

非互易约瑟夫森结中的内在非互易性及其非正弦电流相位关系

R.A. Hovhannisyan*

Department of Physics, Stockholm University, AlbaNova University Center, SE-10691 Stockholm, Sweden

约瑟夫森结 (JJs) 具有非正弦电流-相位关系 (CPRs)，这引起了越来越多的关注，部分原因是拓扑二维材料的兴趣日益增加。了解 CPR 和 JJ 中的不均匀性如何影响它们的响应对于准确解释实验观测至关重要。本文报道了非正弦 CPR 与 JJ 中的不对称性相结合可以打破空间对称性并导致短结区域内的约瑟夫森二极管效应 (JDE)。这种非互易性被证明是与超电流最大化相关的内在机制，而不仅仅是几何或材料不对称驱动的。进一步分析表明，JDE 效率受到 CPR 形状的强烈影响，但基本上不受结不对称性的敏感影响，使得观察到的非互易性不仅是非传统 CPRs 的潜在实验特征，也是探测它们特性的可能方法。

JJs 具有对外部刺激的高度非线性响应，使得在超导电子学中出现了一系列独特的现象 [1–4]。这些器件的一个关键特性是 CPR。虽然 CPR 最初被推导为正弦波形 [5, 6]，但现在已普遍认为实际结点可能表现出与这些简单形式的显著偏差 [7–29]。

具有非正弦 CPR 的 JJ 在均匀磁场和均匀临界电流密度分布 $J_c(x)$ 下的性质至今已经通过实验 [19, 23, 30] 和理论 [11, 31] 得到了充分研究。然而，在许多实验情况下，由于结的几何形状非均匀性 [1, 32]、量子霍尔效应 [33, 34]、边缘态 [35] 等原因，这些理想条件无法重现。尽管以前考虑过这种情况，但据我所知，还没有对非均匀电流密度分布对 JJ 性质的影响进行实质性分析，特别是在长结极限下。

另一个激励本研究的动力源于对基于二维材料的超导结的日益增长的兴趣 [16–29]，这些材料通常表现出非常规的 CPR。最近，Ref. [36] 证明了非正弦电流-相位关系 (CPR) 的不对称 SQUID 中出现二极管效应。此外，Ref. [37] 报告了由于 Josephson 结中不对称临界电流 (J_c) 导致的非互易行为的实验观察。然而，二维材料中的 JDE 也可以由多种其他机制引起，包括自旋轨道相互作用 (SOI) [38, 39] 或晶体结构中固有的反演对称性缺失 [40]。此外，外部因素如应用的磁场 [41] 或混合异质结构中的邻近效应 [42] 也可能导致非互易超导传输的出现（更多内容请参见综述 [43] 及其参考文献）。因此，区分不对称的 J_c 与其他机制的能力对于正确解释观察到的非互易行为至关重要。

在这封信中，我系统地分析了非正弦 CPRs 对 JJ

临界电流 $I_c(H)$ 磁依赖性的影响。通过探索短接合区和长接合区两种情况，我发现当关键电流密度 $J_c(x)$ 的不对称与非正弦 CPRs 结合时，在短接合区极限下会导致非互易行为。通过一个直接的理论分析，我展示了在这个区域中，非互易性作为临界电流最大化机制的一个内在结果出现。进一步分析 JDE，考虑到接合区的不对称性和 CPR 的形式，表明尽管最大二极管效率 η 对 CPR 形状高度敏感，但它可以在相对较小不对称性的 JJ 中出现，并且仅轻微受到其程度的影响。这种灵敏度的差异可能提供了一种实用的方法，可以从不对称 JJ 的 JDE 测量中提取 CPR 特征。

我首先考虑短接合情况，其中约瑟夫森结的尺寸可以被认为小于约瑟夫森穿透深度，即 $L \ll \lambda_J$ 。在这种情况下，可以忽略 JJ 对磁场的屏蔽效应，由此产生的相移可以通过以下关系表示：

$$\varphi = \frac{2\pi d_{\text{eff}}}{\Phi_0} H + \phi \quad (1)$$

其中， $\Phi_0 = H_0 d_{\text{eff}} L$ 是磁通量子， d_{eff} 是结的有效厚度，而 H 是外部磁场。方程 1 中的项 ϕ 是一个积分常数。

