

三阶雅可布斯塔尔 3-参数广义四元数

GAMALIEL MORALES

数学研究所,
智利瓦尔帕莱索天主教大学,
Blanco Viel 596, 瓦尔帕莱索, 智利.
电子邮件: gamaliel.cerda.m@mail.pucv.cl

摘要. 本文旨在将三阶 Jacobsthal 数和三参数广义四元数结合起来, 后者是根据三个参数的四元数代数的一般形式。为此, 我们引入并研究了一种新的相当大的特殊数字系统, 该系统被称为三阶 Jacobsthal 三参数广义四元数 (简称, 三阶 Jacobsthal 3PGQs)。进一步地, 我们计算了一些新方程和经典的知名方程, 如: 线性递推、Binet 公式、生成函数、求和公式、Cassini 恒等式和 d'Ocagne 恒等式。

Mathematical subject classification: 11B37, 11K31, 11R52, 11Y55.

关键词: 三阶雅可布斯塔尔数, 三参数广义四元数, 递归序列, 基本矩阵。

1. 介绍

三阶雅各布斯塔尔数和修改后的三阶雅各布斯塔尔数是整数序列中广为人知的数字。三阶雅各布斯塔尔数满足以下三阶递推关系

$$J_0^{(3)} = 0, J_1^{(3)} = J_2^{(3)} = 1, J_n^{(3)} = J_{n-1}^{(3)} + J_{n-2}^{(3)} + 2J_{n-3}^{(3)}, n \geq 3.$$

类似地, 修改后的三阶雅各布斯塔尔数定义以下递推关系

$$K_0^{(3)} = 0, K_1^{(3)} = 1, K_2^{(3)} = 3, K_n^{(3)} = K_{n-1}^{(3)} + K_{n-2}^{(3)} + 2K_{n-3}^{(3)}, n \geq 3.$$

生成函数对于序列 $\{J_n^{(3)}\}_{n \geq 0}$ 和 $\{K_n^{(3)}\}_{n \geq 0}$ 分别是

$$J(x) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n^{(3)} x^n = \frac{x}{1-x-x^2-2x^3}$$

和

$$K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n^{(3)} x^n = \frac{3-2x-x^2}{1-x-x^2-2x^3},$$

。Binet 公式对于三阶 Jacobsthal 数和修改后的三阶 Jacobsthal 数分别是

$$J_n^{(3)} = \frac{1}{7} [2^{n+1} + X_n - 2X_{n+1}]$$

和

$$K_n^{(3)} = 2^n + X_n + 2X_{n+1},$$

, 其中 $\{X_n\}_{n \geq 0}$ 是通过

$$X_n = \frac{\omega_1^n - \omega_2^n}{\omega_1 - \omega_2} = \begin{cases} 0 & \text{if } n \equiv 0 \pmod{3} \\ 1 & \text{if } n \equiv 1 \pmod{3} \\ -1 & \text{if } n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

定义的周期序列, 并且 $\omega_1 = \omega_2^2 = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) \in \mathbb{C}$ 是方程 $x^2 + x + 1 = 0$ 的根。更多细节, 请参阅 [4, 8]。

另一方面, Şentürk 和 Ünal[11] 引入了一种广义四元数代数, 称为三参数广义四元数 (简称, 3PGQs)。3PGQs 的集合记为 $\mathbb{H}_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}$, 定义如下:

$$\{\psi_0 + \sum_{l=1}^3 \psi_l \mathbf{e}_l : \mathbf{e}_1^2 = -\lambda_1 \lambda_2, \mathbf{e}_2^2 = -\lambda_1 \lambda_3, \mathbf{e}_3^2 = -\lambda_2 \lambda_3, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3\},$$

其中 $\lambda_{l \in \{1, 2, 3\}} \in \mathbb{R}$ 。

向量 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 满足乘法规则

$$(1) \quad \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 = -\lambda_2 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 = \lambda_3 \mathbf{e}_1.$$

表 1 包含了一些 3PGQs 的特殊情况。可以观察到, 将各种类型的四元数和特殊递归序列成分结合起来对于文献中的许多研究人员来说是一个相当吸引人的概念。在 [5] 中, Halıcı 和 Karataş 研究了广义斐波那契四元数, Morales[9] 引入了广义 Tribonacci 四元数, 并且三阶 Jacobsthal 广义四元数在 [10] 中由 Akyiğit 等人提出。[1, 2] 研究了分裂斐波那契四元数和广义斐波那契四元数, Bród 引入了分裂 Horadam 四元数。最近, Kızılateş 和 Kibar[7] 确定了具有高阶广义斐波那契数分量的 3PGQs, 并且 İşbilir 和 Gürses[6] 引入了具有 Horadam 数分量的 3PGQs。

