

# 兰道尔限制定的量子通量参量逻辑中的耗散

Quentin Herr

imec USA, Kissimmee, FL 34744 USA

(10\*Electronic mail: quentin.herr@imec-int.com)

(10Dated: 2025 年 4 月 10 日)

兰道尔极限之于不可逆逻辑，就如同卡诺循环之于热机。这一极限在绝热量子通量参量子 (aQFP) 中通过复制标准逻辑门的输入来生成可逆逻辑门，并使用“终止”门仅消散热能  $\ln 2kT$  来处理这些复制的输入而得以接近。这种方法消除了传统 aQFP 逻辑中由于反作用力而导致的相关非绝热切换现象。实际的 aQFP 设备存在参数不匹配，这会导致耗散和比特错误率成比例增加。一块包含  $10^9$  个 aQFP 的芯片，其临界电流的实际制造误差控制在  $1\%-1\sigma$ ，电感器的误差为  $5\%-1\sigma$ ，该设备的异常器件会具有  $10^{-31}$  的比特错误率，而理想设备则为  $10^{-71}$ 。片上所有设备的功耗将增加到大约  $7\times$  兰道尔极限。一个处理相关比特流的理想电路每周期消散的分数比特能量与其损失的信息量相符，这符合兰道尔关于逻辑熵的概念。

不可逆逻辑在兰道尔极限下运行<sup>1</sup>将是一个有吸引力的设计点，为传统逻辑功能提供能效。理想情况下，热诱导位错误率与能量耗散完全解耦。位错误率随双稳态势阱中（任意的）势垒高度缩放，而能量耗散随热能缩放。最初的文献指出：“这些考虑不能保证所需的势能在物理上可实现。”<sup>2</sup>

参数夸特龙 (PQ)<sup>3,4</sup>和绝热量子通量参量子 (aQFP)<sup>5</sup>是遵循理想系统非常紧密的约瑟夫森超导逻辑门。例外情况是在复位过程中出现的反作用，此时状态位于上势阱并逃逸到下势阱，能量耗散远高于朗道极限多个数量级。这些门不支持理想系统指定的“井中心薄障壁”<sup>2</sup>。已经描述了一种可逆 aQFP 逻辑函数，该函数避免了反作用<sup>6</sup>，因为状态永远不会位于上势阱中。可逆 aQFP 门的不需要输出可以通过一个“终止”门<sup>7</sup>进行热化处理，其功率耗散仅为朗道极限的水平。

本文展示了如何通过复制输入（与 4 一致）使标准逻辑门可逆，并通过热化这些副本来实现 Landauer 极限。对理想设备以及参数不匹配的设备的能量耗散和比特错误率进行了建模。各种电路配置用于探索可逆操作和 Landauer 限制操作之间的连续谱。展示了串行和并行扇出等重要操作是无耗散的。对相关位流进行逻辑处理所消耗的能量与信息损失成正比，这与 Landauer 关于逻辑熵的原始概念一致。

## 上下文相关门操作

aQFP 具有一个热力学自由度，超导相。一个同构的机械模型由两个通过刚性扭转弹簧连接的物理摆组成。输入和输出信号在摆上产生相同的扭矩；时钟产生等量且方向相反的扭矩。超导相对应于摆的平均角位移。

aQFP 的电路原理图见图 1。典型的 aQFP 电路包括分频器-缓冲器-多数门阶段<sup>8</sup>。同一模型适用于所有用例，它们仅在依赖状态的耦合到所有邻居方面有所不同。而早期建模将门输入视为电流源<sup>5,9</sup>，在互联逻辑门的模型中需要包括输入和输出耦合。

各种情况下 aQFP 的切换事件如图 2 所示。用于生成势能的方程在补充材料中给出。该模型使用了约瑟夫森结临界电流和互连电感<sup>5</sup>， $I_c = 50\mu\text{A}$ ， $L = 1.3\text{pH}$  和  $L_{a-d} = 42\text{pH}$  的公认参数值，并将势能归一化到温度为  $T = 4.2\text{K}$  时的能量。激发的 aQFP 产生了一个超导相位振幅为 2.56 弧度，对应每个输出提供的  $\pm 20\mu\text{A}$ 。信号输入在互连中衰减至  $\pm 10\mu\text{A}$ 。

