

一种局部傅里叶扩展方法用于函数逼近*

ZHENYU ZHAO[†] AND YANFEI WANG[‡]

摘要. 本文提出了一种新的局部傅里叶扩展方法, 通过域分割来近似非周期函数。通过对计算域进行子区域划分并采用统一离散尺度, 该方法实现了具有 $\mathcal{O}(M)$ 计算复杂度的谱精度。理论误差界限和参数依赖性分析验证了所提方法的鲁棒性。建立了涉及关键参数之间的关系, 并伴有一项优化参数选择策略。数值实验进一步证实了所提出方法的有效性。

Key words. 傅里叶扩展, 傅里叶连续

AMS subject classifications. 42A10, 65T40, 65T50

1. 介绍. 数值逼近方法是计算数学的基石, 在理论进步和工程应用中都扮演着至关重要的角色。经典的逼近理论不仅为构造微分方程的数值解提供了必要的工具, 而且持续推动了多学科的技术创新。例如, 谱方法的高精度特性从根本上源于对多项式逼近和傅里叶级数展开 [12] 的全面研究。同时, 小波多尺度分析通过在时频局部化性质上的突破, 为诸如图像压缩和信号去噪 [6] 等实际应用建立了严格的数学基础。

在最近几十年中, 框架近似理论作为函数表示的一个范式转移发展, 由于其超越传统基约束的增强灵活性而吸引了显著的关注 [1, 7, 2]。该框架采用冗余表示系统的同时保持稳定性, 从而表现出对复杂功能特征的优越适应性。特别引人注目的是傅里叶扩展技术——这是一种原型框架近似方法, 通过将目标函数扩展到更大的周期域来有效缓解经典傅里叶逼近中的吉布斯现象。这一方法为处理非周期函数开辟了新的途径, 同时保持谱精度 [8, 4, 11, 5, 14]。

傅里叶扩展方法的收敛性质在 [1, 3, 8, 13] 中进行了全面讨论。关于数值实现, 通过对离散矩阵的奇异值分布与随机化算法相结合的分析取得了显著进展。值得注意的是, [9] 和 [10] 开发了快速算法实现了 $\mathcal{O}(M \log^2 M)$ 复杂度, 其中 M 表示节点点数。在此基础上, [15] 提出了一种更有效的方法, 该方法仅使用边界数据进行扩展操作, 并结合基于 FFT 的全局逼近, 达到 $\mathcal{O}(M \log M)$ 复杂度。

虽然这些现有的方法采用了全局近似视角, 但出现了两个基本的限制: 首先, 函数中的局部奇异性会显著降低全局近似的精度。其次, 由此产生的密集离散化矩阵使得这些方法不太适合与其他数值方案结合使用。从 [15] 得到的关键见解表明, 增加扩展长度可以减少所需的边界节点——这一原则我们通过区域分解扩展

*The research is partially supported by National Natural Science Foundation of China (No. 12171455, RSF-NSFC 23-41-00002)

[†]School of Mathematics and Statistics, Shandong University of Technology, Zibo, 255049, China, (Zhenyu_Zhao@sdut.edu.cn).

[‡]Key Laboratory of Petroleum Resources Research, Institute of Geology and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100029, China, (yfwang@mail.iggcas.ac.cn).

到了内部区域。

本文提出了一种分区扩展方法，其中计算域被划分为多个子区域以进行局部扩展操作。通过在子域中采用统一的离散化尺度，我们实现了矩阵复用，并将整体计算复杂度降低至 $O(M)$ ，同时保持了近似质量。这种结构化的方法不仅提高了计算效率，还自然地适用于并行实现架构。

1.1. 论文概述. 论文采用以下组织框架：第 2 节构建了方法论架构，通过严谨的数学证明介绍了理论框架和相关的误差分析。在这一理论基础之上，第 3 节通过对系统参数进行调查研究计算实现，并提出了基于计算复杂性分析的参数选择实用指南。随后的第 4 节通过全面的数值实验验证了所提出的方法论。最后一节总结关键发现，讨论该方法在计算数学中的更广泛影响，并提出了未来研究的方向。

2. 局部傅里叶扩展方法.

