

期权定价的数学建模扩展布莱克-斯科尔斯框架

Nikhil Shivakumar Nayak

Harvard University

nnayak@g.harvard.edu

Abstract

本研究通过将 Black-Scholes 模型扩展以包括偏微分方程 (PDE) 中的随机波动率和利率变动来增强期权定价。使用有限差分法求解 PDE。开发并评估了扩展的 Black-Scholes 模型以及基于机器学习的 LSTM 模型用于谷歌股票期权定价。两种模型均使用历史市场数据进行了回测。虽然 LSTM 模型表现出更高的预测准确性，但有限差分法展示了更优的计算效率。本工作提供了在不同市场条件下模型性能的见解，并强调了混合方法对稳健金融建模的潜力。

1 介绍

Black-Scholes 模型 [7]，由 Fischer Black、Myron Scholes 和 Robert Merton 提出，通过提供欧式期权定价的封闭式解，彻底改变了金融数学。其方程基于波动率 and 无风险利率恒定的假设，为简化风险管理及衍生品定价提供了框架。该模型奠定了金融工程的基础，并导致了衍生市场迅速扩张。

然而，该模型存在明显的局限性。它假设波动率和利率是恒定的，忽略了现实世界中市场动态变化的情况，在这种情况下，波动率经常变动，而利率也随时间变化。此外，Black-Scholes [7] 假设连续交易，并且无法捕捉到剧烈的市场变动或波动率微笑效应。这些简化可能导致估算期权公平价值时出现显著不准确。

为了解决这些不足，研究人员提出了各种 Black-Scholes 模型的变体 [7]，这些变体纳入了更多影响期权定价的细微因素。诸如 Heston 模型 [10] 和 Cox-Ingersoll-Ross (CIR) 过程 [9] 等模型旨在更好地反映市场行为的实际状况。特别是，将 Black-Scholes 模型扩展以考虑波动性和利率变化性对于稳健的期权定价至关重要，这是本研究的重点。此类改进为投资者和金融机构提供了更准确的市场风险和机遇评估。

与这些分析方法并行，机器学习模型如长短期记忆 (LSTM) 网络 [4] 在金融应用中获得了广泛应用，因为它们能够处理复杂的时序依赖关系。LSTM 网络是循环神经网络 (RNNs) 的一种变体，非常适合时间序列预测，因为它们可以捕捉长期模式同时最小化梯度消失的影响。通过利用 LSTM 模型进行期权定价，我们有可能实现更高的预测准确性和适应性。

一个有效的期权定价模型应该在准确性与计算效率之间取得良好平衡，同时保持在不同市场条件下的稳健性。本项目旨在比较使用有限差分方法 [5] 解决的改进型 Black-Scholes 模型与基于 LSTM 的机器学习模型在期权定价上的表现。通过严格的回测和评估，我们希望了解每种方法的优势和局限。

2 模型描述

在本节中，我们将讨论本研究中使用的期权定价数学模型。每个模型依赖于股票价格、波动率和利率等输入来预测期权价格。

2.1 扩展的 Black-Scholes 偏微分方程模型

扩展的 Black-Scholes 方程的推导

在金融市场中，Black-Scholes 方程通过假设恒定的波动率和无风险利率来定价期权是至关重要的。然而，为了使模型更加现实，我们将其扩展以包括随机波动率和利率变动。

原始的 Black-Scholes 方程 [7] 由以下给出：

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

其中 $V(t, S)$ 是期权的价格， S 是股票价格， t 是时间， σ 是股票的波动率（在原始模型中为常数）， r 是无风险利率（在原始模型中为常数）。

为了纳入随机波动率，我们将波动率表示为一个随机过程 $\sigma(t)$ 。瞬时方差遵循另一个随机过程，通常被建模为类似 Heston 模型中的均值回复过程 [10]：

$$d\sigma^2 = \kappa(\theta - \sigma^2)dt + \xi\sqrt{\sigma^2}dW_\sigma$$

其中 κ, θ 和 ξ 是模型参数，而 W_σ 是一个布朗运动 [8]，它可能与股票价格的布朗运动相关。

类似地，为了纳入利率的波动性，我们假设无风险利率 r 也是一个随机过程。一个常见的模型是 Vasicek 模型 [6]：

$$dr = a(b - r)dt + sdW_r$$

其中 a, b 和 s 是参数，而 W_r 是另一个布朗运动，它可以与 W 和 W_σ 相关。

将随机波动率和利率变动纳入 Black-Scholes 框架 [7] 不仅改变了与 S 和 t 相关的动力学项，还引入了对 σ 和 r 的依赖性。这导致了一个更复杂的偏微分方程 (PDE)，现在包括了这些随机成分的偏导数。