临界电流则表示为：

$$I_s(H) = \max_{\phi} \left[\int_{-L/2}^{L/2} J_c(x) f(\varphi, x) dx \right], \quad (2)$$

其中， J_c 是临界电流密度分布， $f(\varphi, x)$ 表示适当的 CPR，它可以取任意形式，这取决于接点的性质 [11]。然而，为了简化问题，将忽略 CPR 的空间分布。

为了进一步分析，我们重点关注了两种主要类型

* razmik.hovhannisyan@fysik.su.se

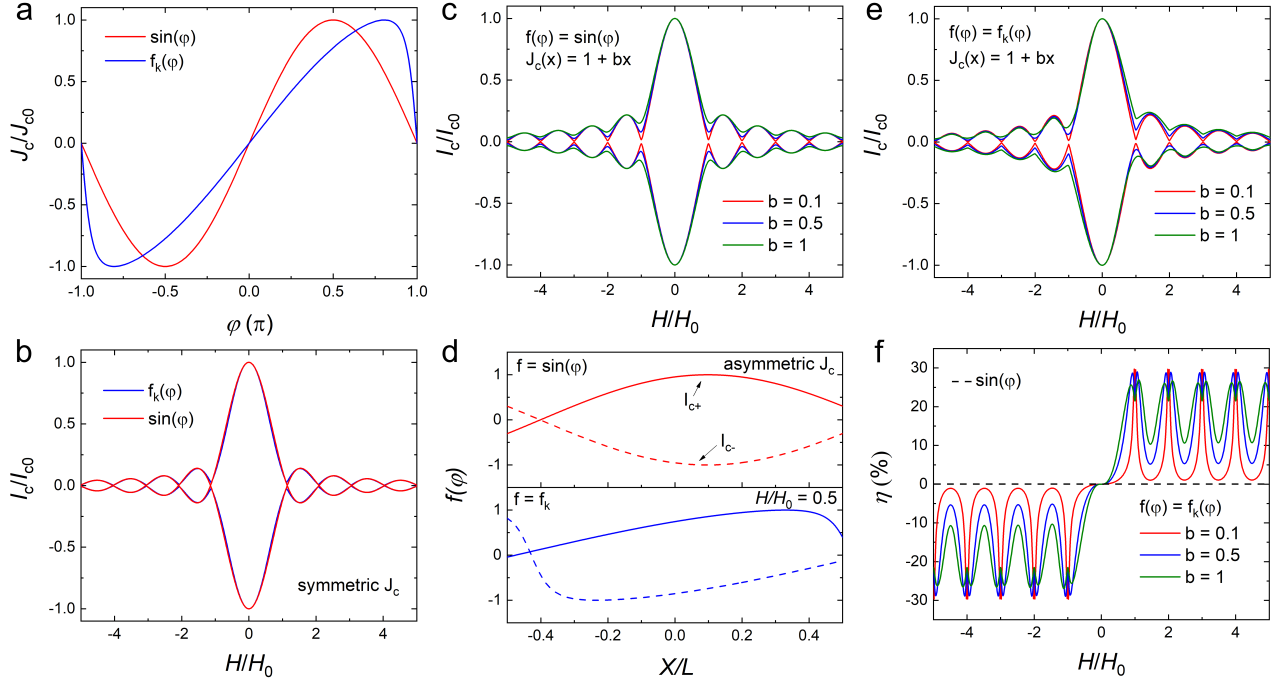


图 1. 二极管效应在一个电流密度分布不均匀且具有非平凡电流-相位关系的 JJ 中。(a) 计算中使用的 CPRs: 由方程 3 描述的正弦 CPR (红线) 和由方程 4 给出的非正弦 CPR (蓝线), 对应透明度参数 $D = 0.99$ 。(b) JJ 的归一化临界电流 I_c 作为外加磁场的函数, 使用图 (a) 所示的 CPRs 计算得出, 基于对称的临界电流密度分布 $J_c(x) = 1 + x^2/L^2$ 。(c) 依赖于不对称临界电流密度 $J_c(x) = 1 + bx/L$ 和正弦 CPR 的 $I_c(H)$ 。曲线展示了随着 b 的增加, 较大的节点提升, 同时保持时间反演和空间对称性。(d) $f(\varphi)$ 的空间分布对于 I_{c+} (实线) 和 I_{c-} (虚线), 在穿过结的磁场对应于半个磁通量子, 即 $H/H_0 = 0.5$, 以及 $b = 0.5$ 。(e) 非正弦 CPR 如 (a) 中所示的临界电流 I_c 作为磁场的函数, 以及如 (c) 所示的非对称 $J_c(x)$ 。该 JJ 展现了空间对称性的破坏同时保持时间反演对称性。(f) 对应于 (e) 中 $I_c(H)$ 曲线的二极管效率, 作为施加磁场的函数进行评估。虚黑曲线展示了在 (c) 情况下不存在 JDE。

的 CPRs 图 1 (a) 及其各自的分析。第一种是普通的正弦关系:

$$f = \sin \varphi. \quad (3)$$

第二个对应于狭窄 SNS 型结的清洁极限 [10]:

$$f_k = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - D \sin^2(\varphi/2)}}, \quad (4)$$

其中 D 是透明度参数。