2.1. 方法概述. 令 f 是区间 $I = [a, b]$ 上的一个非周期性、光滑且足够可微的函数。点 $a = a_0 < a_1 < \dots < a_K = b$ 将 I 分成 K 个子区间 $I_1, I_2, \dots, I_K$ 。令函数 $f_k(x)$ 在区间 I_k 上定义，满足：

$$f_k(x) = f(x), \quad x \in I_k, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (2.1)$$

令 $\Omega = [0, 2\pi]$, $\Lambda = [0, \frac{2\pi}{T}](T > 1)$ 。 $\{g_k(t)\}_{k=1}^K$ 是一个定义在 Λ 上的函数族，使得

$$g_k(t) = f_k(a_{k-1} + s_k t), \quad \forall t \in \Lambda, \quad (2.2)$$

其中

$$s_k = \frac{T}{2\pi}(a_k - a_{k-1}). \quad (2.3)$$

令

$$\phi_\ell(t) = e^{i\ell t}, \quad \ell = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad t \in \Lambda. \quad (2.4)$$

对于任何固定的 N ，我们定义

$$\Phi_N = \{\phi_\ell\}_{|\ell| \leq N}, \quad (2.5)$$

它是其张量 $\text{span}(\Phi_N) =: H_N$ 的一个框架。定义算子

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_N : \mathbb{C}^{2N+1} &\rightarrow H_N, & \mathbf{c}_N = \{c_\ell\}_{|\ell| \leq N} &\mapsto \sum_{\ell=-N}^N c_\ell \phi_\ell, \\ \mathcal{L}_N : \mathbb{C}^{2N+1} &\rightarrow \mathbb{C}^{2N+1}, & \mathbf{c}_N = \{c_\ell\}_{|\ell| \leq N} &\mapsto \tilde{\mathbf{c}}_N = \{\rho_\ell c_\ell\}_{|\ell| \leq N}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

由于 $\mathcal{F}_N$ 是有限秩的，它是一个紧算子。设 (σ_j, v_j, u_j) 为 $\mathcal{F}_N$ 的一个奇异系统，则方程

$$\mathcal{F}_N \mathbf{c}_{N,k} = g_k \quad (2.7)$$

的 TSVD 解可以表示为

$$\mathbf{c}_{N,k}^\epsilon = \sum_{\sigma_j > \epsilon} \frac{\langle g_k, u_j \rangle}{\sigma_j} v_j, \quad (2.8)$$

其中截断参数 ϵ 作为正则化参数。然后得到 g_k 的傅里叶扩张近似 $\mathcal{Q}_N^\epsilon g_k$ 为

$$\mathcal{Q}_N^\epsilon g_k := \mathcal{F}_N \mathbf{c}_{N,k}^\epsilon. \quad (2.9)$$

我们使用

$$(\mathcal{P}_{N,K}^\epsilon f)(x) := (\mathcal{Q}_N^\epsilon g_k) \left(\frac{x - a_{k-1}}{s_k} \right), \quad x \in I_k, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (2.10)$$

作为函数 f 的局部傅里叶扩张近似。

2.2. 方法的误差估计. 我们可以得到以下误差估计:

LEMMA 2.1. 傅里叶扩展近似 $\mathcal{Q}_N^\epsilon g_k$ 满足

$$\|g_k - \mathcal{Q}_N^\epsilon g_k\|_{L^2(\Lambda)} \leq \inf\{\|g_k - \mathcal{F}_N \mathbf{c}_N\|_{L^2(\Lambda)} + \epsilon \|\mathbf{c}_N\|_{\ell^2} : \mathbf{c}_N \in \mathbb{C}^{2N+1}\}. \quad (2.11)$$

Proof. 对于任意的 $\mathbf{c}_N \in \mathbb{C}^{2N+1}$, 注意 $\mathcal{Q}_N^\epsilon$ 是到 $\tilde{H} = \text{span}\{u_j : \sigma_j > \epsilon\}$ 的正交投影算子, 通过使用三角不等式, 我们可以得到

$$\begin{aligned} \|g_k - \mathcal{Q}_N^\epsilon g_k\|_{L^2(\Lambda)} &\leq \|g_k - \mathcal{Q}_N^\epsilon \mathcal{F}_N \mathbf{c}_N\|_{L^2(\Lambda)} \\ &\leq \|g_k - \mathcal{F}_N \mathbf{c}_N\|_{L^2(\Lambda)} + \|\mathcal{F}_N \mathbf{c}_N - \mathcal{Q}_N^\epsilon \mathcal{F}_N \mathbf{c}_N\|_{L^2(\Lambda)} \end{aligned}$$