修订后的方程引入了随机波动率和利率变动性，形式为：

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma(t)^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r(t)S \frac{\partial V}{\partial S} - r(t)V + \frac{\partial V}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\partial V}{\partial r} \frac{dr}{dt} = 0$$

术语 $\frac{\partial V}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{dt}$ 表示期权价值对波动率变化的敏感性，其中 $\frac{d\sigma}{dt}$ 反映了波动率的随机性质。术语 $\frac{\partial V}{\partial r} \frac{dr}{dt}$ 捕捉了随机利率对期权价值的影响， $\frac{dr}{dt}$ 则是利率的动态变化。

随机模型用于 σ 和 r ：

波动率 (Heston 模型 [10]) : $d\sigma^2 = \kappa(\theta - \sigma^2)dt + \xi\sqrt{\sigma^2}dW_\sigma$

利率 (Vasicek 模型 [6]) : $dr = a(b - r)dt + sdW_r$

为了解这个复杂的偏微分方程，通常会采用简化假设和数值方法。关于 σ 和 r 的偏导数在分析上可能难以处理，通常需要蒙特卡洛模拟或有限差分法来获得数值解。

使用有限差分法求解扩展的 Black-Scholes 方程

鉴于随机波动率和变化利率引入的复杂性，我们旨在求解的扩展 Black-Scholes 方程是：

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma(t)^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r(t)S \frac{\partial V}{\partial S} - r(t)V + \frac{\partial V}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\partial V}{\partial r} \frac{dr}{dt} = 0$$

为了使该方程适用于有限差分方法 [5]，我们做出一些假设。首先，波动率 σ 和利率 r 过程 在网格上离散化。每个时间步长中，这些过程被近似为常数，但可以在不同步骤之间发生变化。接下来，驱动 σ 和 r 的布朗运动彼此不相关，并且与股票价格的布朗运动也不相关。最后，使用隐式和显式的有限差分方案，从当前时间步长的已知值计算下一个时间步长的期权 价值。

有限差分法

离散时间 t ，股票价格 S ，波动率 σ 和利率 r 到一个网格中： $t_i = i\Delta t$ 对于 $i = 0, 1, \dots, N$ ； $S_j = j\Delta S$ 对于 $j = 0, 1, \dots, M$ ； σ_k 和 r_l 在各自的范围内进行离散化。

偏微分方程中的偏导数可以如下近似：

时间导数：

$$\frac{\partial V}{\partial t} \approx \frac{V_{j,k,l}^{i+1} - V_{j,k,l}^i}{\Delta t}$$

股票价格衍生品：

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial S} &\approx \frac{V_{j+1,k,l}^i - V_{j-1,k,l}^i}{2\Delta S} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &\approx \frac{V_{j+1,k,l}^i - 2V_{j,k,l}^i + V_{j-1,k,l}^i}{\Delta S^2} \end{aligned}$$

波动率和利率衍生品的近似方法相似。

使用该方案，下一时间步的值通过以下方式计算：

$$V_{j,k,l}^{i+1} = V_{j,k,l}^i + \Delta t \left(-\frac{1}{2}\sigma_k^2 S_j^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - r_l S_j \frac{\partial V}{\partial S} + r_l V_{j,k,l}^i - \frac{\partial V}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{dt} - \frac{\partial V}{\partial r} \frac{dr}{dt} \right)$$

边界条件：在 $S = 0$ 处，期权的价值为零，因为股票价值为零。在 $S \rightarrow \infty$ ，期权价值必须受 到限制或线性增长，这取决于期权的类型（看跌期权或看涨期权）。