λ_1	λ_2	λ_3	Type of 3PGQs
1	λ_2	λ_3	Generalized quaternions
1	1	-1	Split quaternions
1	1	1	Hamilton quaternions
1	1	0	Semi-quaternions
1	-1	0	Split semi-quaternions

表 1. 一些类型的 3PGQs。

在这项研究中, 我们打算结合三阶雅各布斯塔尔数和 3PGQ; 也就是说, 我们探讨含有三阶雅各布斯塔尔数成分的 3PGQ。此外, 我们还考察了递推关

系、比内公式、生成函数、求和公式、达奥卡涅恒等式、卡西尼恒等式以及一些特殊方程。

2. 三阶雅可布斯塔尔 3 参数广义四元数

我们定义了三阶 Jacobsthal 3 参数 (TJ3p) 广义四元数和修改的三阶 Jacobsthal 3 参数 (MTJ3p) 广义四元数如下。

定义 2.1. 对于 $n \geq 0$, 第 n 个 TJ3p 和 MTJ3p 广义四元数是

$$J\mathcal{G}_n^{(3)} = J_n^{(3)} + J_{n+1}^{(3)}\mathbf{e}_1 + J_{n+2}^{(3)}\mathbf{e}_2 + J_{n+3}^{(3)}\mathbf{e}_3$$

和

$$K\mathcal{G}_n^{(3)} = K_n^{(3)} + K_{n+1}^{(3)}\mathbf{e}_1 + K_{n+2}^{(3)}\mathbf{e}_2 + K_{n+3}^{(3)}\mathbf{e}_3,$$

其中 $J_n^{(3)}$ 和 $K_n^{(3)}$ 是经典的三阶雅可布斯塔尔数和修正的三阶雅可布斯塔尔数, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 满足方程 (1) 中的乘法规则。

对于 $n \geq 3$, TJ3p 和 MTJ3p 广义四元数分别满足以下递推关系

$$(2) \quad J\mathcal{G}_n^{(3)} = J\mathcal{G}_{n-1}^{(3)} + J\mathcal{G}_{n-2}^{(3)} + 2J\mathcal{G}_{n-3}^{(3)}$$

和

$$(3) \quad K\mathcal{G}_n^{(3)} = K\mathcal{G}_{n-1}^{(3)} + K\mathcal{G}_{n-2}^{(3)} + 2K\mathcal{G}_{n-3}^{(3)},$$

下一个定理给出了序列 $\{J\mathcal{G}_n^{(3)}\}_{n \geq 0}$ 和 $\{K\mathcal{G}_n^{(3)}\}_{n \geq 0}$ 的生成函数。由于证明非常直接且简单, 我们不倾向于给出它们。

定理 2.2. 生成函数对于序列 $\{J\mathcal{G}_n^{(3)}\}_{n \geq 0}$ 和 $\{K\mathcal{G}_n^{(3)}\}_{n \geq 0}$ 分别是

$$\sum_{n=0}^{\infty} J\mathcal{G}_n^{(3)} x^n = \frac{1}{\sigma(x)} [\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 + (1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3)x + 2(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)x^2]$$

和

$$\sum_{n=0}^{\infty} K\mathcal{G}_n^{(3)} x^n = \frac{1}{\sigma(x)} \left\{ \begin{array}{l} 3 + \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 10\mathbf{e}_3 - (2 - 2\mathbf{e}_1 - 7\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3)x \\ -(1 - 6\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - 6\mathbf{e}_3)x^2 \end{array} \right\},$$

其中 $\sigma(x) = 1 - x - x^2 - 2x^3$ 。

这种四元数的一个有趣性质在下面的定理中给出。为了证明这个结果, 我们将使用满足三阶雅可布斯塔尔数和修正三阶雅可布斯塔尔数的关系。

定理 2.3. 对于任何非负整数 n , 我们有

$$J\mathcal{G}_{n+3}^{(3)} = J\mathcal{G}_n^{(3)} + 2^{n+1}\Theta$$

和

$$K\mathcal{G}_{n+3}^{(3)} = K\mathcal{G}_n^{(3)} + 7 \cdot 2^n \Theta$$

其中 $\Theta = 1 + 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 8\mathbf{e}_3$ 。