缓冲级在信号处于输入到 MAJ 门的少数时需要保持稳定性。多数输入信号决定了 MAJ 门的开关极性，但少数信号会从 MAJ 门感受到反馈作用，该作用双精度浮点数信号幅度，将缓冲器置于两个潜在井中较高的一个，导致不可逆、非绝热切换。观察此事件不可逆性的方法是在切换事件发生后倒转时间。缓冲器不会回到它开始的位置，而是会找到较低的势能井。

图 1 中的 NAND 门下半部分具有一个分频器-复

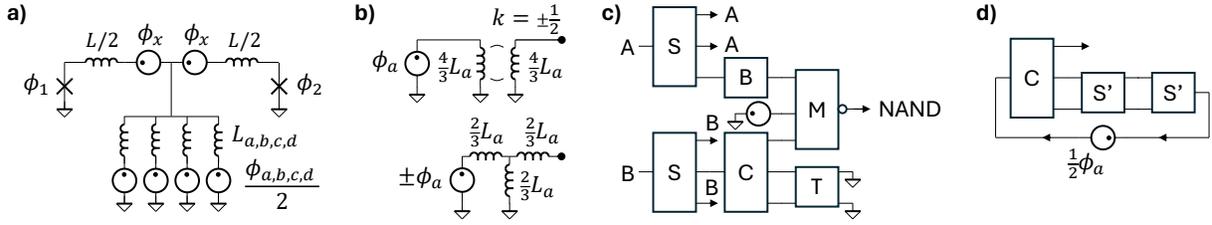


图 1. aQFP 电路示意图。a) 四个并联电感器  $L_{a-d}$  连接到输入和输出的 aQFP，这些 aQFP 被建模为超导相位源。aQFP 由激励相位源  $\phi_x$  驱动和供电，该激励相位源通过变压器耦合到时钟。b) 各阶段之间也使用了变压器耦合，这将相位幅度衰减了一半。耦合常数的符号（顶部）决定了耦合的极性，极性的反转产生逻辑否定。一个等效电路模型（底部）对于正耦合显示了与 (a) 中使用的环路电感和衰减的等价性。c) 一个 NAND 门由 aQFP 阶段组成，每列都由多相时钟的不同相位驱动。两个输入都连接到分裂器 S 以实现扇出。上半部分使用缓冲器 B，确保在来自 MAJ 门 M 的反馈存在的情况下稳定运行。下半部分使用复制门 C，向 MAJ 和终止门 T 进行扇出。缓冲器由于非绝热复位切换而消耗的能量与信号相当，但终止仅消耗热能  $\ln 2kT$ ，这符合 Landauer 极限。d) 供给 MAJ 门的中心恒定逻辑输入由一个常相位源生成，该常相位源与产生类似于其他输入信号的多阶段环路串联连接。相位源的极性决定了输入是逻辑“0”还是“1”。