图 1(b) 展示了在透明度参数 $D=0.99$ 的情况下, 对于正弦波 (Eq. 3) 和非正弦波 (Eq. 4) 的 CPRs, 在 $J_c(x) = 1 + x^2/L^2$ (边缘状态引起的不均匀性) 对称分布下的计算出的 $I_c(H)$ 依赖关系。可以看出, 在这两种情况下, CPR 形式的影响对临界电流依赖的整体形状几乎没有影响。在模拟过程中, 我们测试了多种正弦波和非正弦波的对称 $J_c(x)$ 和 $f(\varphi)$ 依赖关系, 并且没有观察到与之前实验结果有显著差异。此外, 负方

向和正方向的临界电流在幅度上相等 $I_{c+} = I_{c-}$, 显示没有 JDE 的证据。

相比之下, 图 1(c) 和图 1(e) 展示了数值计算的 $I_c(H)$ 依赖关系, 该依赖关系是基于临界电流密度的不对称线性分布给出的, 即 $J_c(x) = 1 + bx/L$ (由梯度引起的非均匀性), 对于不同的倾斜参数 b 值。

首先, 可以观察到在两种情况下, 临界电流依赖性表现出节点提升, 与对称的 $J_c(x)$ 图 1(b) 相反。此外, 对于 $f(x) = \sin x$ (图 1(c)), 临界电流 I_{c+} 和 I_{c-} 在任何施加的磁场下保持相等, 表明空间和时间反演对称性得以保留。确实, 如果任何 $\phi = \varphi_0$ 最大化了等式 2, 那么 $\varphi_0 + \pi$ 就会最小化它 (参见图 1(d) 的顶部面板, 在施加的磁场等于一半磁通量子时相位的空间分布)。

另一方面, 图 1(e) 揭示了在结长度内临界电流 $I_{c+} \neq I_{c-}$ 和相位空间分布的显著不对称性, 如图 1(d)

底部面板所示。这导致了一个效率为：

$$\eta = \frac{I_{c+} - I_{c-}}{I_{c+} + I_{c-}}, \quad (5)$$

的 JDE, 如图 1(f) 所示。

为了进一步研究不对称结中非互易性的出现, 我们计算了在 $I_c(H)$ 模式的第一个最小值附近达到的最大效率 η , 作为透射率参数 D (方程 4 中) 和不对称比率 b 的函数。图 2(a) 和 (b) 分别展示了这些计算的结果。可以观察到, 效率表现出强烈的类似指数的依赖性于 CPR。有趣的是, 与 CPR 不同, 最大实现的非互易性对 $J_c(x)$ 的不对称性表现出低敏感度, 在 η 内显示出阶梯状上升, 并在 $b < 0.05$ 范围内有一个缓慢衰减的尾部, 随着总不对称性的增加。请注意, $J_c(x)$ 的不对称性强烈影响了 $\eta(H)$ 随磁场的整体行为 (参见图 1(f))。