此外, 由于 $\mathcal{F}_N \mathbf{c}_N \in H_N = R(\mathcal{F}_N)$, 我们有

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_N \mathbf{c}_N - \mathcal{Q}_N^\epsilon \mathcal{F}_N \mathbf{c}_N\|_{L^2(\Lambda)} &= \left\| \sum_{\sigma_j \leq \epsilon} \langle \mathcal{F}_N \mathbf{c}_N, u_j \rangle u_j \right\|_{L^2(\Lambda)} \\ &= \left\| \sum_{\sigma_j \leq \epsilon} \sigma_j \langle \mathbf{c}_N, v_j \rangle u_j \right\|_{L^2(\Lambda)} \\ &\leq \epsilon \|\mathbf{c}_N\|_{\ell^2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

这完成了证明。□

THEOREM 2.2. 局部傅里叶扩展逼近 $\mathcal{P}_{N,K}^\epsilon f$ 满足

$$\|f - \mathcal{P}_{N,K}^\epsilon f\| \leq \sqrt{\frac{T}{2\pi}(b-a)} \max_{1 \leq k \leq K} \left\{ \|g_k - \mathcal{Q}_N^\epsilon g_k\|_{L^2(\Lambda)} \right\}. \quad (2.13)$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\|f - \mathcal{P}_{N,K}^\epsilon f\|_{L^2(I)}^2 &= \int_0^1 [f(x) - (\mathcal{P}_{N,K}^\epsilon f)(x)]^2 dx \\
&= \sum_{k=1}^K \int_{a_{k-1}}^{a_k} \left[f_k(x) - (\mathcal{Q}_N^\epsilon g_k) \left(\frac{x - a_{k-1}}{s_k} \right) \right]^2 dx \\
&= \sum_{k=1}^K \int_{\Lambda} s_k [g_k(t) - (\mathcal{Q}_N^\epsilon g_k)(t)]^2 dt \\
&\leq \frac{T}{2\pi} \sum_{k=1}^K (a_k - a_{k-1}) \|g_k^c - g_k\|_{L^2(\Lambda)}^2.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

□

备注 2.1.

1. 我们可以看到, 对于函数 $f(x) = e(i\pi\omega x)$, 其对应的

$$g_k(t) = e^{i\omega\pi a_{k-1}} e^{i\omega\pi s_k t}. \tag{2.15}$$

即, 该函数的频率从 $\omega\pi$ 变化到 $s_k\omega\pi$ 。因此, 对于高频函数, 只要区间划分能够保证所选的 $a_k - a_{k-1}$ 足够小, 就能在扩展计算中起到降低频率的作用, 从而使仅需一个小的 N 就能实现高精度逼近。

2. 结合 (2.11) 和 (2.13) 的结果, 我们可以看到方法能否获得良好的近似结果主要取决于每个子区间上的扩展近似是否能实现所需的精度。根据逼近理论, 对于低频函数 $g(t)$, 总是存在一个适当的值 N , 使得可以找到向量 $\mathbf{c}_N$, 从而使 $\|g - \mathcal{F}_N \mathbf{c}_N\|_{L^2(\Lambda)} = \mathcal{O}(\epsilon)$ 和 $\|\mathbf{c}_N\|_{\ell^2}$ 不会太大。

3. 数值实现与参数确定. 在特定问题中, 子区间的长度 I_k 不一定是相同的。当函数 f 在整个区间 $[a, b]$ 上的频率变化很大时, 根据频率设置区间长度是一个更好的选择。这可以通过事后测试近似误差来实现。为了确保后续扩展计算过程中离散矩阵的一致性, 我们在每个子区间中取相同数量的等距节点。也就是说, 我们取 K 组节点 $\{x_{ki}\}_{i=1}^m, k = 1, 2, \dots, K$:

$$x_{ki} = a_{k-1} + ih_k, \quad h_k = \frac{a_k - a_{k-1}}{m-1}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \tag{3.1}$$

3.1. 方程的离散化 (2.7). 取采样比例 $\gamma \geq 1$ 并令

$$m = \lceil \gamma(2N+1) \rceil,$$

其中 $\lceil \cdot \rceil$ 是取整符号。选择参数 N, γ, T 并令

$$L = \lceil T \times m \rceil, \quad h = \frac{2\pi}{L}, \quad t_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \tag{3.2}$$

然后我们得到方程 (2.7) 的离散形式:

$$\mathbf{F}_{\gamma,N}^T \mathbf{c}_{N,k} = \mathbf{g}_k, \quad (3.3)$$

其中

$$(\mathbf{F}_{\gamma,N}^T)_{i,\ell} = \frac{1}{\sqrt{L}} \phi_\ell(t_i), \quad (\mathbf{g}_k)_i = \frac{1}{\sqrt{L}} g_k(t_i) = \frac{1}{\sqrt{L}} f_k(x_{ki}). \quad (3.4)$$