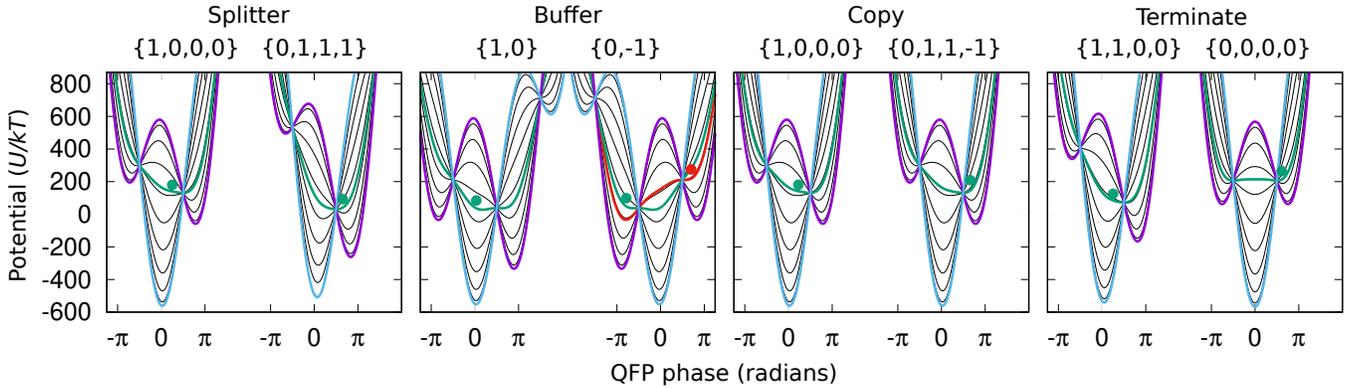


图 2. aQFP 势能作为 aQFP 相位  $\phi_a$  的函数演化，当激发器相位  $\phi_x$  从 0 变化到  $\pi$ （每帧的左半部分）再返回（右半部分）。蓝色线条对应于激发器相位为 0 的情况，紫色线条对应于  $\pi$ 。细线表示在  $\phi_x$  中等间隔分布的中间值。绿色和红色线条是在鞍点处斜率为零的中间值，在所有曲线交汇的地方。每帧都标记有输入/输出的数字值及其对应的逻辑函数。为了说明，与 aQFP 相位相对应的粒子显示在最低能量稍上方，并朝向最小值矢量移动。为清晰起见，仅展示了切换到右侧井的情况。

制-多数配置。当复制门是 MAJ 门的少数输入时，回作用将被终止连接的两个连接所抵消。终止门将其输出短接到地，因此在输入撤销后，所有输入和输出均为零，该门表现出对称双阱势。随着井之间的势垒降低，状态将从单个井中逃逸，并在重新限制到单个井之前占据两个井一段时间。热化过程中的热力学循环是突然膨胀随后等温压缩。突然膨胀通过  $\ln 2k$  增加了熵，就像加倍气体的体积<sup>2</sup>一样，而等温压缩对粒子做功并以热的形式将其排出，以此换取逻辑熵的减少。

该系统中的 aQFPs 从不占据上阱，但在输入已被复位且连接到输出的 aQFPs 尚未被激发的那个周期部分中，它们都会占据一个对称双阱。对称双阱如图 2 所示。在这一周期部分，aQFP 必须保持非平衡状态，由

热激活越过势垒引起的误码率 (BER) 由 Kramers 逃逸速率给出。当前设计中的势垒高度约为  $\Delta U/kT = 500$ ，这在功能上等同于参考文献 2 中规定的任意高势垒。

### 物理可实现的非理想器件

aQFP 是一种真实设备，实际考虑因素包括参数不匹配以及封闭系统中的能效，包括时钟源。参数不匹配会增加传统 aQFP 逻辑操作的误码率，并增加终止器的耗散。在补充材料中，考虑了一个使用  $10^9$  个 aQFP 的芯片，在一个对结临界电流具有  $1\sigma$  控制 (1%) 和对电感器具有  $1\sigma$  控制 (5%) 的工艺中制造。每个终止器的耗散将增加约 7 倍，相当于“15% Landauer 效率”。潜在