最后, 我们使用有限长度结的正弦-戈登形式主义 [44] 计算了二极管效率依赖性, 适用于两种 CPR。结果如图所示 2(c)。与短结限制相比, 现在两种 CPR 都表现出显著的 η , 这是由于 JJ 的自场效应所致, 这种现象也被称为涡旋棘轮效应 [45–48]。对于足够长的结 ($L/\lambda_J > 9$), 两种 CPR 收敛到渐近效率 $\eta = 55\%$ 。然而, 它们在更小的 L/λ_J 处开始发散, 在 $L/\lambda_J < 4$ 处变得明显。 $\sin(\varphi)$ 曲线在 $\eta \simeq 40\%$ 处达到峰值, 而 f_k 达到显著更高的 $\eta \simeq 65\%$ 。如预期的那样, 正弦 CPR 的效率消失为 $L \rightarrow 0$, 而其他部分保留了 $\eta \simeq 30\%$ 的残余非互易性, 这与图 2 (a) 和 (b) 一致。

因此, 我们研究了具有非均匀临界电流密度 $J_c(x)$ 和不同类型的 CPR 的 JJ 的性质。为了理解在短接点区域观察到的非互易性的原因, 需要仔细分析方程 1–4。一般来说, JJ 的 CPR 可以写成傅里叶分量的和。

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\varphi) \quad (6)$$

其中 a_n 表示每个单独傅里叶谐波的振幅。

式 2 可以在假设离散傅里叶变换 $J_c(x)$ 为已知的情况下解析求解, 这些频率是根据外部磁场 H 定义的:

$$A_n = \int_{-L/2}^{L/2} J_c(x) \cos\left(\frac{2\pi d_{\text{eff}}}{\Phi_0} n H x\right) dx, \quad (7)$$

$$B_n = \int_{-L/2}^{L/2} J_c(x) \sin\left(\frac{2\pi d_{\text{eff}}}{\Phi_0} n H x\right) dx. \quad (8)$$

将式 6 和 A_n 及 B_n 的表达式代入式 2, 得到:

$$I_c(H) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n A_n \sin(n\phi) + a_n B_n \cos(n\phi)). \quad (9)$$

此外, 关于约瑟夫森自由相位 ϕ 的最大化可归结为求解一个三角方程:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n a_n A_n \cos(n\phi) - n a_n B_n \sin(n\phi)) = 0. \quad (10)$$

在典型的实验中, 可以忽略高阶谐波。在这种情况下, 公式 10 被简化为求解一个 n 阶多项式方程 [31]。

现在约瑟夫森二极管效应的出现变得明显。在对称的 J_c (即 x 的偶函数) 情况下, 方程 8 中的被积函数成为奇函数, 因此 $B_n = 0$ 。此外, 由式 9 给出的 $I_c(\phi)$ 是 ϕ 的奇函数, 满足 $I_c(\phi) = -I_c(-\phi)$ 。因此, 如果 $\phi = \varphi_0$ 最大化了临界电流, 则 $\phi = -\varphi_0$ 最小化了它。此外, 由于被积函数具有固有的 2π 周期性, 公式 7 中的积分对于任何 $H = k\Phi_0/Ld_{\text{eff}}$ 都消失。因此, 在这些条件下不会发生临界电流的节点提升。

这种推理在非对称的 $J_c(x)$ 情况下变得无效, 因为偶对称性的假设不再成立。这可能导致 B_n 具有非零值, 并因此导致非对称的 $I_c(\phi)$ 。 $I_c(\phi)$ 中的这种不对称性可能会引起节点提升和 JDE 的出现。请注意, 这些论点对于正弦 CPR 或任何其他具有平移对称性的 CPR (即 $f(\varphi) = -f(\varphi + a)$) 是不成立的。

重要的是, 这种非互易性的机制从根本上不同于长接头区域的情况, 因为它不涉及自场效应。这一现象可以从以下事实中看出: 与长接头不同, 在短接头区域内, $I_c(H)$ 的主要峰值出现在 $H = 0$ 处, 如图 1(c,e) 所示。非互易性的同时存在和自场效应的缺失可以解释为依赖于 $I_c(H)$ 的非正弦 CPR 的独特标志。