证明. 考虑定义 2.1 和关系 $J_{n+3}^{(3)} - 2^{n+1} = J_n^{(3)}$ 对于 $n \geq 0$, 我们得到

$$\begin{aligned} J\mathcal{G}_n^{(3)} &= J_n^{(3)} + J_{n+1}^{(3)}\mathbf{e}_1 + J_{n+2}^{(3)}\mathbf{e}_2 + J_{n+3}^{(3)}\mathbf{e}_3 \\ &= J_{n+3}^{(3)} - 2^{n+1} + \left[J_{n+4}^{(3)} - 2^{n+2}\right]\mathbf{e}_1 + \left[J_{n+5}^{(3)} - 2^{n+3}\right]\mathbf{e}_2 + \left[J_{n+6}^{(3)} - 2^{n+4}\right]\mathbf{e}_3 \\ &= J_{n+3}^{(3)} + J_{n+4}^{(3)}\mathbf{e}_1 + J_{n+5}^{(3)}\mathbf{e}_2 + J_{n+6}^{(3)}\mathbf{e}_3 - 2^{n+1}(1 + 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 8\mathbf{e}_3) \\ &= J\mathcal{G}_{n+3}^{(3)} - 2^{n+1}\Theta. \end{aligned}$$

最后一个方程给出了定理中的第一个方程。第二个方程的证明非常相似, 使用了修改后的三阶 Jacobsthal 数的恒等式 $K_{n+3}^{(3)} - 7 \cdot 2^n = K_n^{(3)}$ 。□

TJ3p 和 MTJ3p 广义四元数的 Binet 公式可以在以下定理中找到。

定理 2.4. 对于 $n \geq 0$, 第 n 个 $TJ3p$ 和 $MTJ3p$ 广义四元数分别为

$$\begin{aligned} J\mathcal{G}_n^{(3)} &= \frac{1}{7} [2^{n+1}\Theta + X_n\mathbf{A} - X_{n+1}\mathbf{B}] \\ &= \frac{1}{7} \begin{cases} 2^{n+1}\Theta - \mathbf{B} & \text{if } n \equiv 0 \pmod{3} \\ 2^{n+1}\Theta + \mathbf{A} + \mathbf{B} & \text{if } n \equiv 1 \pmod{3} \\ 2^{n+1}\Theta - \mathbf{A} & \text{if } n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \end{aligned}$$

和

$$K\mathcal{G}_n^{(3)} = 2^n\Theta + X_n\mathbf{C} - X_{n+1}\mathbf{D} = \begin{cases} 2^n\Theta - \mathbf{D} & \text{if } n \equiv 0 \pmod{3} \\ 2^n\Theta + \mathbf{C} + \mathbf{D} & \text{if } n \equiv 1 \pmod{3} \\ 2^n\Theta - \mathbf{C} & \text{if } n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases},$$

其中 $\Theta = 1 + 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 8\mathbf{e}_3$, $\mathbf{A} = 1 + 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{B} = 2 - 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{C} = 1 - 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ 和 $\mathbf{D} = -2 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$ 。

证明. 从定义 2.1 对于 TJ3p 广义四元数, Binet 公式对于三阶 Jacobsthal 数以及递推关系 $X_{n+2} = -X_{n+1} - X_n$ 对于 $n \geq 0$, 我们得到

$$\begin{aligned}
7J\mathcal{G}_n^{(3)} &= 7J_n^{(3)} + 7J_{n+1}^{(3)}\mathbf{e}_1 + 7J_{n+2}^{(3)}\mathbf{e}_2 + 7J_{n+3}^{(3)}\mathbf{e}_3 \\
&= 2^{n+1} + X_n - 2X_{n+1} \\
&\quad + [2^{n+2} + X_{n+1} - 2X_{n+2}]\mathbf{e}_1 \\
&\quad + [2^{n+3} + X_{n+2} - 2X_{n+3}]\mathbf{e}_2 \\
&\quad + [2^{n+4} + X_{n+3} - 2X_{n+4}]\mathbf{e}_3 \\
&= 2^{n+1}(1 + 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 8\mathbf{e}_3) + X_n(1 + 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \\
&\quad - X_{n+1}(2 - 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3) \\
&= 2^{n+1}\Theta + X_n\mathbf{A} - X_{n+1}\mathbf{B},
\end{aligned}$$