$\mathbf{F}_{\gamma,N}^{T,p}$ 的 SVD 可以表示为

$$\mathbf{F}_{\gamma,N}^T = \sum_{j=1}^{2N+1} \mathbf{u}_j \sigma_j \mathbf{v}_j^T, \quad (3.5)$$

其中 σ_j 是 $\mathbf{F}_{\gamma,N}^T$ 的奇异值, 满足

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_{2N+1} \geq 0,$$

而 $\mathbf{u}_i$ 和 $\mathbf{v}_i$ 分别是 $\mathbf{F}_{\gamma,N}^T$ 的左、右奇异向量。

现在, (3.3) 的 TSVD 解可以表示为

$$\mathbf{c}_{N,k}^\epsilon = \sum_{\sigma_j > \epsilon} \frac{\langle \mathbf{g}_k, \mathbf{u}_j \rangle}{\sigma_j} \mathbf{v}_j \quad (3.6)$$

我们得到 $\mathcal{Q}_N^\epsilon g_k$ 的离散逼近:

$$\mathbf{Q}_N^\epsilon \mathbf{g}_k = \mathbf{F}_{\gamma,N}^T \mathbf{c}_{N,k}^\epsilon. \quad (3.7)$$

3.2. 关键参数的数值测试. 通过简单的分析, 我们可以初步看到各种参数对算法性能的影响: 参数 m 控制子区域扩展期间的计算复杂度, 而参数 K 控制函数 $g_k(t)$ 的频率特性, 从而决定 N 的大小。产品 $T\gamma$ 决定了区间 $[0, 2\pi]$ 上的离散步长, 这关键性地影响了算法收敛。此外, 产品 Km 集体决定了操作域 $[a, b]$ 中的总节点数。接下来, 我们将通过有针对性的数值实验系统地考察这些参数关系。

我们取 $a = -1, b = 1$ 并研究具有均匀分布分割点 a_k 的配置。具体来说, 令 $M = K(m-1), h = \frac{2}{M}$, 节点坐标构造如下:

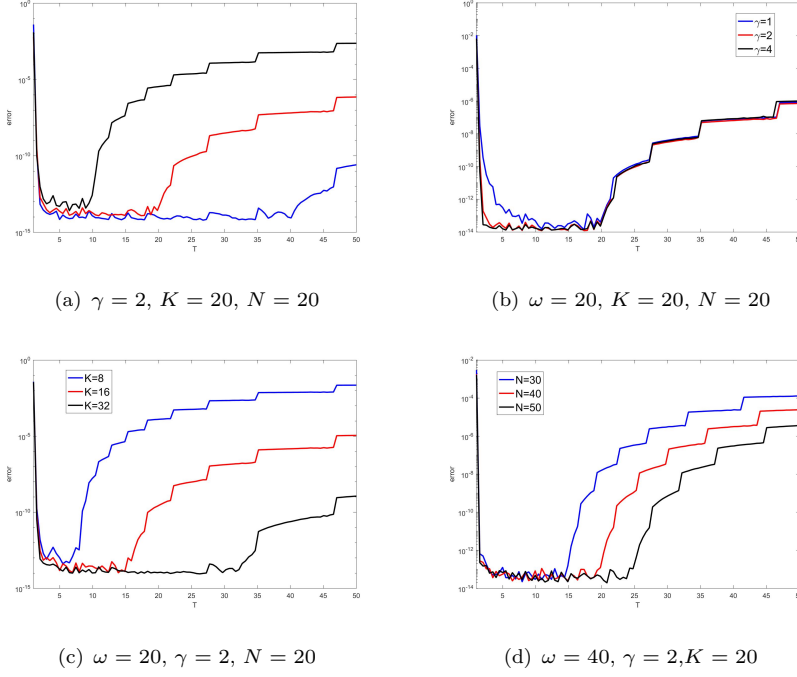
$$x_{ki} = -1 + (k-1)(m-1)h + ih, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad i = 0, 1, \dots, m-1.$$

对于数值测试, 我们采用振荡测试函数:

$$f(x) = e^{i\pi\omega x}.$$

我们首先量化参数 T 与其他参数之间的相互作用。在整个实验过程中, 近似误差被计算为在更精细的评估网格 (比构造网格更密集的 $10\times$) 上的最大点间误差, 正则化参数固定为 $\epsilon = 1e-14$ 。

如图 3.1 所示, 当参数 T 位于特定区间 $[T_1, T_2]$ 内时, 所提出的方法仅能达到机器精度。下界 T_1 完全由参数 γ 决定, 而上界 T_2 则依赖于多个参数: ω 、 N 和