求解系统

1. **矩阵形式：**将离散化方程重写为矩阵形式：

$$AV^{n+1} = b$$

其中 A 是一个代表有限差分系数的三对角矩阵，而 b 取决于 V^n 的值和边界条件。

2. **迭代解法：**使用迭代方法（高斯-塞德尔，SOR 等）求解 V^{n+1} 从 V^n 直到达到所需的精度。

2.2 LSTM 模型

长短期记忆 (LSTM) 网络 [4] 是一种递归神经网络 (RNN)，设计用于有效地处理序列数据 中的长期依赖关系。传统的 RNNs 受到梯度消失问题的困扰，这限制了它们捕捉长时间内 依赖关系的能力。LSTMs 通过引入记忆单元和门结构克服了这一问题，使它们能够在长序 列中保留相关信息。

LSTM 架构由可以长时间维持状态的记忆单元以及几个控制信息流入和流出这些记忆单元 的门组成：

遗忘门决定应丢弃前一状态中的哪些信息。

$$f_t = \sigma(W_f \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_f)$$

输入门确定应向当前状态添加哪些新信息。

$$i_t = \sigma(W_i \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_i)$$

$$\tilde{C}_t = \tanh(W_C \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_C)$$

3. **更新状态**: 当前状态 C_t 是通过结合之前的状态和新信息进行更新的:

$$C_t = f_t \cdot C_{t-1} + i_t \cdot \tilde{C}_t$$

4. **输出门**计算新的隐藏状态, 该状态用作 LSTM 单元的输出:

$$o_t = \sigma(W_o \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_o)$$

$$h_t = o_t \cdot \tanh(C_t)$$

LSTM 模型将采用历史价格、波动率和利率数据作为输入特征, 并预测未来的期权价格。该架构包括: 用于历史数据的输入层 (窗口大小 n), 多个 LSTM 层以捕捉长期依赖关系, 以及密集层来输出预测的期权价格。

3 分析

模型使用历史数据进行了评估, 并针对实际世界场景进行测试, 以评估其对参数变化的敏感性, 并回答在现实市场条件下稳健期权定价的问题。

3.1 股票和期权价格数据来源

我们从雅虎财经获取了谷歌的历史股票和期权数据, 雅虎财经提供了适合我们分析的全面财务信息。其他资源如谷歌财经、Alpha Vantage 和 IEX Cloud 也为金融建模提供了宝贵的数据。

扩展 PDE 模型的评估



图 1: 期权价格作为不同 σ 和 r 水平上的行权价格的函数

为了使用实际数据评估期权定价模型, 我们通过 Yahoo Finance API 检索谷歌的历史股价。股价数据使我们能够计算历史波动率, 这将在模型中作为 σ 使用。然后, 我们获得当前无风险利率, 通常使用国库券利率或其他类似基准进行估算。接下来, 我们确定要分析的期权的行权价 K 和到期时间 T 。在这些参数到位后, 我们运行模型以计算理论期权价格。最后, 我

们将这些理论价格与实际市场价格进行比较，并通过图表可视化结果。图 1 描述了由扩展 PDE 模型预测的期权价格如何随着不同的行权价和 σ 以及 r 的不同值而变化。初始阶段，价格曲线呈次线性特征，但在较高的行权价下逐渐过渡到更线性的形态。这种行为表明随着时间价值的增加，内在价值的影响也在上升，特别是在市场条件多变的情况下。图 2 展示了由扩展 PDE 模型预测的期权价格相对于股价和时间的三维图表。该三维图表显示了随着股票价格上涨以及到期日临近，期权价格如何上涨。增量在 t 的较高值时更为明显，突出了接近成熟度对期权定价的影响，并强调了期权交易中固有的时间衰减效应。