其中 $\Theta = 1 + 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 8\mathbf{e}_3$, $\mathbf{A} = 1 + 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ 和 $\mathbf{B} = 2 - 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ 。最后一个方程给出了定理中的第一个方程。第二个方程的证明非常相似。 $\square$

前一定理中的符号 $\Theta = 1 + 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 8\mathbf{e}_3$, $\mathbf{A} = 1 + 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{B} = 2 - 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{C} = 1 - 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ 和 $\mathbf{D} = -2 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$ 在本文的其余部分中将被使用。

应注意到

$$\begin{aligned}
\mathbf{BA} &= (2 - 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)(1 + 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \\
&= 2 + 4\mathbf{e}_1 - 6\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \\
&\quad - 3\mathbf{e}_1 + 6\lambda_1\lambda_2 + 9\mathbf{e}_3 + 3\lambda_2\mathbf{e}_2 \\
&\quad + \mathbf{e}_2 - 2\lambda_1\mathbf{e}_3 + 3\lambda_1\lambda_3 + \lambda_3\mathbf{e}_1 \\
&\quad + 2\mathbf{e}_3 + 4\lambda_2\mathbf{e}_2 + 6\lambda_3\mathbf{e}_1 - 2\lambda_2\lambda_3 \\
&= 2 + 6\lambda_1\lambda_2 + 3\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_2\lambda_3 + \mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 + 7(\lambda_3\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_1\mathbf{e}_3) \\
&= \Psi + 7\Omega,
\end{aligned}$$

其中 $\Psi = 2 + 6\lambda_1\lambda_2 + 3\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_2\lambda_3 + \mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$ 和 $\Omega = \lambda_3\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_1\mathbf{e}_3$ 。

然后, 利用方程 (1) 中的乘法规则, 我们得到以下恒等式

$$(4) \quad \mathbf{BA} = \Psi + 7\Omega, \quad \mathbf{AB} = \Psi - 7\Omega$$

和

$$(5) \quad \mathbf{DC} = \Phi + 3\Omega, \quad \mathbf{CD} = \Phi - 3\Omega,$$

其中

$$\begin{aligned}\Psi &= 2 + 6\lambda_1\lambda_2 + 3\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_2\lambda_3 + \mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3, \\ \Phi &= -2 + 2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3 + 2\lambda_2\lambda_3 + 5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3, \\ \Omega &= \lambda_3\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_1\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

方程 (4) 和 (5) 将在下一节中用于简化。应注意的是

$$(6) \quad \mathbf{BA} = \mathbf{AB} + 14\Omega, \quad \mathbf{DC} = \mathbf{CD} + 6\Omega.$$

3. 主要结果

在本节中, 我们介绍了第三阶雅各布斯塔尔数和修正的第三阶雅各布斯塔尔数的一些众所周知的身份的推广。我们从以下定理给出的 TJ3p 和 MTJ3p 广义四元数的 Vajda 身份开始。

定理 3.1. 对于整数 n , a 和 b , 我们有

$$J\mathcal{G}_{n+a}^{(3)}J\mathcal{G}_{n+b}^{(3)} - J\mathcal{G}_n^{(3)}J\mathcal{G}_{n+a+b}^{(3)} = \frac{1}{49} \left\{ \begin{array}{l} 2^{n+1} [\Theta Y_{n+b}(a) - 2^b Y_n(a) \Theta] \\ + X_a [X_b \Xi - 14X_{b+2}\Omega] \end{array} \right\}$$

和

$$K\mathcal{G}_{n+a}^{(3)}K\mathcal{G}_{n+b}^{(3)} - K\mathcal{G}_n^{(3)}K\mathcal{G}_{n+a+b}^{(3)} = \left\{ \begin{array}{l} 2^n [\Theta Y_{n+b}^*(a) - 2^b Y_n^*(a) \Theta] \\ + X_a [X_b \Xi^* - 6X_{b+2}\Omega] \end{array} \right\},$$

其中 $Y_n(a) = X_n(2^a\mathbf{A} + X_{a+2}\mathbf{A} - X_a\mathbf{B}) - X_{n+1}(2^a\mathbf{B} + X_a\mathbf{A} - X_{a+1}\mathbf{B})$, $Y_n^*(a) = X_n(2^a\mathbf{C} + X_{a+2}\mathbf{C} - X_a\mathbf{D}) - X_{n+1}(2^a\mathbf{D} + X_a\mathbf{C} - X_{a+1}\mathbf{D})$, $\Xi = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$ 和 $\Xi^* = \mathbf{C}^2 + \mathbf{CD} + \mathbf{D}^2$ 。