图 3.1. 近似误差 对于 不同值的 T , ω , γ , N 和 K 。

K 。这种行为源于基本关系 $T\gamma$ ，它决定了区间 $[0, 2\pi]$ 内的离散步长，从而影响离散矩阵 $\mathbf{F}_{\gamma, N}^T$ 对算子 $\mathcal{F}_N$ 的逼近，并最终决定每个子区间的收敛特性。图 3.1(b)清楚地说明了 T_1 和 γ 之间的反比关系，显示随着 γ 的增加， T_1 的值减少。此外，如方程 (2.15) 所示，在子区间上对 $g_k(t)$ 的有效近似需要满足以下条件：

$$N \geq \frac{\omega T}{K}. \quad (3.8)$$

这种关系给出了上限估计值：

$$T_2 \leq \frac{KN}{\omega}, \quad (3.9)$$

这与图中呈现的数值结果一致。这些结果也反映了我们预期使用固定 N 值进行计算的可能性。具体来说，对于高频函数，在常数 N 下，可以通过战略性增加参数 K 来保持公式 (3.8) 的有效性。公式 (3.8) 也揭示了一个关键关系： T 的扩展需要更大的 K 值，这对应着更细的区间划分。因此，我们更关心不同 γ 对应的 T_1 的值。我们测试了这一点，并且结果如表 3.1 所示。

我们现在建立在一般低频函数逼近中达到谱精度所需的最小参数幅度 N 。我们使用三个代表性的频率进行数值实验： $\omega \in \{\sqrt{2}, e^2, \sqrt{2\pi}\}$ 。

图 3.2 揭示了两个基本的收敛特性：

1. 指数误差衰减：随着 N 的增加，近似误差超代数地减少，在达到临界阈值 N_0 时实现谱精度。

表 3.1
 T_1 的近似值对于各种 γ 。

	$\gamma = 1$	$\gamma = 1.2$	$\gamma = 1.5$	$\gamma = 2$	$\gamma = 3$	$\gamma = 4$
T_1	5.6	4.5	3.9	2.3	1.6	1.2

表 3.2
 N_0 的近似值对于各种 T 。

	$T = 1.1$	$T = 1.5$	$T = 2$	$T = 4$	$T = 6$	$T = 10$	$T = 15$
N_0	78	29	18	10	9	7	5

2. 参数依赖性：收敛阈值 N_0 展现了：

- 仅依赖于 T 。随着 T 的增加， N_0 的值减少。
- 对 K 的变化具有免疫力，尽管 K 在频率调制中发挥作用。

3.3. 计算复杂性分析和参数确定。 根据上一节的测试结果，本文中的算法可以使用固定的 $N_\Delta \geq N_0$ 进行计算。整体算法流程可以描述如下：1. 给定分割点 $a_{k=1}^K$ ，参数 T ， γ ， N_Δ 和 ϵ 。2. 形成离散矩阵 $\mathbf{F}_{\gamma, N_\Delta}^T$ 并对它进行 SVD 分解，选择 $\sigma_j \geq \epsilon$ 和相应的 $\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j$ 。3. 对于 $k = 1, 2, \dots, K$ ，计算 $\tilde{\mathbf{c}}_{N_\Delta, k}^\epsilon$ 。

在此设置下，每个子区间中的节点数为 $m_\Delta = \gamma(2N_\Delta + 1)$ ， $L_\Delta = Tm_\Delta = T\gamma(2N_\Delta + 1)$ 。在整个区间 $[a, b]$ 上的节点数为 $M = Km_\Delta$ 。算法的计算复杂度分为以下部分：

