 $\binom{X}{k}$ 表示所有大小为 k 的 X 子集族。 k -影子的 r 图 H , 记作 $\partial_k H := \bigcup_{e \in E(H)} \binom{e}{k}$, 是其边为 H 边的 k 子集的 k 图。我们用 $e(H)$ 和 $v(H)$ 分别表示 H 中的边数和顶点数。

定理 1.2 (证明在 Section 3)。令 $r \geq 3$, 并令 G 和 F 是 r 图, 使得 G 是 2-紧密相连的且不同构于 F 。则存在一个仅依赖于 F 的常数 c , 使得对于足够大的 n ,

$$f_{F, G}(n) \leq c(\log n)^{\alpha_F},$$

其中

$$\alpha_F = \max_{\emptyset \neq F' \subseteq \partial_2 F} \left\{ \frac{e(F') + 1}{v(F') - 1} \right\}.$$

表征成对的 F 和 G , 使得 $f_{F, G}(n)$ 是多项式会非常有趣。在 [5] 中, 提出了以下猜想。

猜想 1.3 (猜想 1.1, [5])。对于一个 3-图 G , 存在一个常数 $c = c(G)$, 使得 $f_{K_3^3, G}(n) \geq n^c$ 当且仅当 G 是 K_3^3 -迭代扩展的一个子图。

扩展定理 1.3，我们提出以下内容。

猜想 1.4. 对于任何 r 图 F 和 G ，存在一个常数 $c = c(F, G)$ ，使得 $f_{F,G}(n) \geq n^c$ 当且仅当 G 是一个 F 迭代扩展的子图。

确实，当 G 是 2-紧密连接时，定理 1.2 确认了定理 1.4，因为很容易验证如果 G 是 2-紧密连接且不与 F 同态，则 G 不是任何 F 迭代扩展的子图。

请注意，当 $F = K_3^3$ 时，定理 1.2 只给出 $f_{K_3^3, G}(n) \leq c(\log n)^2$ ，这比 (1) 更差。这是因为我们对定理 1.2 的证明本质上不同于对 (1) 的证明，因为我们牺牲了指数来处理更一般类别的 F 和 G 。特别是当 G 和 F 是团时，比如说 $G = K_s^r$ 和 $F = K_{s+1}^r$ 其中 $s \geq r \geq 3$ ，定理 1.2 意味着

$$f_{K_s^r, K_{s+1}^r}(n) \leq c(\log n)^{\frac{\binom{s}{2}+1}{s-1}}.$$

这比 Dudek 和 Mubayi 当前的最佳上界 [8] 要差得多，他们证明了

$$f_{K_s^r, K_{s+1}^r}(n) \leq c(\log n)^{\frac{1}{r-2}}. \quad (2)$$

Dudek 和 Mubayi 对 (2) 使用的方法是特定的。我们提供了 (2) 的一个新证明，作为一般上界的一个结果，对于 G 和 F 假设 G 大致说来远离同态于 F 。