证明. 让我们考虑 $Z_n = X_n \mathbf{A} - X_{n+1} \mathbf{B}$. 使用序列 $\{X_n\}$, $X_{n+a}X_{n+b} - X_nX_{n+a+b} = X_aX_b$ 的 Vajda 身份, 我们有

$$\begin{aligned}
Z_{n+a}Z_{n+b} - Z_nZ_{n+a+b} &= [X_{n+a}\mathbf{A} - X_{n+a+1}\mathbf{B}][X_{n+b}\mathbf{A} - X_{n+b+1}\mathbf{B}] \\
&\quad - [X_n\mathbf{A} - X_{n+1}\mathbf{B}][X_{n+a+b}\mathbf{A} - X_{n+a+b+1}\mathbf{B}] \\
&= [X_{n+a}X_{n+b} - X_nX_{n+a+b}]\mathbf{A}^2 \\
&\quad - [X_{n+a}X_{n+b+1} - X_nX_{n+a+b+1}]\mathbf{AB} \\
&\quad - [X_{n+a+1}X_{n+b} - X_{n+1}X_{n+a+b}]\mathbf{BA} \\
&\quad + [X_{n+a+1}X_{n+b+1} - X_{n+1}X_{n+a+b+1}]\mathbf{B}^2 \\
&= X_aX_b\mathbf{A}^2 - X_aX_{b+1}\mathbf{AB} - X_aX_{b-1}\mathbf{BA} + X_aX_b\mathbf{B}^2 \\
&= X_aX_b\mathbf{A}^2 - X_aX_{b+1}\mathbf{AB} - X_aX_{b-1}(\mathbf{AB} + 14\Omega) + X_aX_b\mathbf{B}^2 \\
&= X_aX_b(\mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} + \mathbf{B}^2) - 14X_aX_{b+2}\Omega \\
&= X_a[X_b\Xi - 14X_{b+2}\Omega],
\end{aligned}$$

其中 $\Xi = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$. 从定理 2.4 中的 TJ3p 广义四元数的 Binet 公式, 我们得到

$$\begin{aligned}
49[J\mathcal{G}_{n+a}^{(3)}J\mathcal{G}_{n+b}^{(3)} - J\mathcal{G}_n^{(3)}J\mathcal{G}_{n+a+b}^{(3)}] &= [2^{n+a+1}\Theta + Z_{n+a}][2^{n+b+1}\Theta + Z_{n+b}] \\
&\quad - [2^{n+1}\Theta + Z_n][2^{n+a+b+1}\Theta + Z_{n+a+b}] \\
&= 2^{n+a+1}\Theta Z_{n+b} + 2^{n+b+1}Z_{n+a}\Theta \\
&\quad - 2^{n+1}\Theta Z_{n+a+b} + 2^{n+a+b+1}Z_n\Theta \\
&\quad + Z_{n+a}Z_{n+b} - Z_nZ_{n+a+b} \\
&= 2^{n+1}[\Theta Y_{n+b}(a) - 2^b Y_n(a)\Theta] \\
&\quad + X_a[X_b\Xi - 14X_{b+2}\Omega],
\end{aligned}$$

其中 $Y_n(a) = X_n(2^a\mathbf{A} + X_{a+2}\mathbf{A} - X_a\mathbf{B}) - X_{n+1}(2^a\mathbf{B} + X_a\mathbf{A} - X_{a+1}\mathbf{B})$. 最后一个方程给出了定理中的第一个方程. 第二个方程的证明非常相似. $\square$

取定理 3.1 中的 $b = -a$, 结合恒等式 $X_{-n} = -X_n$ 和 $X_n = X_{n+3}$ 得到 TJ3p 和 MTJ3p 广义四元数的卡特兰恒等式.