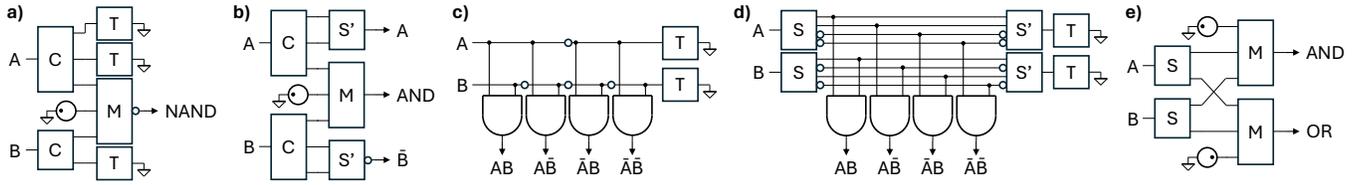


图 3. 各种电路配置通过使用终止功能来消除非绝热切换。a) NAND 门的上半部分使用两个独立的终止，这会使耗散的能量翻倍。下半部分则使用一个剪枝后的复制门，并且只有一个连接用于终止，但这个复制门本身会在其作为 MAJ 中的少数输入时发生耗散。b) 复制的输出可以被导出而不是终止，并选择性地反转。c) 通过级联 (b) 中的门来实现二到四地址解码器，整个电路只需两个终止点。d) 同样的解码器功能是通过并行广播地址输入至所有门来实现的。并行信号可以重新组合，整个电路再次只需要两个终止点。e) 生成逻辑与和或的电路使用一对直接连接到两个 MAJ 门上的分路器。这些分路器仅在输入信号不同时耗散热能。

障碍  $\Delta U$  在图 2 中显示的会被降低 0.43 倍对于离群值来说，但仍会产生优于  $10^{-23}$  的全芯片错误率。这样非理想的 aQFPs 会经历性能的平滑下降。相比之下，在可逆计算的台球模型<sup>10</sup>中，非理想性会导致完全失败。

当粒子被提升时，很多工作都是按照时钟进行的，但当粒子再次降低时，这些工作能量会返回到源处，除了缓冲区中的非绝热切换和终止阶段的等温压缩外。这些事件不能通过例如室温下生成的时钟来热化。相反，aQFPs 需要在更高温度下保持良好的热隔离，这通过弱耦合和窄带宽时钟得以实现。由 aQFP 产生的热量必须根据低温冷却器的效率进行调整以找到插墙损耗，但在室温下排放热量的时钟生成器对总功率预算只做出很小的贡献。与参考 11 中报告的光流体系统相比，这个全电系统相当高效，在该光流体系统中控制中的耗散远高于热能多个数量级。

### 功率耗散和逻辑熵

图 3 中的各种电路配置说明了功率耗散与逻辑熵之间的关系。两个并联的终端在功能上等同于单个终端。然而，使用多个设备会增加热力学自由度和耗散。如图 1 所示，一个连接到 MAJ 输入的复制门，并通过单个连接来终止，可以避免由于反作用引起的非绝热切换，但在发生反作用时会在复制门中耗散热能。

复制的输入不必终止，如果它们可以被后续逻辑门重用。将一个阶段的输出串联到下一个阶段的输入中，就像在二到四地址解码器中那样，会产生类似于可逆电路的示意图。在这种配置下，输入多次使用，但只需终止一次。输入也可以并行分散到各个门，且包括否定在内的并行信号的熵仍为单个比特。这些信号

可以重新组合，这涉及一个反向操作的分离器，并发送到单一终止点。这是可能的，因为复制位和删除副本在逻辑上是可逆的操作<sup>12</sup>。在文献 6 中报道的可逆电路中，被终止的是辅助门输出而不是门输入的副本。

图 3e 所示的电路产生逻辑与和或。在输入不同时，该门在分裂器上消耗热能。从物理层面来看，不同的输入导致 MAJ 门输出不同。复位期间分裂器的输入和输出的数字值分别为  $\{0,1,-1\}$  和  $\{0,-1,1\}$ 。这些信号总和为零，复位周期类似于终止。当输入不同时丢失一位信息；无法从输出完全重构输入，但知道它们是不同的。在这种情况下，复位周期使两个分裂器中的每个之一热化。当输入相等时没有反作用力，门不消耗能量，也没有信息丢失。