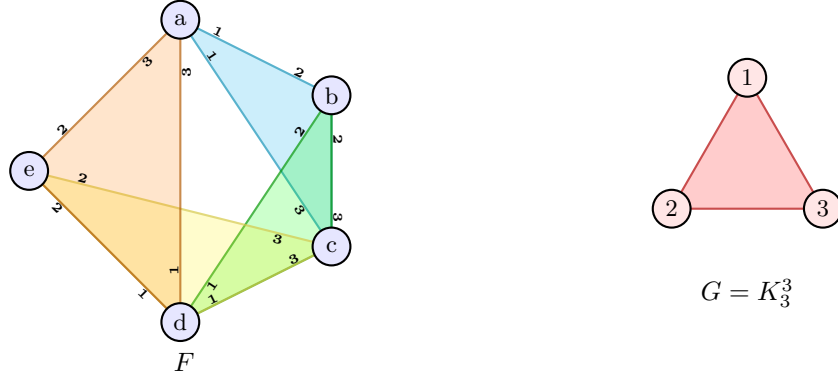


图 2: 一个 2-阴影同态但不是一个同态。

定义 2. 给定 r 图 F 和 G 。我们说 F 是 k -阴影同态到 G ，如果我们可以为每个 $S \in \partial_k F$ 定义一个 $f(S) \in \partial_k G$ 和一个双射 $g_S : S \rightarrow f(S)$ ，使得对于每条边 $e \in E(F)$ 都存在一条边 $e' \in E(G)$ 和一个双射 $g : e \rightarrow e'$ ，使得对于每个 $S \in \binom{e}{k}$ ， $g|_S = g_S$ 。

换句话说，如果我们可以定义从 $\partial_k F$ 到 $\partial_k G$ 的双射，以一种沿着 F 的边缘一致粘合的方式，那么 F 是 k -阴影同态到 G 。注意，1-阴影同态就是同态；同样不难验证对于任意的 $k_1 > k_2$ ，如果 F 是 k_2 -阴影同态到 G ，则 F 是 k_1 -阴影同态到 G ，因此一般来说阴影同态是一个更宽松的概念。例如，设 F 是一个具有边 abc, bcd, cde 和 dea 的 3-图，则 F 对于 2 影子同态于 K_3^3 （参见 Figure 2 以获取说明），但不与 K_3^3 同态。我们注意到阴影同态与在 [4] 中定义的“配对同态”概念密切相关，但又有所不同。

我们的最后一个结果在使用影子同态的情况下，在更严格的假设下改进了定理 1.2 的指数。

定理 1.5 (证明在 Section 4). 对于 $r > k \geq 2$ ，给定 r -图 G 和 F ，使得 G 不是 k -阴影同态到 F ，存在一个仅依赖于 F 的常数 c ，对于足够大的 n ，

$$f_{F,G}^r(n) \leq c(\log n)^{\frac{1}{k-1}}.$$

对于任何 $s \geq r \geq 3$, K_{s+1}^r 不是 $(r-1)$ -影同态到 K_s^r (证明在 Section 4 中), 因此 (2) 由定理 1.5 得出。令 H_t^r 是具有 $r+1$ 个顶点和 t 条边的唯一 r 图。对于 $2 \leq t \leq r$, 可以证明 H_{t+1}^r 不是 $(r-1)$ -影同态到 H_t^r (证明在 Section 4 中)。因此, 我们得到定理 1.5 的以下推论。

推论 1.6. 对于 $r \geq 3$ 和 $2 \leq t \leq r$, 存在一个常数 c , 使得当 n 足够大时,

$$f_{H_t^r, H_{t+1}^r}^r(n) \leq c(\log n)^{\frac{1}{r-2}}.$$

为了清晰起见, 我们系统地省略了所有不必要的地板和天花板函数。

2 证明定理 1.1

在本节中, 我们给出了定理 1.1 的证明, 这是一个直接的推广, 源自于 Erdős 的一个民间饱和度论证 (参见例如 [11, Section 6])。

证明 定理 1.1. 只需假设 G 是一个 F -迭代吹胀来证明这一点。我们将通过归纳法对 G 进行证明。当 $G = F$ 时, 该定理显然是成立的。当 $G \neq F$ 时, 根据定义存在一个比 G 小的 F -次吹胀 G' 和一个顶点 $v \in V(G')$, 使得 $G = G'(v, F)$ 。通过归纳, 存在一个常数 c' , 使得对于所有足够大的 n , $f_{F, G'}(n) \geq n^{c'}$ 。令 c_1 是相对于 c' 和 G 足够小的常数。令 H 是一个 r -图, 使得 H 中的每个 n^{c_1} -顶点集都包含一个 F 的副本。只需证明 H 包含一个 G 的副本即可。