推论 3.2. 令 n 和 a 为两个整数, 使得 $n \geq a$, 我们有

$$J\mathcal{G}_{n+a}^{(3)}J\mathcal{G}_{n-a}^{(3)} - [J\mathcal{G}_n^{(3)}]^2 = \frac{1}{49} \left\{ \begin{array}{l} 2^{n+1}[\Theta Y_{n-a}(a) - 2^{-a}Y_n(a)\Theta] \\ -X_a[X_a\Xi - 14X_{a+1}\Omega] \end{array} \right\}$$

和

$$K\mathcal{G}_{n+a}^{(3)}K\mathcal{G}_{n-a}^{(3)} - \left[K\mathcal{G}_n^{(3)}\right]^2 = \left\{ \begin{array}{c} 2^n [\Theta Y_{n-a}^*(a) - 2^{-a} Y_n^*(a) \Theta] \\ -X_a [X_a \Xi^* - 6X_{a+1} \Omega] \end{array} \right\},$$

其中 $Y_n(a), Y_n^*(a), \Xi$ 和 Ξ^* 如定理 3.1 中所述。

类似地, 在推论 3.2 中取 $a = 1$ 可得到 TJ3p 和 MTJ3p 广义四元数的卡西尼恒等式。

推论 3.3. 对于任意整数 $n \geq 1$, 我们有

$$J\mathcal{G}_{n+1}^{(3)}J\mathcal{G}_{n-1}^{(3)} - \left[J\mathcal{G}_n^{(3)}\right]^2 = \frac{1}{49} [2^n (2\Theta Y_{n-1}(1) - Y_n(1)\Theta) - (\Xi + 14\Omega)]$$

和

$$K\mathcal{G}_{n+1}^{(3)}K\mathcal{G}_{n-1}^{(3)} - \left[K\mathcal{G}_n^{(3)}\right]^2 = 2^{n-1} [2\Theta Y_{n-1}^*(1) - Y_n^*(1)\Theta] - [\Xi^* + 6\Omega],$$

其中 $Y_n(1) = X_n(2\mathbf{A} - \mathbf{B}) - X_{n+1}(3\mathbf{B} + \mathbf{A}), Y_n^*(1) = X_n(2\mathbf{C} - \mathbf{D}) - X_{n+1}(3\mathbf{D} + \mathbf{C}), \Xi$ 和 Ξ^* 如定理 3.1 所示。

例如, 如果在之前的推论中 $n = 1$, 我们得到

$$J\mathcal{G}_0^{(3)} = \frac{1}{7} [2\Theta - \mathbf{B}],$$

$$J\mathcal{G}_1^{(3)} = \frac{1}{7} [4\Theta + \mathbf{A} + \mathbf{B}],$$

$$J\mathcal{G}_2^{(3)} = \frac{1}{7} [8\Theta - \mathbf{A}].$$

然后, 我们可以写出

$$\begin{aligned} 49 \left[J\mathcal{G}_2^{(3)}J\mathcal{G}_0^{(3)} - \left(J\mathcal{G}_1^{(3)}\right)^2 \right] &= [8\Theta - \mathbf{A}] [2\Theta - \mathbf{B}] - [4\Theta + \mathbf{A} + \mathbf{B}]^2 \\ &= -4\Theta(\mathbf{A} + 3\mathbf{B}) - 2(3\mathbf{A} + 2\mathbf{B})\Theta - (\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}\mathbf{A} + \mathbf{B}^2) \end{aligned}$$

和

$$J\mathcal{G}_2^{(3)}J\mathcal{G}_0^{(3)} - \left[J\mathcal{G}_1^{(3)}\right]^2 = \frac{1}{49} [2 (2\Theta Y_0(1) - Y_1(1)\Theta) - (\Xi + 14\Omega)],$$

其中 $Y_0(1) = -(\mathbf{A} + 3\mathbf{B})$ 和 $Y_1(1) = 3\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$ 。

以下恒等式可以通过使用 TJ3p 和 MTJ3p 广义四元数的定义、递推关系和 Binet 公式来证明。

定理 3.4. 对于任意整数 $n \geq 0$, 我们有

$$\begin{aligned} J\mathcal{G}_n^{(3)} + J\mathcal{G}_{n+1}^{(3)} + J\mathcal{G}_{n+2}^{(3)} &= 2^{n+1}\Theta, \\ K\mathcal{G}_n^{(3)} + K\mathcal{G}_{n+1}^{(3)} + K\mathcal{G}_{n+2}^{(3)} &= 7 \cdot 2^n\Theta, \\ K\mathcal{G}_{n+2}^{(3)} &= J\mathcal{G}_{n+2}^{(3)} + 2J\mathcal{G}_{n+1}^{(3)} + 6J\mathcal{G}_n^{(3)}, \\ J\mathcal{G}_{n+2}^{(3)} &= \frac{1}{147} \left[13K\mathcal{G}_{n+2}^{(3)} + 48K\mathcal{G}_{n+1}^{(3)} + 20K\mathcal{G}_n^{(3)} \right], \end{aligned}$$