- 矩阵 $\mathbf{F}_{\gamma, N_\Delta}^T$ 的生成及其 SVD 分解，计算复杂度为

$$\mathcal{O}(N_\Delta^3) \sim \mathcal{O}(1).$$

需要注意的是，由于方法中 $\mathbf{F}_{\gamma, N_\Delta}^T$ 是固定的，这一步的计算可以提前完成并存储。

- 系数 $\mathbf{c}_{N_\Delta, k}$ 的计算量为

$$C_\Delta \times m_\Delta \times K = C_\Delta M$$

其中 C_Δ 是大于 ϵ 的 σ_j 数量，我们有

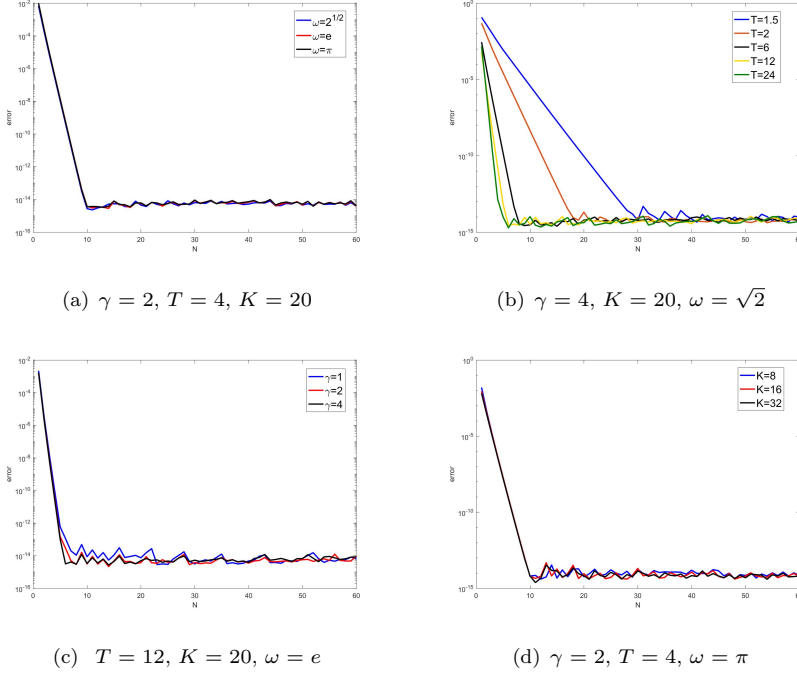
$$C_0 \leq 2N_\Delta + 1.$$

因此，计算复杂度是

$$\mathcal{O}(M).$$

- 获取每个子区间的扩展数据，这可以通过 IFFT 实现，计算复杂度是

$$K \times \mathcal{O}(L_\Delta \log(L_\Delta)) \sim \mathcal{O}(M).$$

图 3.2. 近似误差针对 N 的不同值的 ω, γ, T 和 K 。

结合之前的测试结果，我们实际上希望产品 $T\gamma N_{\Delta}$ 被最小化，因此我们建议使用参数

$$\gamma = 1, T = 6, N_{\Delta} = 9 \quad (3.10)$$

进行实际计算。在这种情况下

$$m_{\Delta} = \gamma \times (2N_{\Delta} + 1) = 19, L_{\Delta} = T \times m_{\Delta} = 114.$$

4. 数值示例. 在本小节中，给出了一些数值实验来验证提出的方法。所有测试均在配备 16 GB 内存的 Windows 10 系统上使用 MATLAB 2016b 进行计算，处理器为 Intel(R) Core(TM)i7-8500U CPU1.80GHz。

示例 1 我们取测试函数为

$$f_1(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

图 4.1(a)显示了使用分区点 $a_k \in \{-1 + \frac{2k}{K}\}$ 在十个采样点处绝对逼近误差的分布。关键观察结果显示：在 $K = 4$ ，边界相邻区域的误差接近机器精度{向内部区域逐渐降低准确性}。这种空间模式反映了函数的频率特性： $f_1(x)$ 在靠近边界的地方表现出更平滑的行为，而与内部区域的高频相比则不然。将分区密度加倍至 $K = 8$ 使两个中心子区间保持在机器精度阈值之上，而 $K = 12$ 使得所有子区间

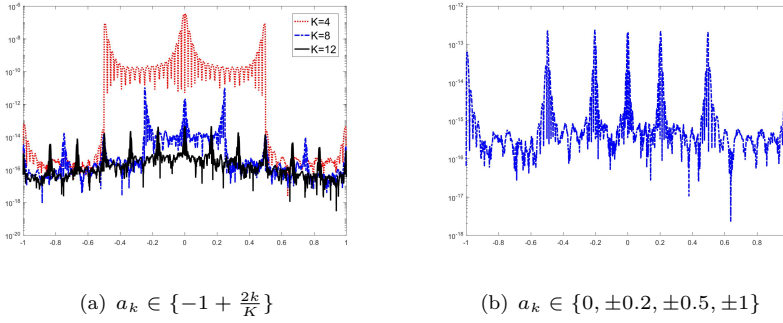


图 4.1. 绝对逼近误差的分布。

的误差接近机器精度。这一进展表明，通过预先了解函数振荡频率来战略性定位分区点可以实现稀疏离散化下的机器级别精度。支持证据出现在图 4.1(b)中，比较非均匀分区 $a_k \in \{0, \pm 0.2, \pm 0.5, \pm 1\}$ 的误差。虽然可以采用自适应采样技术进一步优化分区位置，但此类扩展超出了我们当前的研究范围。