由于 $f_{F, G'}(n^{c_1/c'}) \geq n^{c_1}$, 可知在 H 中的每一个 $n^{c_1/c'}$ -顶点集都包含一个 G' 的副本。通过双重计数, G' 在 H 中的副本数量至少为

$$\frac{\binom{n}{n^{c_1/c'}}}{\binom{n-v(G')}{n^{c_1/c'}-v(G')}} \geq n^{(1-c_1/c')v(G')}.$$

注意, $G' \setminus v$ 在 H 中的副本数量至多为 $n^{v(G')-1}$ 。因此存在一个 $G' \setminus v$ 的副本可以扩展到至少

$$n^{(1-c_1/c')v(G')}/n^{v(G')-1} = n^{1-c_1v(G')/c'} \geq n^{c_1}$$

个 G' 副本在 H 中, 只要 c_1 足够小。这些扩展共同形成一个 $G'(v, n^{c_1})$ 的副本。根据 H 的定义, 形成 $G'(v, n^{c_1})$ 中 v 复制品的 n^{c_1} 个顶点包含一个 F 的复制品。此副本中的顶点 F , 连同副本 $G' \setminus v$ 中的顶点, 形成一个 $G'(v, F) = G$ 的副本, 从而完成证明。□

3 证明定理 1.2

我们使用以下标准的上尾界来包含随机图中的子图。

定理 3.1 (定理 3.9 来自 [13]). 令 $G(n, p)$ 为一个具有 n 个顶点和边概率 p 的 Erdős-Rényi 随机图。令 F 为一个至少有一条边的图。然后对于每一个序列的 $p = p(n) < 1$,

$$\Pr[F \not\subset G(n, p)] \leq \exp(-\Theta(n^{v(F')}p^{e(F')}))$$

其中 F' 是 F 的非空子图, 并且具有最小的 $n^{v(F')}p^{e(F')}$ 。

证明 定理 1.2. 令常数 c_3 和 c_4 足够大; c_5 在 F 的意义上足够大; c_1 在 F 和 c_5 的意义上足够大; c_2 在 F 、 c_1 、 c_3 和 c_4 的意义上足够大。我们简写为 $\alpha = \alpha_F$ 。令 $\ell = c_1 \log n$ 并令 $w = c_2(\log n)^\alpha$ 。

考虑一个随机函数 (着色) $\beta: \binom{[n]}{2} \rightarrow [\ell]$, 其中 $\binom{[n]}{2}$ 中的每对都被独立且均匀随机地分配到 $[\ell]$ 中的一种颜色。对于每个 $t \in [\ell]$, 我们令 G_t 是一个在 $[n]$ 上的图, 其边是所有颜色为 t 的配对来自 β 。

主张 3.2. 以正概率, 对于每一个 $t \in [\ell]$ 和每一个 $W \subseteq [n]$, 当 $|W| \geq w/2$ 成立时, $G_t[W]$ 包含 $\partial_2 F$ 的一个副本。

证明. 对于每一个 $t \in [\ell]$ 和 $W \subseteq [n]$ 满足 $|W| = w/2$, 我们令 $X_{t,W}$ 是事件 $G_t[W]$ 是 $\partial_2 F$ -自由。请注意, 每个 G_t 都是一个随机图 $G(n, p)$, 其中 $p = 1/\ell$ 。因此根据定理 3.1, 我们有

$$\Pr[X_{t,W}] \leq \exp\left(-\frac{1}{c_3} w^{v(F')} \ell^{-e(F')}\right)$$

其中 F' 是 $\partial_2 F$ 的某个非空子图。

因此, 通过联合界,

$$\begin{aligned} \Pr\left[\bigcup_{t \in [\ell], W \in \binom{[n]}{w/2}} X_{t,W}\right] &\leq \ell \binom{n}{w/2} \exp\left(-\frac{1}{c_3} w^{v(F')} \ell^{-e(F')}\right) \\ &\leq \exp\left(c_4 c_2 (\log n)^{1+\alpha} - \frac{c_2^{v(F')}}{c_3 c_1^{e(F')}} (\log n)^{v(F')\alpha - e(F')}\right). \end{aligned}$$