此外, 由于最大二极管效率几乎与 $J_c(x)$ 的不对称性无关, 但强烈依赖于 CPR, 测量 η 可以作为确定约瑟夫森结固有属性 (如其透射率 D) 的工具。

η 在有限长度连接近似中的显著不同行为无法简单解释。这是由于两种机制之间更为复杂的相互作用: 自场和内在机制。然而, 图 2(c) 显示, 在相当长的连接极限下, 自场机制超过了内在机制, 而在短连接区域, 只有内在机制是活跃的。此外, 在 $1 < L/\lambda_J < 4$ 的 η 中, 过渡长度的整体差异大约为 25%, 这接近于两种 CPR 之间内在机制的剩余 $\eta \simeq 30\%$, 突显了这种相互作用。

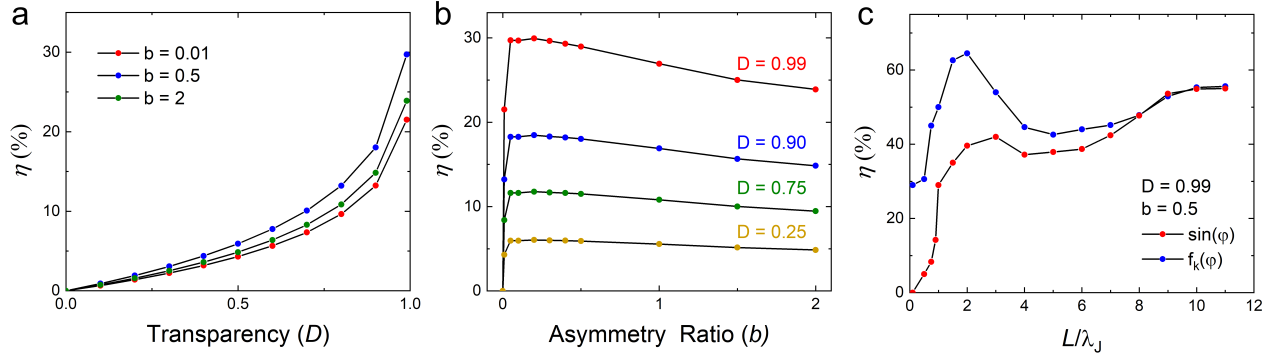


图 2. 最大 JDE 对不同接合参数的依赖性 (a) 二极管效率 η 作为 CPR 透明度参数 D 的函数 (公式 4)。随着透明度的提高, 观察到 η 有显著增加, 这突显了 CPR 形式对非互易性的重要影响。(b) η 作为不对称参数 b 在临界电流密度分布 $J_c(x) = 1 + bx/L$ 中的函数。尽管对于 b 的小值可以看到 η 的阶梯式增加, 但总体上对不对称性的敏感性较弱。(c) 二极管效率 η 与归一化结长度 L/λ_J 的关系。在短接头区域 ($L/\lambda_J \ll 1$), 非正弦 CPR 由于内在机制表现出剩余的 JDE, 而在长接头区域 ($L/\lambda_J > 9$), 两种 CPR 都显示出由自场 (棘轮) 效应驱动的渐近二极管效率 ($\sim 55\%$)。过渡区 ($1 < L/\lambda_J < 4$) 揭示了内在机制和自场机制之间的复杂相互作用。

总之, 我考察了 CPR 对单个 JJ 在短和有限长度状态下的性质的影响。在短结点极限下, 表明非对称临界电流密度导致 $I_c(H)$ 明显发散, 这种现象高度依赖于 CPR, 并且在非正弦 CPR 的情况下表现为非互易性。在此状态下对 JDE 的理论分析及其与有限长度结点近似的比较突出了这一效应源自内在机制, 独立于自场贡献。此外, 还证明即使在具有极小不对称性的 JJs 中也能出现非互易性, 揭示了 CPR 对临界电流

调制的独特指纹。这些发现表明, JDE 测量可以作为探测内在 JJ 参数 (如 CPR) 的工具。

ACKNOWLEDGMENTS

作者感谢 Denis A. Bandurin 博士、A. Kudriashov、Vladimir M. Krasnov 教授和 S. Grebenchuk 的见解深刻的讨论和宝贵的反馈, 这些都对这项工作做出了贡献。