示例 2 接下来，我们取测试函数为

$$f_2(x) = \cos(200x^2), \quad f_3(x) = \text{Ai}(-66 - 70x), \quad f_4(x) = e^{\sin(65.5\pi x - 27\pi) - \cos(20.6\pi x)}.$$

其中 $\text{Ai}(\cdot)$ 表示 Airy 函数。图 4.2(a)–4.2(c)显示了这些函数的图像，揭示了它们显著的高频振荡行为。图 4.2(d)描述了当 K 增加时这三个函数近似误差的变化情况。值得注意的是，只要 K 超过与函数频率相关的值，算法就可以获得接近机器精度的近似值，展示了该方法在解析高频特征时具备近乎最优数值精度的能力。

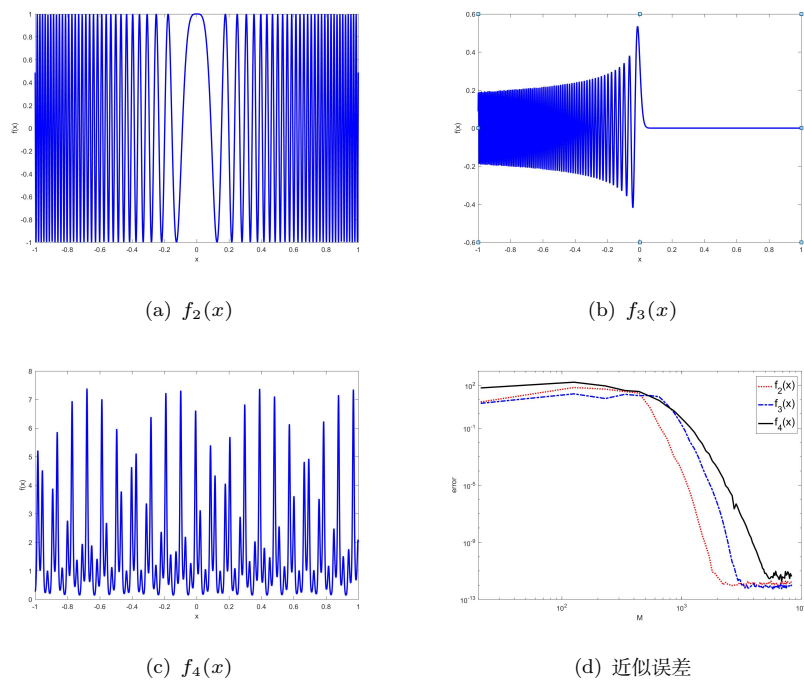
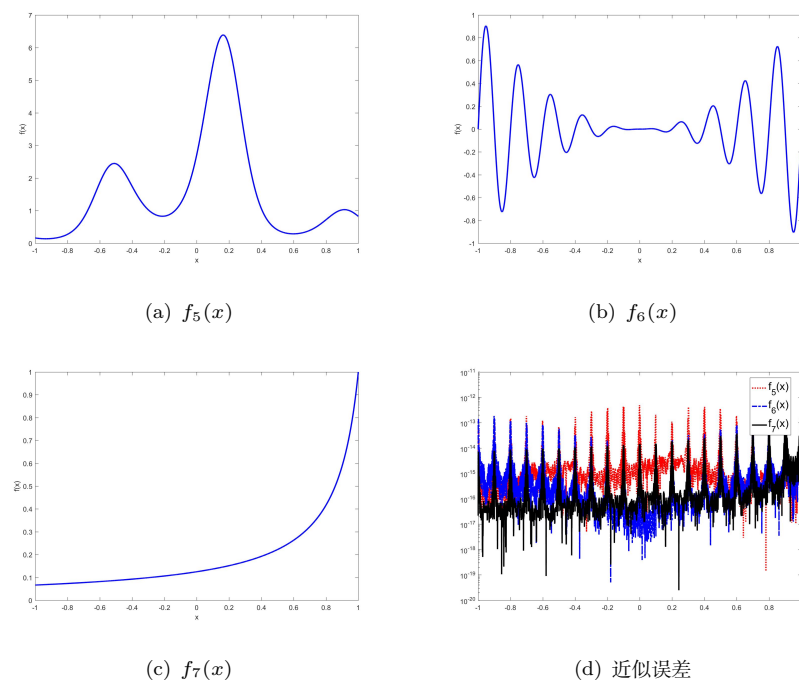
示例 3 在众多计算问题中，采用一致的离散化尺度来近似不同的函数通常是必不可少的。为了展示这一能力，我们保持固定的离散化级别为 $K = 20$ ，并评估以下代表性测试函数：

$$f_5(x) = e^{\sin(2.7\pi x) + \cos(\pi x)}, \quad f_6(x) = x^2 \sin(10x), \quad f_7(x) = \frac{1}{8 - 7x}.$$