其中 $\Theta = 1 + 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 8\mathbf{e}_3$ 。

4. TJ3P 和 MTJ3P 广义四元数的和

在本节中, 我们介绍一些关于 TJ3p 和 MTJ3p 广义四元数项之和的结果。以下引理将给出这些数字的一些已知方程。

引理 4.1. 对于任意整数 $n \geq 0$, 我们有

$$(7) \quad \sum_{l=0}^n J_l^{(3)} = \frac{1}{3} \left[J_{n+2}^{(3)} + 2J_n^{(3)} - 1 \right]$$

和

$$(8) \quad \sum_{l=0}^n K_l^{(3)} = \frac{1}{3} \left[K_{n+2}^{(3)} + 2K_n^{(3)} \right].$$

证明. 证明通过对 n 进行归纳很容易。 □

下一个定理给出了三阶雅可布斯塔耳数和修改后的三阶雅可布斯塔耳 3 参数广义四元数的求和公式。

定理 4.2. 令 $n \geq 0$ 为一个整数。则

$$\sum_{l=0}^n J\mathcal{G}_l^{(3)} = \frac{1}{3} \left[J\mathcal{G}_{n+2}^{(3)} + 2J\mathcal{G}_n^{(3)} - (1 + \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3) \right]$$

和

$$\sum_{l=0}^n K\mathcal{G}_l^{(3)} = \frac{1}{3} \left[K\mathcal{G}_{n+2}^{(3)} + 2K\mathcal{G}_n^{(3)} - (9\mathbf{e}_1 + 12\mathbf{e}_2 + 21\mathbf{e}_3) \right].$$

证明. 使用定义 2.1 和公式 (7), 我们得到

$$\begin{aligned}
3 \sum_{l=0}^n J\mathcal{G}_l^{(3)} &= 3 \sum_{l=0}^n \left[J_l^{(3)} + J_{l+1}^{(3)} \mathbf{e}_1 + J_{l+2}^{(3)} \mathbf{e}_2 + J_{l+3}^{(3)} \mathbf{e}_3 \right] \\
&= 3 \sum_{l=0}^n J_l^{(3)} + 3 \left(\sum_{l=0}^n J_{l+1}^{(3)} \right) \mathbf{e}_1 + 3 \left(\sum_{l=0}^n J_{l+2}^{(3)} \right) \mathbf{e}_2 + 3 \left(\sum_{l=0}^n J_{l+3}^{(3)} \right) \mathbf{e}_3 \\
&= J_{n+2}^{(3)} + 2J_n^{(3)} - 1 + \left(J_{n+3}^{(3)} + 2J_{n+1}^{(3)} - 1 \right) \mathbf{e}_1 \\
&\quad + \left(J_{n+4}^{(3)} + 2J_{n+2}^{(3)} - 4 \right) \mathbf{e}_2 + \left(J_{n+5}^{(3)} + 2J_{n+3}^{(3)} - 7 \right) \mathbf{e}_3 \\
&= J_{n+2}^{(3)} + J_{n+3}^{(3)} \mathbf{e}_1 + J_{n+4}^{(3)} \mathbf{e}_2 + J_{n+5}^{(3)} \mathbf{e}_3 \\
&\quad + 2 \left(J_n^{(3)} + J_{n+1}^{(3)} \mathbf{e}_1 + J_{n+2}^{(3)} \mathbf{e}_2 + J_{n+3}^{(3)} \mathbf{e}_3 \right) \\
&\quad - (1 + \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3) \\
&= J\mathcal{G}_{n+2}^{(3)} + 2J\mathcal{G}_n^{(3)} - (1 + \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3).
\end{aligned}$$

另一个恒等式类似, 使用定义 2.1 和公式 (8). $\square$

定理 4.3. 令 $n \geq 0$ 为一个整数。然后

$$(9) \quad J\mathcal{G}_{n+2}^{(3)} - 4J\mathcal{G}_n^{(3)} = -\frac{1}{7} [X_n(5\mathbf{A} + \mathbf{B}) + X_{n+1}(\mathbf{A} - 4\mathbf{B})],$$

$$(10) \quad K\mathcal{G}_{n+2}^{(3)} - 4K\mathcal{G}_n^{(3)} = -X_n(5\mathbf{C} + \mathbf{D}) - X_{n+1}(\mathbf{C} - 4\mathbf{D}).$$