-
- [1] Barone, A. & Paterno, C. Physics and Applications of the Josephson Effect (J. Wiley & Sons, New York, USA, 1982).
 - [2] Likharev, K.K. Superconducting weak links. *Reviews of Modern Physics*, **51**(1), 101 (1979).
 - [3] Likharev, K.K. and Semenov, V.K. RSFQ logic/memory family: A new Josephson-junction technology for sub-terahertz-clock-frequency digital systems. *IEEE transactions on applied superconductivity*, **1**(1), 3-28 (1991).
 - [4] Bairamkulov, R. and De Micheli, G., Superconductive Electronics: A 25-Year Review . *IEEE Circuits and Systems Magazine*, **24**(2), 16-33 (2024).
 - [5] Aslamazov, L. G., & Larkin, A. I. Josephson effect in superconducting point contacts. *JETP Lett.* , **9**, 87 (1969).
 - [6] Josephson, B.D. Coupled superconductors. *Reviews of Modern Physics*, **36**(1), 216 (1964).
 - [7] Kulik, I.O. Macroscopic quantization and the proximity effect in SNS junctions. *JETP Lett.*, **30**, 944 (1969).
 - [8] Kulik, I.O. and Omel'Yanchuk, A.N., . Properties of superconducting microbridges in the pure limit. *Soviet Journal of Low Temperature Physics*, **3**(7), 459-461 (1977).
 - [9] Kulik, I.O. and Omelyanchouk, A.N. Current flow in long superconducting junctions. *Sov. Phys. JETP* **41**, 1071 (1975).
 - [10] Haberkorn, W., Knauer, H. and Richter, J. A theoretical study of the current-phase relation in Josephson contacts. *Physica Status Solidi A*, **47**(2), K161-K164 (1978).
 - [11] Golubov, A.A., Kupriyanov, M.Y. and Il' Ichev, E. The current-phase relation in Josephson junctions. *Reviews*