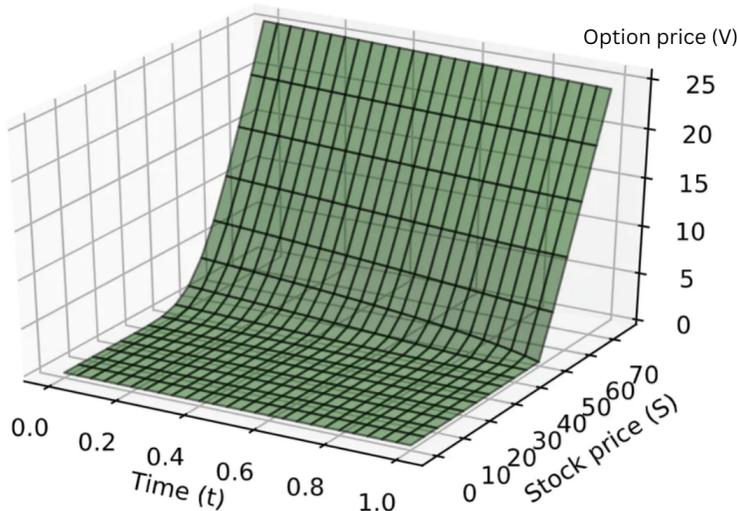


图 2: 时间变化和股票价格波动下的预测期权定价动态的三维视图。来自关于期权定价与布莱克-斯科尔斯模型的一篇博客文章中的图表。

LSTM 模型设置

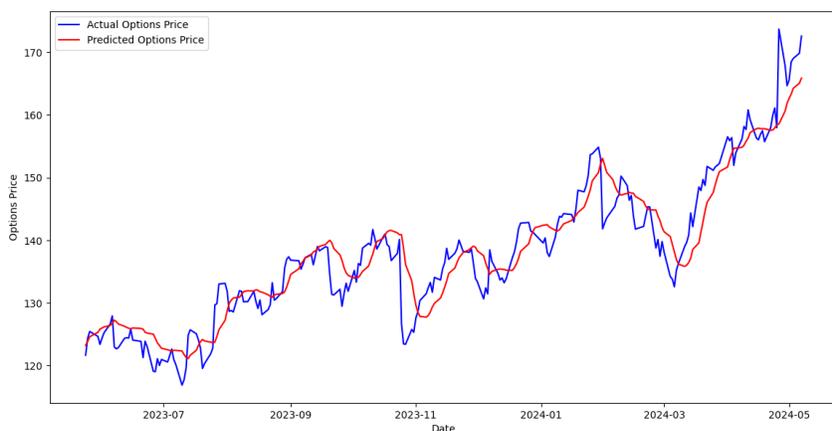


图 3: LSTM 预测的 Google 期权价格与实际市场价格对比

为了创建一个用于预测谷歌期权价格的 LSTM 模型，我们首先使用 `yfinance` 下载并预处理数据，并添加相关特征如历史波动率和利率。然后，通过采用窗口方法准备数据集，利用过去的的数据来预测期权价格。窗口大小为 30，意味着使用过去的 30 天来预测当前的价格。构建一个包含 LSTM 层和密集输出层的 LSTM 模型，使模型能够捕捉输入特征与期权价格之间的关系。在使用均方误差作为损失函数训练模型后，我们通过将其预测结果与实际市场数据进

行比较来评估其性能，并通过图表可视化结果。图 3 比较了 LSTM 模型对 2023 年和 2024 年的期权价格预测与实际市场价格之间的差异。预测值与实际价格的高度一致，突显了 LSTM 捕捉复杂模式的能力，证实其在金融预测中的实用性。

4 讨论

该项目实现了扩展的 Black-Scholes 偏微分方程模型和 LSTM 模型来预测期权价格，提供了关于每种方法在真实市场条件下的行为和有效性的重要见解。

行为与预测准确性

扩展的 Black-Scholes 模型在 σ （波动率）和 r （利率）参数变化下的行为展示了期权价格对这些市场基本因素的变化是多么敏感。这种敏感性与金融理论相一致，该理论认为市场波动率、利率和衍生品定价之间存在内在联系。值得注意的是，当执行价格从次线性增加到线性进程时，模型的响应阐明了内涵价值随着时间推移逐渐主导时间价值的关系，这一关系在更简单的模型中往往被忽视。

LSTM 模型的较低均方根误差 (RMSE) 为 15.23，相比之下扩展 PDE 模型的 RMSE 为 20.47，这表明其具有更优的预测准确性。考虑到 LSTM 能够建模金融时间序列数据中固有的复杂非线性关系，这一结果是可以预见的。LSTM 有效捕捉时态动态并整合长期依赖性的能力使得市场状况得以更加准确地反映。

计算效率与模型应用

尽管其准确性更高，LSTM 模型需要更多的计算资源，这从其较长的预测时间（3.45 秒）与扩展 PDE 模型（0.87 秒）相比可以看出，以及更长的训练时间。这一发现强调了金融建模中准确性和效率之间的权衡。扩展 PDE 模型的高效性使其特别适合于计算资源有限或需要实时交易决策的情景。