比较上述两项中 $\log n$ 的指数, 我们注意到 $v(F')\alpha - e(F') \geq 1 + \alpha$ 等价于 $\alpha \geq \frac{e(F')+1}{v(F')-1}$, 这是由 α 的定义得出的。这完成了证明。 $\square$

我们可以固定 β 满足定理 3.2 的结论。对于每个 $t \in [\ell]$, 取一个函数 $\gamma_t : [n] \rightarrow V(F)$ 随机且均匀分布。我们定义一个 r -图 H 在 $[n]$ 上, 其边是所有 r -元组 X , 使得存在 $t \in [\ell]$, 使 $\binom{X}{2}$ 中的所有成对都被 β 映射到 t , 并且 $\gamma_t(X)$ 是 F 的一条边。

不难验证 H 是 G -自由的; 事实上, 由于 G 是 2-紧密连接的, G 的一个副本必须将其 2-阴影映射到相同的颜色 $t \in [\ell]$ 由 β , 因此 γ_t 将这个 G 副本中的每条边映射到 F 中的一条边, 从而产生从 G 到 F 的同态。

对于每个 $W \subseteq [n]$ 与 $|W| = w$, 我们令 Y_W 为事件 W 是 F -自由的。由定理 3.2 可知, 对于每个具有 $|W| = w$ 的 W 以及每个 $t \in [\ell]$, $G_t[W]$ 至少包含 $\frac{w}{2v(F)}$ 个顶点不交的 $\partial_2 F$ 副本。在 G_t 中的 $\partial_2 F$ 的副本产生在 H 中的 F 的副本的概率至少为 $\frac{v(F)!}{v(F)^{v(F)}}$ 。因此

$$\Pr[Y_W] \leq \left(1 - \frac{v(F)!}{v(F)^{v(F)}}\right)^{\frac{\ell w}{2v(F)}}.$$

由并集界,

$$\Pr\left[\bigcup_{W \in \binom{[n]}{w}} Y_W\right] \leq \binom{n}{w} \left(1 - \frac{v(F)!}{v(F)^{v(F)}}\right)^{\frac{\ell w}{2v(F)}} \leq \exp\left(\log n \cdot w - \frac{1}{c_5} \ell w\right) = \exp\left(\left(1 - \frac{c_1}{c_5}\right) \log n \cdot w\right) < 1.$$

这意味着, 以正概率, 对于每个 $W \subseteq [n]$ 且 $|W| = w$, $H[W]$ 包含 F 的一个副本。 $\square$

4 证明及其应用 定理 1.5

在本节中, 我们证明了定理 1.5, 这在更严格的条件下改进了 $f_{F,G}^r$ 的界限, 即 G 不是 k -影射同态到 F 。

我们使用 Janson 不等式的扩展形式, 如下所示。

定理 4.1 (定理 8.1.2, [2]). 令 Ω 是一个有限集合, 令 R 是由 $\Pr[r \in R] = p_r$ 给定的 Ω 的一个随机子集, 这些事件在 $r \in \Omega$ 上相互独立. 令 $\{A_i\}_{i \in I}$ 是 Ω 的有限子集集合. 令 B_i 是事件 $A_i \subseteq R$. 对于 $i, j \in I$, 如果 $i \neq j$ 和 $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, 我们写 $i \sim j$. 定义

$$\Delta = \sum_{i \sim j} \Pr[B_i \cap B_j],$$

其中求和是对有序对进行的, 以及

$$\mu = \sum_{i \in I} \Pr[B_i].$$

如果 $\Delta \geq \mu$, 则

$$\Pr[\cap_{i \in I} \overline{B_i}] \leq \exp(-\mu^2/\Delta).$$

证明 定理 1.5. 令常数 c_3, c_4 在 F 的意义上足够大; c_1 在 c_3 和 c_4 的意义上足够大; c_2 在 c_1 的意义上足够大.