- of *Modern Physics*, **76(2)**, 411 (2004).
- [12] Galaktionov, A.V. and Zaikin, A.D. Quantum interference and supercurrent in multiple-barrier proximity structures. *Physical Review B*, **65(18)**, 184507 (2002).
- [13] Ivanov, Z.G., Kupriyanov, M.Y., Likharev, K.K., Meriakri, S.V. and Snigirev, O.V. Boundary conditions for the Eilenberger and Usadel equations and properties of “dirty” SNS sandwiches. *Soviet Journal of Low Temperature Physics*, **7(5)**, 274-281 (1981).
- [14] Kupriyanov, M.Y. Effect of a finite transmission of the insulating layer on the properties of SIS tunnel junctions. *JETP Lett*, **56**, 414 (1992).
- [15] Buzdin, A.I. and Kupriyanov, M.Y. Josephson junction with a ferromagnetic layer. *JETP Lett*, **53(6)**, 321 (1991).
- [16] Dinsmore, R.C., Bae, M.H. and Bezryadin, A. Fractional order Shapiro steps in superconducting nanowires. *Applied physics letters*, **93(19)**, 192505. (2008).
- [17] Troeman, A.G.P., Van Der Ploeg, S.H.W., Il’ichev, E., Meyer, H.G., Golubov, A.A., Kupriyanov, M.Y. and Hilgenkamp, H., Temperature dependence measurements of the supercurrent-phase relationship in niobium nanobridges. *Physical Review B*, **77(2)**, 024509 (2009).
- [18] Nanda, G.; Aguilera-Servin, J. L.; Rakyta, P.; Kormányos, A.; Kleiner, R.; Koelle, D.; Watanabe, K.; Taniguchi, T.; Vandersypen, L. M.; Goswami, S. Current-phase relation of ballistic graphene Josephson junctions. *Nano Lett.* **17**, 3396-3401 (2017).
- [19] Stolyarov, V.S., Yakovlev, D.S., Kozlov, S.N., Skryabina, O.V., Lvov, D.S., Gumarov, A.I., Emelyanova, O.V., Dzhumaev, P.S., Shchetinin, I.V., Hovhannisyan, R.A. and Egorov, S.V., Josephson current mediated by ballistic topological states in Bi₂Te₂. 3Se0. 7 single nanocrystals. *Communications Materials*, **1(1)**, 38 (2020).
- [20] Kurter, C., Finck, A.D., Hor, Y.S. and Van Harlingen, D.J., Evidence for an anomalous current – phase relation in topological insulator Josephson junctions. *Nature communications*, **6(1)**, 7130 (2015).
- [21] Spanton, E.M., Deng, M., Vaitiekėnas, S., Krogstrup, P., Nygård, J., Marcus, C.M. and Moler, K.A. Current – phase relations of few-mode InAs nanowire Josephson junctions. *Nature Physics*, **13(12)**, 1177-1181 (2017).
- [22] Hart, S., Cui, Z., Ménard, G., Deng, M., Antipov, A.E., Lutchyn, R.M., Krogstrup, P., Marcus, C.M. and Moler, K.A. Current-phase relations of InAs nanowire Josephson junctions: From interacting to multimode regimes. *Physical Review B*, **100(6)**, 064523 (2019).
- [23] Frolov, S.M., Van Harlingen, D.J., Oboznov, V.A., Bolginov, V.V. and Ryazanov, V.V. Measurement of the current-phase relation of superconductor/ferromagnet/superconductor π Josephson junctions. *Physical Review B*, **70(14)**, 144505 (2004).
- [24] Sochnikov, I., Bestwick, A.J., Williams, J.R., Lippman, T.M., Fisher, I.R., Goldhaber-Gordon, D., Kirtley, J.R. and Moler, K.A., Direct measurement of current-phase relations in superconductor/topological insulator/superconductor junctions. *Nano letters*, **13(7)**, 3086-3092 (2013).
- [25] Kayyalha, M., Kazakov, A., Miotkowski, I., Khlebnikov, S., Rokhinson, L.P. and Chen, Y.P. Highly skewed current – phase relation in superconductor – topological insulator – superconductor Josephson junctions. *npj Quantum Materials*, **5(1)**, 7 (2020).
- [26] Della Rocca, M.; Chauvin, M.; Huard, B.; Pothier, H.; Esteve, D.; Urbina, C. Measurement of the current-phase relation of superconducting atomic contacts. *Physical review letters* **99**, 127005 (2007).
- [27] Ginzburg, L.V., Batov, I.E.E., Bol’ginov, V.V.E., Egorov, S.V.E., Chichkov, V.I., Shchegolev, A.E.E., Klenov, N.V., Soloviev, I.I., Bakurskiy, S.V. and Kupriyanov, M.Y., Determination of the current – phase relation in Josephson junctions by means of an asymmetric two-junction SQUID. *JETP Lett.*, **107**, 48-54 (2018).
- [28] Endres, M., Kononov, A., Arachchige, H.S., Yan, J., Mandrus, D., Watanabe, K., Taniguchi, T. and Schonenberger, C., Current – phase relation of a WTe₂ Josephson junction. *Nano Letters*, **23(10)**, 4654-4659 (2023).
- [29] Babich, I., Kudriashov, A., Baranov, D. and Stolyarov, V.S., Limitations of the current – phase relation measurements by an asymmetric dc-SQUID. *Nano Letters*, **23(14)**, 6713-6719 (2023).
- [30] Willsch, D., Rieger, D., Winkel, P., Willsch, M., Dickel, C., Krause, J., Ando, Y., Lescanne, R., Leghtas, Z., Bronn, N.T. and Deb, P. Observation of Josephson harmonics in tunnel junctions. *Nature Physics*, **20(5)**, 815-821 (2024).
- [31] Goldobin, E., Koelle, D., Kleiner, R. and Buzdin, A. Josephson junctions with second harmonic in the current-phase relation: Properties of ϕ junctions. *Physical Review B*, **76(22)**, 224523 (2007).
- [32] Hovhannisyan, R.A., Golod, T. and Krasnov, V.M., Superresolution magnetic imaging by a Josephson junction via holographic reconstruction of $I_c(H)$ modulation. *Physical Review Applied*, **20(6)**, 064012 (2023).
- [33] Hart, S., Ren, H., Wagner, T., Leubner, P., Mühlbauer,

