

变形代数在量子物理中的应用

Julio Cesar Jaramillo Quiceno*, Plamen Neytchev Nechev[†]

¹Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia,
Edificio Yu Takeuchi, Bogotá ²Independent Researcher,
Strasbourg, France.

Abstract

一些变形代数在量子物理中的可能应用是基于严格的方法考虑的。Jackson 积分是在配备的可分希尔伯特空间背景下表达的。Jackson 积分尽可能使用点测度在配备了的可分希尔伯特空间背景下进行表达。在此过程中，纠正了引用参考文献的不同作者所犯的一些错误和/或不准确之处。文章末尾的简要分析表明，在将变形代数应用于量子力学和场论时仍然存在问题。

关键词：

变形代数，杰克逊微积分，配备希尔伯特空间，格子

1 介绍

众所周知，量子物理取得了许多成功，其概念和应用远远超越了许多科学应用，并几乎涵盖了所有现代技术。然而，在考虑某些分支的发展时，如场论等，仍存在大量不一致之处。本文试图阐明所谓的变形代数的数学

*jcjaramilloq@unal.edu.co

[†]pnechev@abv.bg

结构，从而改进某些方面。历史上，矩阵力学是由海森堡（1925 年）[2, 14] 发展起来的，用于从观察到的光谱线出发描述原子结构。随着数学的发展，人们逐渐认识到海森堡引入的操作符（或矩阵）可以被视为构建某些自由代数的基础。这使我们得以反向操作，定义不同的代数结构（称为代数），并试图将它们应用于解决量子物理学中的一些问题。在 [8] 中，定义了实正数 $q \neq 1$ 的 q -海森堡代数。一年后，Wess 在 [12] 中以不同的方式定义了 q -变形海森堡代数的对易关系。Silvestrov 和 Hellström 受到著名的 Heisenberg 正则关系 $\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = I$ 的启发，在 [3] 中介绍了另一种版本的 q -变形海森堡代数，其中 I 表示单位算子。这个关系在量子力学的操作形式中占据着关键位置。同一批作者还提到了这种变形背后的物理动机，它源自具有一个自由度并遵循 Bose 统计系统的创造和湮灭算符。Wess 和 Schwenk 在量子平面 [5, 1] 的背景下提出了其他变形 [13]，目前存在所谓的量子微积分。 q -导数和 q -积分已在参考文献 [7, 4] 中提出。下一章专门介绍了 q 变形代数的简要描述。在第三章中，定义了 Jackson 导数，并考虑其在量子物理学中的应用。随后是装备希尔伯特空间概念及其与新“变形”概念关系的简短介绍。第五章考虑了相应的积分微积分，在这里可以欣赏到与基于已知传统微积分定义的相关公式之间的相似之处和差异。由于所有物理定律都与微分方程的存在性和唯一性定理密切相关，因此在倒数第二章中尝试将这些定理扩展到已经引入的应变微积分。文章以关于变形代数在量子物理学中的适用性的讨论和结论结束。

2 变形代数

根据海森堡量子力学图像，除了单位算子之外的三个位置和动量算子构成了所谓的海森堡（传统）代数。 q -形变海森堡代数或 q -海森堡代数已经被诸如 [12, 8, 13, 3, 7] 等多位作者定义并详细研究过。 q -形变海森堡代数由任意坐标之间的动量的不同投影的对易关系以及对应于同一投影的不同类型的量的以下对易关系决定（对于 $q \in \mathbb{R}$ ）：

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = [\hat{y}, \hat{p}_y] = [\hat{z}, \hat{p}_z] = if(q).$$

现在，如果 $q \in \{-1, +1\}$ 和 $f(q) = -i\hbar^{-1}$ ，则该定义可以明显扩展到

广义的 q -海森伯代数的定义，如 [3] 所示；如果 $q \in \mathbb{C} - \{0\}$ ，并且 $f(q) = i\hbar D_{p_k}(q)$ ，其中 $D_{p_k}(q)$ 是依赖于 q 的任何函数，则得到在 [11] 中提出的 q - $\hbar$ 海森伯代数。在最后一种情况下，使用了两个变形参数： q 和 $\hbar$ ，即普朗克“常数”是一个变量。