设 $w = c_2(\log n)^{\frac{1}{k-1}}$. 我们想要构造一个 n -顶点 G -free 的 r 图 H , 使得在 H 中的每个 w -顶点集都包含一个 F 的副本. 我们如下随机构造 H . 令 $[n]$ 是 H 的顶点集. 对于每个 $S \in \binom{[n]}{k}$, 我们随机均匀地取一个 $f(S) \in \partial_k F$, 然后随机均匀地取一个双射 $g_S : S \rightarrow f(S)$. 对于任何 $X \in \binom{[n]}{r}$, 我们令 X 是 H 的一条边当且仅当存在一条边 $e \in E(F)$ 和一个双射 $g : X \rightarrow e$ 使得, 对于每个 $S \in \binom{X}{k}$, $g|_S = g_S$. 不难验证 H 是 G -自由的, 否则函数 g_S 将会组合成一个从 G 到 F 的 k -影子同态, 这将导致矛盾.

主张 4.2. 设 $W \in \binom{[n]}{w}$. $H[W]$ 是 F -自由的概率至多是

$$\exp\left(-\frac{1}{c_1} w^k\right).$$

证明. 为了简化分析, 我们将 $H[W]$ 分成 $v(F)$ 部分, 并且只考虑 F 的横截面副本.

令 $v_1, v_2, \dots, v_t$ 是 F 中的所有顶点. 考虑一个划分 $W = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_t$, 其中每个 i 都有 $|V_i| = w/t$. 我们说一个 k -集合 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\} \subseteq W$ 是好的, 如果存在 $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}\} \in \partial_k F$ 使得对于所有的 $1 \leq t \leq k$ 都有 $s_t \in V_{i_t}$. 对于每个好的 k -集合 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\} \subseteq W$, 我们说 S 是忠实的如果 $g_S(s_t) = v_{i_t}$ 对所有的 $1 \leq i \leq k$ 都成立. 令 Y_S 是 S 是忠实的事件; 请注意, 这些事件在所有好的 k -集 $S \subseteq W$ 中相互独立.

我们说集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_t\} \subseteq W$ 是横截的, 如果对于每个 $1 \leq i \leq t$ 都有 $x_i \in V_i$. 对于每个横截集 t - $X = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$, 我们设 Y_X 为事件, 使得对于任何好的集合 k - $S \subseteq X$ 和任意的 $1 \leq i \leq t$, 如果 $g_S(x_i) = v_i$ 则 $x_i \in S$; 换句话说, 所有的好集合 k - $S \subseteq X$ 都是忠实的. 注意, Y_X 发生当且仅当 $H[X]$ 按正确顺序形成 F 的一个副本. 因此, 只需证明没有事件 Y_X 发生的概率的上限.

令 Ω 是 W 中所有好的 k -集的集合, 并令 R 是由所有忠实的好 k -集构成的 Ω 的随机子集. 然后, Y_X 可以被视为所有好的 k -集 $S \subseteq X$ 都包含在 R 中的事件. 令

$$\mu = \sum_X \Pr[Y_X]$$

其中 X 遍历所有横截集 t , 且令

$$\Delta = \sum_{Y_{X_1} \sim Y_{X_2}} \Pr[Y_{X_1} \cap Y_{X_2}]$$

其中 $Y_{X_1} \sim Y_{X_2}$ 表示 $X_1 \cap X_2$ 包含一个良好的 k -集合, 特别是 $|X_1 \cap X_2| \geq k$. 不难验证, 当 n 足够大

时, $\mu \geq \frac{1}{c_3} w^t$, $\Delta \leq c_4 w^{2t-k}$ 和 $\Delta \geq \mu$ 成立。由定理 4.1 (扩展詹森不等式), 我们得到

$$\Pr \left[\bigcap_X \overline{Y_X} \right] \leq \exp \left(-\frac{\mu^2}{2\Delta} \right) \leq \exp \left(-\frac{1}{c_1} w^k \right),$$