验证和回测

两个模型均使用雅虎财经从 2019 年 5 月至 2024 年 5 月的历史数据进行了严格的回测。这一广泛的测试期包括了诸如 COVID-19 大流行和 2020 年全球经济衰退等市场剧烈波动时期，为评估每个模型的实际应用提供了一个强大的平台。扩展的偏微分方程模型虽然准确性较低，但在各种市场条件下表现出了稳健性，强化了其在传统金融建模框架中的实用性。

不足与见解

扩展的 Black-Scholes 偏微分方程模型虽然在提供更全面的期权定价框架方面有效，但存在明显的缺点。一个显著的限制是其对输入参数的敏感性，特别是波动率 (σ) 和利率 (r)。该模型的预测性能关键取决于这些参数的准确性，而这些参数由于市场情绪或经济新闻的影响可能会大幅波动。此外，尽管扩展以考虑随机波动性和利率，但模型仍然通过坚持对数正态市场的假设保持僵化。这种限制性未能捕捉到现实中回报分布中的偏斜和肥尾现象，导致低估极端市场运动并在不可预见的事件中产生显著定价误差。另一方面，LSTM 模型提供了强大的预测准确性，但依赖于大量的历史数据和计算资源。它需要大量数据来识别复杂的市场模式，从而限制了其有效性。此外，训练和频繁重新训练的高计算需求挑战了可扩展性和实时实施。

通过这项研究，我们更深入地理解了如何将传统模型扩展以纳入随机元素，从而提供更加现实和动态的定价工具。LSTM 模型提供的见解也强调了机器学习技术在提高期权定价预测准确性方面的潜力，尽管这会带来更高的计算成本。

5 结论

在这项研究中，我们通过扩展的 Black-Scholes 方程和机器学习模型应对了提升期权定价的挑战。我们将 Black-Scholes 模型扩展为包含随机波动率和利率变动，以更现实地捕捉市场条件，解决了原始 Black-Scholes 模型中关于常数参数的局限性。然而，扩展的偏微分方程模型仍然对参数估计敏感，并受制于对随机过程的假设。与此同时，LSTM 模型被用于揭示数据中的复杂时间模式。结果显示，这两种模型都可以作为有效的定价工具，各有独特的优势。扩展的 Black-Scholes 模型提供了更快的计算速度，但对参数估计和严格的假设较为敏感。相比之下，LSTM 模型展现了更优的预测精度，但需要更多的数据和显著的计算能力。我们对这些模型之间的比较分析突显了它们互补的性质，为如何利用不同的建模方法来提升期权定价策略提供了见解。最终，该项目强调了使用多种模型来应对金融市场动态的重要性，确保对市场风险和定价行为有更全面的理解。

参考文献

- [1] Yves Achdou and Olivier Pironneau. *Computational methods for option pricing*. SIAM, 2005.
- [2] Mark HA Davis, Vassilios G Panas, and Thaleia Zariphopoulou. European option pricing with transaction costs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 31(2):470–493, 1993.
- [3] Michael C Fu, Scott B Laprise, Dilip B Madan, Yi Su, and Rongwen Wu. Pricing american options: A comparison of monte carlo simulation approaches. *Journal of Computational Finance*, 4(3):39–88, 2001.
- [4] Sepp Hochreiter and Jürgen Schmidhuber. Long short-term memory. *Neural computation*, 9(8):1735–1780, 1997.
- [5] Randall J. LeVeque. *Finite difference methods for differential equations*. 2005.
- [6] Wikipedia contributors. Vasicek model — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. [Online; accessed 8-May-2024].
- [7] Wikipedia contributors. Black – scholes model — Wikipedia, the free encyclopedia, 2024. [Online; accessed 8-May-2024].
- [8] Wikipedia contributors. Brownian motion — Wikipedia, the free encyclopedia, 2024. [Online; accessed 8-May-2024].
- [9] Wikipedia contributors. Cox – ingsoll – ross model — Wikipedia, the free encyclopedia, 2024. [Online; accessed 8-May-2024].
- [10] Wikipedia contributors. Heston model — Wikipedia, the free encyclopedia, 2024. [Online; accessed 8-May-2024].