表 I. 或与逻辑熵和耗散

A	B	$P_i$	$S_i/k$	AB	A+B	$P_f$	$S_f/k$	$Q/kT$
0	0	$\alpha = 1/2 - 2\varepsilon$	$\alpha \ln 1/\alpha$	0	0	$\alpha$	$\alpha \ln 1/\alpha$	0
0	1	$\varepsilon$	$\varepsilon \ln 1/\varepsilon$	0	1	$2\varepsilon$	$2\varepsilon \ln 1/2\varepsilon$	$2\varepsilon \ln 2$
1	0	$\varepsilon$	$\varepsilon \ln 1/\varepsilon$	-	-	-	-	$2\varepsilon \ln 2$
1	1	$1/2$	$1/2 \ln 2$	1	1	$1/2$	$1/2 \ln 2$	0

考虑一个玩具纠错方案，当接收器阈值设置过低时有效，并且逻辑“0”有时会注册为逻辑“1”。比特流被复制，并使用或-与门进行错误校正。按照兰道尔的方法<sup>1</sup>，该系统的熵在表 I 中给出，对于误差概率  $\varepsilon$ 。比特对是完全相关的，并且除了比特错误外包含单个信息位。逻辑熵的减少，即初始值和最终值之间的差异，为  $S_i - S_f = 2\varepsilon \ln 1/\varepsilon k - 2\varepsilon \ln 1/2\varepsilon k = 2\varepsilon \ln 2 k$ 。或-与电路中的耗散正好是兰道尔极限的两倍，并且随着误差概率趋于零而缩放至任意低值。

兰道尔极限下的 aQFP 是一种物理上可实现的设

备，作为探索计算最终极限的有效手段。适度的时钟速率、高延迟和由弱耦合引起的高时钟幅度限制了其在高性能数字逻辑中的实际应用。以每单位芯片面积每秒操作次数表示的计算密度大约比传统的 SFQ 电路低  $1000\times$  倍<sup>13</sup>。该设备可能在 mK 温度下作为量子比特控制和读出的辅助电路具有实际价值<sup>14</sup>。

## ACKNOWLEDGMENTS

该工作得到了佛罗里达州奥西奥拉县的支持。

## 补充材料

aQFP 潜能由<sup>5,9</sup>

$$U = \frac{I_c \Phi_0}{2\pi} \left[ \frac{(\phi_x - \phi_-)^2}{\beta_L} + \frac{(\phi_{in} - \phi_+)^2}{\beta_L + 2\beta_q} - 2 \cos \phi_- \cos \phi_+ \right], \quad (1)$$

给出，其中  $\phi_+ = 1/2(\phi_1 + \phi_2)$  是 aQFP 约瑟夫森结的平均相位， $\phi_- = 1/2(\phi_1 - \phi_2)$  是相差的一半，而  $\phi_x$  是激励器相位。归一化的电感是  $\beta_L = 2\pi L I_c / \Phi_0$  和  $\beta_q = 2\pi L_q I_c / \Phi_0$ ，其中  $L_q$  是输入和输出互连电感的并联组合。

为了在二维空间中绘制 aQFP 的势能，使得势能达到最小值  $\phi_{-,min}$  可以用其他相位参数来表示。设定  $dU/d\phi_- = 0$  得到  $\phi_x - \phi_- = \beta_L \sin \phi_- \cos \phi_+$ 。对于  $\beta_L \ll 2\beta_q$ ， $\phi_-$  大约等于  $\phi_x$ <sup>5</sup>。将  $\phi_- = \phi_x + \varepsilon$  和一阶  $\sin(\phi_x + \varepsilon) \simeq \sin \phi_x + \varepsilon \cos \phi_x$  代入得到

$$\phi_{-,min} \simeq \phi_x - \frac{\beta_L \sin \phi_x \cos \phi_+}{1 + \beta_L \cos \phi_x \cos \phi_+}. \quad (2)$$

在图 2 中，函数  $U(\phi_+)$  绘制了不同的激励器  $\phi_x$  和信号  $\phi_{in}$  的值，在将方程 2 代入方程 1 之后。