关于谐振子，令 $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ 为湮灭和创造算符， N 为量子数算符。 q -海森堡代数由生成元 $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ 和 $\hat{N}$ 定义，并受以下关系约束 [7]：

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger - q\hat{a}^\dagger\hat{a} = q^{-\hat{N}}, \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0, \quad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger, \quad [\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}.$$

为了更大的舒适性，让我们引入以下两个符号 [...]：

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}},$$

和“阶乘”

$$[n]_q! = [n]_q[n-1]_q \cdots [1]_q,$$

q 是一个非零实数。我们可以设置 $[0]_q = 0$ 并且显然可以计算出 $[1]_q = 1$ 。但不幸的是，对于任何其他自然数 $[n]_q \neq n$ 。上述符号使得通过替代微分和积分运算的常见概念来表达不同类型的算子变得更容易。在下面的内容中，考虑的算子被假定设置在适当向量空间的元素上。

3 杰克逊导数

Jackson 导数的定义如下：

$$D_x^{(q)} f(x) = \frac{f(qx) - f(q^{-1}x)}{(q - q^{-1})x}, \quad (1)$$

其中变形参数为 $q \in (0, 1)$ 。上述公式关于变换 $q \mapsto q^{-1}$ 对称。如果函数 $f(x)$ 满足通常的可微条件，用 $x + \Delta x$ 替换 qx ，我们可以确保新的导数包含当 $q \rightarrow 1$ 时的通常极限。该方程 (1) 定义了一个“有限”的递增导数，并且如果变形 q 非常接近于 1，则是有意义的。最后这些考虑，加上下一章

中的一些关系，将证明引入所述表达式作为 Jackson 导数是合理的。立即我们可以演示 $D_x^{(q)}$ [6] 的几个性质：

$$D_x^{(q)}x^n = [n]_qx^{n-1}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} D_x^{(q)}(f(x)g(x)) &= D_x^{(q)}[f(x)]g(q^{-1}x) + f(qx)D_x^{(q)}[g(x)] \\ &= D_x^{(q)}[f(x)]g(qx) + f(q^{-1}x)D_x^{(q)}[g(x)], \end{aligned} \quad (3)$$

$$D_x^{(q)}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha D_x^{(q)}[f(x)] + \beta D_x^{(q)}[g(x)], \quad (4)$$

(α 和 β 假设为常数)

$$[\hat{x}, \hat{y}] = [\hat{y}, \hat{z}] = [\hat{z}, \hat{x}] = 0, \quad (5)$$

$$[\hat{p}_x, \hat{p}_y] = [\hat{p}_y, \hat{p}_z] = [\hat{p}_z, \hat{p}_x] = 0, \quad (6)$$

和

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = [\hat{y}, \hat{p}_y] = [\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar. \quad (7)$$

这里，一旦固定了 q ，位置和动量算子被定义如下： $\hat{x} = x$ ， $\hat{y} = y$ 和 $\hat{z} = z$ ；分别为 $\hat{p}_x = -i\hbar D_x^{(q)}$ ， $\hat{p}_y = -i\hbar D_y^{(q)}$ 和 $\hat{p}_z = -i\hbar D_z^{(q)}$ 。符号 $[\dots, \dots]$ （与 $[\dots, \dots]_q$ 不同）是在普通量子物理中定义的当前换位子。

4 装备空间

设 H_z 是由勒贝格可积函数 ($\psi \in \mathbb{C}$) 在区间 $(-\infty, \infty)$ 上的等价类构成的希尔伯特空间，($H_z \approx L_z^2$)（因为所有可分离的希尔伯特空间都是同构的），即属于的条件是对可积性的要求。

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 \mu(dx) < \infty,$$

以及 $(\mathcal{S}^* \subset H_z^*, \mathcal{S})$ 是其各自配备的空间。由于 $\mathcal{S}$ 函数是连续的，在由 H_z 函数创建的相应等价类中，只有一个 $\mathcal{S}$ 代表进入。注意，Dirac delta 函数（实

际上是泛函 δ_{x_0}) 可以由一个点测度 μ^* 实现, 该点测度在 x_0 处采用:

$$\delta_{x_0}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mu^*(dx) = f(x_0),$$