如所期望的那样。 $\square$

通过联合界和定理 4.2, 存在一个 w -顶点集 W 在 H 中, 使得 $H[W]$ 是 F -自由的概率最多为

$$\binom{n}{w} \exp \left(-\frac{1}{c_1} w^k \right) \leq \exp \left(\log n \cdot w - \frac{1}{c_1} w^k \right) = \exp \left(\left(c_2 - \frac{c_2^k}{c_1} \right) (\log n)^{\frac{k}{k-1}} \right) < 1.$$

因此, 以正概率, H 满足所需的性质。这完成了定理 1.5 的证明。 $\square$

接下来, 我们检查我们在引言中声称的非阴影同态。我们首先证明一个有用的引理。

引理 4.3. 令 G 和 F 是两个 r -图, 使得 G 是 $(r-1)$ -影射同态到 F , 因此对于每个 $S \in \partial_{r-1} G$ 存在一个 $f(S) \in \partial_{r-1} F$ 和一个双射 $g_S : S \rightarrow f(S)$, 并且对于每个 $E \in E(G)$ 存在一个 $f(E)$ 和一个双射 $g_E : E \rightarrow f(E)$, 使得对于任意的 $S \in E, g_S = g_E|_S$ 。令 E_1, E_2 和 E_3 是 G 的三条边, 使得 $|E_1 \cap E_2| = |E_1 \cap E_3| = |E_2 \cap E_3| = r-1$ 和 $|E_1 \cap E_2 \cap E_3| = r-2$ 。那么 $f(E_1) \neq f(E_2)$ 。

证明. 设 $S = E_1 \cap E_2$, $E_1 = S \cup \{v_1\}$ 和 $E_2 = S \cup \{v_2\}$ 。假设矛盾存在, 即 $f(E_1) = f(E_2)$ 。那么根据定义, 对于每个 $v \in S$, $g_{E_1}(v) = g_S(v) = g_{E_2}(v)$, 从而我们有 $g_{E_1}(v_1) = g_{E_2}(v_2)$ 。注意 $v_1, v_2 \in E_3$ 。根据定义, $g_{E_3}(v_1) = g_{E_3 \cap E_1}(v_1) = g_{E_1}(v_1)$, 类似地, $g_{E_3}(v_2) = g_{E_2}(v_2)$ 。因此 $g_{E_3}(v_1) = g_{E_3}(v_2)$, 这与 g_{E_3} 是双射的事实相矛盾。 $\square$

命题 4.4. 对于所有 $s \geq r \geq 2$, K_{s+1}^r 不是 $(r-1)$ -影同态到 K_s^r 。

证明. 令 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ 和 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{s+1}\}$ 分别为 K_s^r 和 K_{s+1}^r 的顶点集。假设矛盾, K_{s+1}^r 是 $(r-1)$ -影同态到 K_s^r , 因此我们可以为每个 $S \in \binom{U}{r-1}$ 挑选一个 $f(S) \in \binom{V}{r-1}$ 和一个双射 $g_S : S \rightarrow f(S)$, 并且为每个 $E \in \binom{U}{r}$ 挑选一个 $f(E) \in \binom{V}{r}$ 和一个双射 $g_E : E \rightarrow f(E)$ 使得, 对于任何 $S \subseteq E, g_S = g_E|_S$ 。

设 $U' = \{u_1, u_2, \dots, u_{r-1}\}$ 。不失一般性, 我们可以假设对于每一个 $1 \leq i \leq r-1$ 都有 $g_{U'}(u_i) = v_i$ 。注意对于每个 $r \leq j \leq s+1$, 都有 $g_{U' \cup \{u_j\}}(u_j) \notin V' := \{v_1, v_2, \dots, v_{r-1}\}$; 因此 $g_{U' \cup \{u_j\}}(u_j) \in V \setminus V'$ 。由定理 4.3, 对于 $r \leq j_1 < j_2 \leq s+1, f(U' \cup \{u_{j_1}\}) \neq f(U' \cup \{u_{j_2}\})$, 因此 $g_{U' \cup \{u_{j_1}\}}(u_{j_1}) \neq g_{U' \cup \{u_{j_2}\}}(u_{j_2})$ 。因此, 集合 $\{g_{U' \cup \{u_j\}}(u_j) : r \leq j \leq s+1\}$ 包含 $s-r+2$ 个不同的顶点在 $V \setminus V'$ 中。但 $|V \setminus V'| = s-r+1$, 所以这是矛盾的。 $\square$