图 2 中的曲线在  $\phi_+ = \pm\pi/2$  处相交。可以在交叉处找到最小值的曲线可以通过确定对应的  $\phi_x$  值来绘制。设置  $dU/d\phi_+ = 0$  得到

$$\phi_{x,cross} = \arccos \left( \frac{\pm\phi_{in} - \pi/2}{\beta_L + 2\beta_q} \right).$$

在绝热极限下，开关事件期间门处于平衡状态，并且误码率由占据上势阱的概率  $BER = 1/2 \operatorname{erfc}(-\Delta U/kT)$  给出。一个简单的估计值用于  $\Delta U$ ，即井之间的能量差，由所有曲线交叉点

处的  $\phi_+ = \pm\pi/2$  点给出。交点处的电势差是

$$\Delta U_{cross} = \alpha \frac{I_c \Phi_0 \phi_{in}}{\beta_L + 2\beta_q} = \alpha \frac{\Phi_0^2}{L + 2L_q} \frac{\phi_{in}}{2\pi}, \quad (3)$$

，其中  $\Phi_0 = h/(2e) \simeq 2.07 \text{ mA pH}$  是单磁通量子 (SFQ)。因子  $\alpha$  对于井目标参数值来说为一。这个估计值等同于互连信号的  $1/2 L I^2$  能量。（在一个简单的近似中，输入电感器之一中的信号在正确切换下完全被吸收并且幅度归零，但在错误切换下幅度加倍。）分离器 and 具有混合输入的 MAJ 门都具有信号强度  $\phi_{in} = 2.56/8$ ，这给出了  $\Delta U/kT = 168$  并且 BER 可以忽略不计为  $10^{-71}$ 。

由于器件参数不匹配导致逻辑门中的误码率升高可以被量化。如果一个输入电感器的目标值低了 33%，而另外两个高了 33%，那么在较小的电感器上的少数信号将与另两个电感器上相反极性的信号具有相同的权重，这会导致电路完全失效。类似地，如果临界电流在相反方向上每个都偏离了  $5 \mu\text{A}$ ，阈值会偏移  $10 \mu\text{A}$ ，等于输入信号，并再次导致完全失效。较小的偏差会产生  $\Delta U$  的线性减少，因此公式 3 中的预因子是  $\alpha = 5(\delta i_c - \delta i'_c) + \frac{a}{1 + \delta l_a} + \frac{b}{1 + \delta l_b} + \frac{c}{1 + \delta l_c} + \frac{d}{1 + \delta l_d}$ , (4)

其中  $\delta$  表示归一化到标称值的参数偏差。数字 {a,b,c,d} 的取值为  $\pm 1$  或 0，表示 aQFP 输入和输出的数字值。

考虑一个具有  $10^9$  aQFPs 的芯片，该芯片是在对结的临界电流控制为  $1\sigma 1\%$ ，电感器控制为  $1\sigma 5\%$  的工艺中制造的。预计有几个器件会出现  $6\sigma$  偏差。然而，具有最坏影响的  $6\sigma$  事件在所有五个电路元件上都有累加的  $2.3\sigma$  偏差。由于可以选择两种接点失配的方式，然后有三种方式选择最坏情况的电感失配，

$$1/2 \operatorname{erfc}(6/\sqrt{2}) \simeq 2 \cdot 3 \cdot [1/2 \operatorname{erfc}(2.3/\sqrt{2})]^5 \simeq 10^{-9}.$$

这种最坏情况参数组将使等式 3 中的  $\Delta U$  降低一个因子，该因子给定在等式 4 中为  $\alpha = 5(-0.023 \cdot 2) + 2/1.115 - 1/0.885 = 0.43$ 。 $\Delta U$  减少到低于目标值的一半，但仍表明每个设备的  $BER = \exp(-73) \simeq 10^{-32}$  非常低，并且优于每颗芯片的  $10^{-23}$ 。