- M., Brüne, C., Buhmann, H., Molenkamp, L.W. and Yacoby, A., Induced superconductivity in the quantum spin Hall edge. *Nature Physics*, **10**(9), 638-643 (2014).
- [34] Bocquillon, E., Deacon, R.S., Wiedenmann, J., Leubner, P., Klapwijk, T.M., Brüne, C., Ishibashi, K., Buhmann, H. and Molenkamp, L.W., Gapless Andreev bound states in the quantum spin Hall insulator HgTe. *Nature Nanotechnology*, **12**(2), 137-143 (2017).
- [35] Chen, P., Wang, J., Wang, G., Ye, B., Zhou, L., Wang, L., Wang, J., Zhang, W., Chen, W., Mei, J. and He, H. Asymmetric edge supercurrents in MoTe₂ Josephson junctions. *Nanoscale Advances*, **6**(2), 690-696 (2024).
- [36] Fominov, Y.V. and Mikhailov, D.S., Asymmetric higher-harmonic SQUID as a Josephson diode. *Physical Review B*, **106**(13), 134514 (2022).
- [37] Kudriashov, A., Zhou, X., Hovhannisyan, R.A., Frolov, A., Elesin, L., Wang, Y., Zharkova, E.V., Taniguchi, T., Watanabe, K., Yashina, L.A. and Liu, Z. Non-Reciprocal Current-Phase Relation and Superconducting Diode Effect in Topological-Insulator-Based Josephson Junctions. arXiv preprint arXiv:2502.08527 (2025).
- [38] Wakatsuki, R., Saito, Y., Hoshino, S., Itahashi, Y.M., Ideue, T., Ezawa, M., Iwasa, Y. and Nagaosa, N. Nonreciprocal charge transport in noncentrosymmetric superconductors. *Science advances*, **3**(4), e1602390 (2017).
- [39] Wakatsuki, R. and Nagaosa, N. Nonreciprocal current in noncentrosymmetric Rashba superconductors. *Physical Review Letters*, **121**(2), 026601 (2018).
- [40] Kim, J.K., Jeon, K.R., Sivakumar, P.K., Jeon, J., Koenner, C., Woltersdorf, G. and Parkin, S.S. Intrinsic supercurrent non-reciprocity coupled to the crystal structure of a van der Waals Josephson barrier. *Nature Communications*, **15**(1), 1120 (2024).
- [41] Hoshino, S., Wakatsuki, R., Hamamoto, K. and Nagaosa, N. Nonreciprocal charge transport in two-dimensional noncentrosymmetric superconductors. *Physical Review B*, **98**(5), 054510 (2018).
- [42] Van Loo, N., Mazur, G.P., Dvir, T., Wang, G., Dekker, R.C., Wang, J.Y., Lemang, M., Sfiligoj, C., Bordin, A., van Driel, D. and Badawy, G. Electrostatic control of the proximity effect in the bulk of semiconductor-superconductor hybrids. *Nature Communications*, **14**(1), 3325 (2023).
- [43] Nadeem, M., Fuhrer, M.S. and Wang, X., The superconducting diode effect. *Nature Reviews Physics*, **5**(10), 558-577 (2023).
- [44] Krasnov, V.M. Josephson junctions in a local inhomogeneous magnetic field. *Physical Review B*, **101**(14), 144507 (2020).
- [45] Krasnov, V.M., Oboznov, V.A. and Pedersen, N.F. Fluxon dynamics in long Josephson junctions in the presence of a temperature gradient or spatial nonuniformity. *Physical Review B*, **55**(21), 14486 (1997).
- [46] Villegas, J. E. et al. A superconducting reversible rectifier that controls the motion of magnetic flux quanta. *Science* **302**, 1188 (2003).
- [47] de Souza Silva, C. C., Van de Vondel, J., Morelle, M. & Moshchalkov, V. V. Controlled multiple reversals of a ratchet effect. *Nature* **440**, 651 (2006).
- [48] Lustikova, J. et al. Vortex rectenna powered by environmental fluctuations. *Nat. Commun.* **10**, 1038 (2018).