因此, 通过定理 1.5, $f_{K_s^r, K_{s+1}^r} \leq c(\log n)^{\frac{1}{r-2}}$ 。这与 (2) 相匹配。

命题 4.5. 对于 $2 \leq t \leq r$, H_{t+1}^r 不是 $(r-1)$ -影同态到 H_t^r 。

证明. 令 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{r+1}\}$ 和 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{r+1}\}$ 分别是 H_t^r 和 H_{t+1}^r 的顶点集。假设矛盾, H_{t+1}^r 是 $(r-1)$ -影同态到 H_t^r , 则根据定义, 我们可以为每个 $S \in \partial_{r-1} H_{t+1}^r$ 定义一个 $f(S) \in \partial_{r-1} H_t^r$ 和一个双射 $g_S : S \rightarrow f(S)$, 并且为每个 $E \in E(H_{t+1}^r)$ 定义一个 $f(E) \in E(H_t^r)$ 使得对于任意的 $S \subseteq E, g_S = g_E|_S$ 。

由于我们正在处理仅有 $r+1$ 个顶点的 r -一致超图, H_{t+1}^r 的每三个边都满足定理 4.3 的条件。因此, 根据定理 4.3, 函数 $f : E(H_{t+1}^r) \rightarrow E(H_t^r)$ 是单射的。但是 $|E(H_{t+1}^r)| = t+1 > t = |E(H_t^r)|$, 所以这是一个矛盾。 $\square$

定理 1.6 立即从定理 1.5 和定理 4.5 得出。

结论 remarks 应翻译为“备注”，但根据您的要求，直接翻译“Concluding Remarks”为“结束语”。

定理的证明可以直接推广至 [5] 中的 (1)，得出以下定理。

定理 4.6. 令 G 和 F 是 3 图，使得 G 紧密相连且不同构于 F 。如果对任意非空的 $F' \subseteq \partial_2 F$ 均有 $\frac{e(F')}{v(F')-1} \leq \frac{e(\partial_2 F)}{v(F)-1}$ 成立，则存在一个仅依赖于 F 的常数 c ，使得对于足够大的 n 时，

$$f_{F,G}(n) \leq c(\log n)^{\frac{e(\partial_2 F)}{v(F)-1}}.$$

该定理在适用时比定理 1.2 严格更强。我们相信对 F 的额外限制是不必要的。

猜想 4.7. 令 G 和 F 是 3 图，使得 G 紧密相连且不同构于 F 。则存在一个仅依赖于 F 的常数 c ，使得对于足够大的 n ，

$$f_{F,G}(n) \leq c(\log n)^{\beta_F},$$

其中

$$\beta_F = \max_{\emptyset \neq F' \subseteq \partial_2 F} \left\{ \frac{e(F')}{v(F')-1} \right\}.$$

确定 $f_{H_2^3, H_3^3}(n)$ 的大小似乎是这种类型中（从某种意义上说）最基本的问题。通过定理 1.6 结合 $r = 3$ 和 $t = 2$ ，我们得到 $f_{H_2^3, H_3^3}(n) \leq c \log n$ 。另一方面，从 H_3^3 [11] 的拉姆齐结果中，我们知道 $f_{H_2^3, H_3^3}(n) \geq f_{K_3^3, H_3^3}(n) \geq c \frac{\log n}{\log \log n}$ 。我们不确定哪个界限更接近事实。