证明. 由定义 2.1 和定理 2.4, 我们得到

$$\begin{aligned}
J\mathcal{G}_{n+2}^{(3)} - 4J\mathcal{G}_n^{(3)} &= \frac{1}{7} [2^{n+3}\Theta + X_{n+2}\mathbf{A} - X_{n+3}\mathbf{B}] \\
&\quad - \frac{4}{7} [2^{n+1}\Theta + X_n\mathbf{A} - X_{n+1}\mathbf{B}] \\
&= \frac{1}{7} [X_{n+2}\mathbf{A} - X_{n+3}\mathbf{B} - 4X_n\mathbf{A} + 4X_{n+1}\mathbf{B}] \\
&= \frac{1}{7} [-X_{n+1}\mathbf{A} - X_n\mathbf{A} - X_n\mathbf{B} - 4X_n\mathbf{A} + 4X_{n+1}\mathbf{B}] \\
&= -\frac{1}{7} [X_n(5\mathbf{A} + \mathbf{B}) + X_{n+1}(\mathbf{A} - 4\mathbf{B})],
\end{aligned}$$

这完成了对 (9) 的证明。方程 (10) 类似地使用定理 2.4. $\square$

以同样的方式我们可以证明下一个结果。

定理 4.4. 令 $n \geq 0$ 为一个整数。则

$$(11) \quad 7J\mathcal{G}_n^{(3)} + K\mathcal{G}_n^{(3)} = 3 \cdot 2^n \Theta + X_n(\mathbf{A} + \mathbf{C}) - X_{n+1}(\mathbf{B} + \mathbf{D}),$$

$$(12) \quad 7J\mathcal{G}_n^{(3)} - K\mathcal{G}_n^{(3)} = 2^n\Theta + X_n(\mathbf{A} - \mathbf{C}) - X_{n+1}(\mathbf{B} - \mathbf{D}),$$

其中 $\Theta = 1 + 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 8\mathbf{e}_3$ 。

5. 结论

本研究介绍了三参数广义四元数, 连续系数的第三阶雅可布斯塔尔数和修改后的第三阶雅可布斯塔尔数。我们获得了这些以前在文献中未定义的新数字。我们提供了一个全面的介绍性研究作为指南。由于这项研究包括一些新结果, 它通过提供关于这些新数字的基本信息为文献做出了贡献。因此, 我们希望我们发现的新数字和属性能为研究提供新的视角。未来的研究方向是通过增加这些数列的多样性来研究广义三阶斐波那契三参数广义四元数的其他恒等式。

REFERENCES

- [1] M. Akyiğit, H. H. Kösal and M. Tosun, *Split Fibonacci quaternions*, Adv. Appl. Clifford Algebr. **23(3)**, 535–545 (2013).
- [2] M. Akyiğit, H. H. Kösal and M. Tosun, *Fibonacci generalized quaternions*, Adv. Appl. Clifford Algebr. **24(3)**, 631–641 (2014).
- [3] D. Bród, *On some properties of split Horadam quaternions*, Acta Univ. Sapientiae, Math. **12(2)**, 260–271 (2020).
- [4] C. K. Cook and M. R. Bacon, *Some identities for Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers satisfying higher order recurrence relations*, Ann. Math. Inform. **41**, 27–39 (2013).
- [5] S. Halıcı and A. Karataş, *On a generalization for Fibonacci quaternions*, Chaos Solitons Fractals **98**, 178–182 (2017).
- [6] Z. İşbilir and N. Gürses, *Horadam 3-parameter generalized quaternions*, Honam Mathematical J. **46(3)**, 407–427 (2024).
- [7] C. Kızılateş and İ. Y. Kibar, *On 3-parameter quaternions with higher order generalized Fibonacci numbers components*, J. Anal. **32(3)**, 1819–1832 (2024).
- [8] G. Morales, *A note on modified third-order Jacobsthal numbers*, Proyecciones **39(2)**, 409–420 (2020).
- [9] G. Morales, *On a generalization for Tribonacci quaternions*, Mediterr. J. Math. **14(6)**, Paper No. 239, 12 p. (2017).
- [10] G. Morales, *Third-order Jacobsthal generalized quaternions*, J. Geom. Symmetry Phys. **50**, 11–27 (2018).
- [11] T. D. Şentürk and Z. Ünal, *3-parameter generalized quaternions*, Comput. Methods Funct. Theory **22(3)**, 575–608 (2022).