。图 4.3(a)–图 4.3(c)展示了这些函数的图形表示，而图 4.3(d)比较了我们的方法产生的逼近误差。结果表明，在相同的离散化参数下，所提出的方法在这些功能不同的情况下实现了相当的逼近精度。这种一致的表现突显了我们框架在处理不同功能性形式方面的方法灵活性，正如尽管函数特性各异但误差分布均匀所示。

5. 结论和备注. 我们以一些最终的评论结束本文。

- **方法论框架：**我们提出了一种新的局部傅里叶扩展方案，通过域分割实现分段低阶逼近。该框架建立了关键参数 T 和 γ 之间的分析关系，并附有优化的参数选择策略。这种表述最终产生了一个具有 $\mathcal{O}(M)$ 计算复杂度的同时保持指数收敛率的谱近似算法。

图 4.2. 函数 f_2 , f_3 , f_4 及其与 M 的逼近误差。图 4.3. 函数 f_5, f_6, f_7 及其近似误差分布。

- 泛化潜力：所提出的定位方法自然扩展到多项式框架近似和其他框架系统。未来的研究将系统地比较它们相对于我们当前框架的优缺点，特别是关于逼近效率、稳定性阈值和计算开销。
- 方法论转移：开发的框架通过适当的算子变换展示了对更广泛问题类别的内在适应性。为不同的计算场景建立通用实现协议将是未来研究的主要重点，特别是在偏微分方程求解和高维逼近任务中。

参考文献

- [1] BEN ADCOCK AND DAAN HUYBRECHS, *Frames and numerical approximation*, SIAM Review, 61 (2019), pp. 443–473.
- [2] ———, *Frames and numerical approximation ii: generalized sampling*, Journal of Fourier Analysis and Applications, 26 (2020), p. 87.
- [3] B. ADCOCK, D. HUYBRECHS, AND J. MARTÍN-VAQUERO, *On the numerical stability of Fourier extensions*, Foundations of Computational Mathematics, 14 (2014), pp. 635–687.
- [4] O. P. BRUNO AND M. LYON, *High-order unconditionally stable FC-AD solvers for general smooth domains I. basic elements*, Journal of Computational Physics, 229 (2010), pp. 2009–2033.
- [5] O. P. BRUNO AND J. PAUL, *Two-dimensional Fourier continuation and applications*, SIAM Journal on Scientific Computing, 44 (2022), pp. A964–A992.
- [6] JONATHAN COHEN AND AHMED I ZAYED, *Wavelets and multiscale analysis: theory and applications*, Springer Science & Business Media, 2011.
- [7] ASTRID HERREMANS AND DAAN HUYBRECHS, *Efficient function approximation in enriched approximation spaces*, IMA Journal of Numerical Analysis, (2024), p. drae017.
- [8] D. HUYBRECHS, *On the Fourier extension of nonperiodic functions*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 47 (2010), pp. 4326–4355.
- [9] M. LYON, *A fast algorithm for Fourier continuation*, SIAM Journal on Scientific Computing, 33 (2011), pp. 3241–3260.
- [10] R. MATTHYSEN AND D. HUYBRECHS, *Fast algorithms for the computation of Fourier extensions of arbitrary length*, SIAM Journal on Scientific Computing, 38 (2016), pp. A899–A922.
- [11] G. PLONKA, D. POTTS, G. STEIDL, AND M. TASCHE, *Numerical Fourier Analysis*, Springer, 2018.
- [12] JIE SHEN, TAO TANG, AND LI-LIAN WANG, *Spectral methods: algorithms, analysis and applications*, vol. 41, Springer Science & Business Media, 2011.
- [13] M. WEBB, V. COPPÉ, AND D. HUYBRECHS, *Pointwise and uniform convergence of Fourier extensions*, Constructive Approximation, 52 (2020), pp. 139–175.
- [14] ZHENYU ZHAO, YANFEI WANG, ANATOLY G YAGOLA, AND XUSHENG LI, *A new approach for fourier extension based on weighted generalized inverse*, arXiv preprint arXiv:2501.16096, (2025).
- [15] Z. Y. ZHAO, Y. F. WANG, AND A. G. YAGOLA, *Fast algorithms for Fourier extension based on boundary interval data*, arXiv preprint arXiv:2409.04265, (2024).