约瑟夫森结的参数不匹配轻微倾斜了双重势阱，导致非绝热切换并在终止时增加了能量耗散。电感器的不匹配并不重要，因为所有信号均为零，而此处关键的是约瑟夫森结器件不匹配的平均值。对于标准差为  $\sigma$  的正态分布参数，期望值为

$$|\delta i_c - \delta i'_c| \simeq 1.128\sigma/I_c.$$

再次参考公式 3 和公式 4,  $\alpha = 0.0565$  和  $\Delta U_{\text{mis}} = 9kT$ 。终止状态仅在粒子位于上势阱时才会耗散这些能量, 即只有一半的时间。总体而言, 可以认为终止状态耗散的平均值为  $4.5kT$ , 电路以兰道效率的 15% 运行。

- <sup>1</sup>R. Landauer, “Irreversibility and heat generation in the computing process,” *IBM journal of research and development* **5**, 183–191 (1961) .
- <sup>2</sup>R. W. Keyes and R. Landauer, “Minimal energy dissipation in logic,” *IBM Journal of Research and Development* **14**, 152–157 (1970) .
- <sup>3</sup>K. Likharev, “Dynamics of some single flux quantum devices: I. Parametric quantron,” *IEEE Transactions on Magnetics* **13**, 242–244 (1977) .
- <sup>4</sup>K. K. Likharev, “Classical and quantum limitations on energy consumption in computation,” *International Journal of Theoretical Physics* **21**, 311–326 (1982) .
- <sup>5</sup>N. Takeuchi, K. Ehara, K. Inoue, Y. Yamanashi, and N. Yoshikawa, “Margin and energy dissipation of adiabatic quantum-flux-parametron logic at finite temperature,” *IEEE transactions on applied superconductivity* **23**, 1700304–1700304 (2012) .
- <sup>6</sup>N. Takeuchi, Y. Yamanashi, and N. Yoshikawa, “Reversibility and energy dissipation in adiabatic superconductor logic,” *Scientific reports* **7**, 75 (2017) .
- <sup>7</sup>T. Yamae, N. Takeuchi, and N. Yoshikawa, “Minimum energy dissipation required for information processing using adiabatic quantum-flux-parametron circuits,” *Journal of Applied Physics* **135** (2024) .

- <sup>8</sup>C. L. Ayala, T. Tanaka, R. Saito, M. Nozoe, N. Takeuchi, and N. Yoshikawa, “Mana: A monolithic adiabatic integration architecture microprocessor using 1.4-zj/op unshunted superconductor Josephson junction devices,” *IEEE Journal of Solid-State Circuits* **56**, 1152–1165 (2020) .
- <sup>9</sup>H. L. Ko and G. S. Lee, “Noise analysis of the quantum flux parametron,” *IEEE transactions on applied superconductivity* **2**, 156–164 (1992) .
- <sup>10</sup>E. Fredkin and T. Toffoli, “Conservative logic,” *International Journal of theoretical physics* **21**, 219–253 (1982) .
- <sup>11</sup>A. Bérut, A. Arakelyan, A. Petrosyan, S. Ciliberto, R. Dillenschneider, and E. Lutz, “Experimental verification of Landauer’s principle linking information and thermodynamics,” *Nature* **483**, 187–189 (2012) .
- <sup>12</sup>C. H. Bennett, “Notes on landauer’s principle, reversible computation, and maxwell’s demon,” *Studies In History and Philosophy of Science Part B: Studies In History and Philosophy of Modern Physics* **34**, 501–510 (2003) .
- <sup>13</sup>Q. Herr, T. Josephsen, and A. Herr, “Superconducting pulse conserving logic and Josephson-SRAM,” *Applied Physics Letters* **122** (2023) .
- <sup>14</sup>A. Berkley, M. Johnson, P. Bunyk, R. Harris, J. Johansson, T. Lanting, E. Ladizinsky, E. Tolkacheva, M. Amin, and G. Rose, “A scalable readout system for a superconducting adiabatic quantum optimization system,” *Superconductor Science and Technology* **23**, 105014 (2010) .