问题 4.8. 确定 $f_{H_2^3, H_3^3}(n)$ 的大小。

最后，关于团集 Erdős – Rogers 问题，我们想强调 Conlon、Fox 和 Sudakov 提出的 [7]。

问题 4.9. 是否对于每一个 $s \geq 4$ 都有 $f_{K_s^4, K_{s+1}^4} = (\log n)^{o(1)}$ 成立？

似乎本文中的所有方法以及之前在这个课题上的工作，在 $(\log n)^c$ 处遇到了一个自然的障碍，因此需要全新的构造来肯定地解决这个问题。

致谢

作者感谢 Dhruv Mubayi 建议了本文的主题。

参考文献

- [1] M. Ajtai, J. Komlós, and E. Szemerédi. A note on Ramsey numbers. *J. Combin. Theory Ser. A*, 29(3):354–360, 1980.
- [2] N. Alon and J. H. Spencer. *The probabilistic method*. John Wiley & Sons, 2016.
- [3] J. Balogh, C. Chen, and H. Luo. On the maximum F -free induced subgraphs in K_t -free graphs. *Random Structures Algorithms*, 66(1):e21273, 2025.
- [4] D. Conlon, J. Fox, B. Gunby, X. He, D. Mubayi, A. Suk, and J. Verstraëte. On off-diagonal hypergraph Ramsey numbers. *arXiv preprint arXiv:2404.02021*, 2024.

- [5] D. Conlon, J. Fox, B. Gunby, X. He, D. Mubayi, A. Suk, J. Verstraëte, and H.-H. H. Yu. When are off-diagonal hypergraph Ramsey numbers polynomial? *arXiv preprint arXiv:2411.13812*, 2024.
- [6] D. Conlon, J. Fox, and B. Sudakov. Hypergraph ramsey numbers. *J. Amer. Math. Soc.*, 23(1):247–266, 2010.
- [7] D. Conlon, J. Fox, and B. Sudakov. Recent developments in graph Ramsey theory. *Surveys in combinatorics*, 424(2015):49–118, 2015.
- [8] A. Dudek and D. Mubayi. On generalized Ramsey numbers for 3-uniform hypergraphs. *J. Graph Theory*, 76(3):217–223, 2014.
- [9] P. Erdős and A. Hajnal. On Ramsey like theorems. problems and results. In *Combinatorics (Proc. Conf. Combinatorial Math., Math. Inst., Oxford, 1972)*, pages 123–140. Citeseer, 1972.
- [10] P. Erdős and C. A. Rogers. The construction of certain graphs. *Canadian J. Math.*, 14:702–707, 1962.
- [11] J. Fox and X. He. Independent sets in hypergraphs with a forbidden link. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 123(4):384–409, 2021.
- [12] L. Gishboliner, O. Janzer, and B. Sudakov. Induced subgraphs of K_r -free graphs and the Erdős–Rogers problem. *arXiv preprint arXiv:2409.06650*, 2024.
- [13] S. Janson, T. Luczak, and A. Rucinski. *Random graphs*. John Wiley & Sons, 2011.
- [14] O. Janzer and B. Sudakov. Improved bounds for the Erdős–Rogers $(s, s+2)$ -problem. *Random Structures Algorithms*, 66(1):e21280, 2025.
- [15] J. H. Kim. The Ramsey number $R(3, t)$ has order of magnitude $t^2/\log t$. *Random Structures Algorithms*, 7(3):173–207, 1995.
- [16] S. Mattheus and J. Verstraete. The asymptotics of $r(4, t)$. *Ann. of Math.*, 199(2):919–941, 2024.
- [17] D. Mubayi and J. Verstraëte. Erdős–Rogers functions for arbitrary pairs of graphs. *arXiv preprint arXiv:2407.03121*, 2024.
- [18] D. Mubayi and J. Verstraete. On the order of the classical Erdős–Rogers functions. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 57(2):582–598, 2025.
- [19] B. Sudakov. Large K_r -free subgraphs in K_s -free graphs and some other Ramsey-type problems. *Random Structures Algorithms*, 26(3):253–265, 2005.