为 $f \in \mathcal{S}$ 。这扩展到任何有限和。

之后, 空间 H_z 是可分的, 并且可以从由湮灭算子 $D_x^{(q)}$ 定义的真空函数 $\psi_0(x)$ 开始构造一个福克基。

$$D_x^{(q)} \psi_0(x) = 0. \quad (8)$$

创造算子的作用由 $\hat{x}$ 来完成。事实上, 让我们引入属于福克基的函数 $\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{[n]_q!}} \hat{x}^n \psi_0(x)$ (尽管归一化失去了其最初的传统的物理意义)。然后,

$$D_x^{(q)} \psi_n(x) = \sqrt{[n]_q} \psi_{n-1}(x),$$

和

$$\hat{x} \psi_n(x) = \sqrt{[n+1]_q} \psi_{n+1}(x),$$

是 $n = 0$ 或 $n \in \mathbb{N}$ 。因此, 对于涉及量子数 (“有多少个量子” 回答) 的操作符, 我们有

$$\hat{N} \psi_n(x) = \hat{x} D_x^{(q)} \psi_n(x) = [n]_q \psi_n(x). \quad (9)$$

这里, 我们与文献 [10] 不同, 在那里 $[n]_q$ 的数值被有意或无意地忽略了。

5 变形积分

在参考文献 [6] 中, 变形或杰克逊积分以如下方式定义:

$$\int_0^b f(x) d_q x = b(q^{-1} - q) \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n+1} \delta_{2n+1}(f) = b(q^{-1} - q) \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n+1} \delta_{2n+1}(f),$$

(对于第二个等式需要假设 $f \in \mathcal{S}$, 我们不同意 [10], 第 115 页), 即作为一个点测度, 它是一个非负数。为了使上述方程的右侧有意义而不过度限制函数, 我们将假设 $|f(x)| \leq 1$ (或任何 $\leq M > 0$)。另外, 如果 $f \in \mathcal{S}$ 我们也能够定义一个无限变形积分:

$$\int_0^\infty f(x) d_q x = (q^{-1} - q) \sum_{n=0}^\infty q^{2n+1} f(q^{2n+1}) = (q^{-1} - q) \sum_{n=0}^\infty q^{2n+1} \delta_{2n+1}(f),$$

使用 f 在 bq^{-2n+1} 和发散词中的行为……建议继续与当前积分微积分的类比；让我们假设

$$\int_a^b f(x) d_q x = \int_0^b f(x) d_q x - \int_0^a f(x) d_q x. \quad (10)$$

不幸的是，从以下反例（ a 和 b 足够接近， $q = 1/2$ ）：

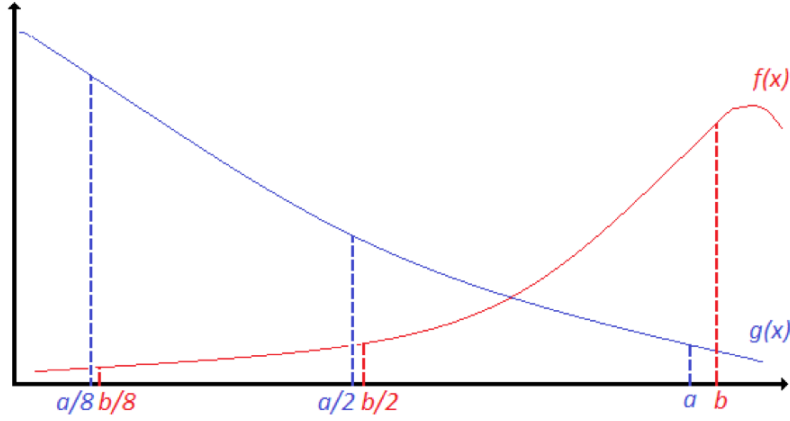


Figure 1: 变形积分比较的示例

可以看出来在区间 $[a, b]$ 上的 $f(x) > g(x)$ 并不意味着强制性的

$$\int_a^b f(x) d_q x > \int_a^b g(x) d_q x.$$

后者指出，并非这里引入的所有积分都可以用任何点测度表示，因此，在斯特伯格 [9] 中所示的允许其唯一性稳定的积分概述不适用。

如果在 ∞ 处的反常积分定义通过自然假设 $d_q(-x) = -d_q x$ 被扩展到 $-\infty$ ，其中 $d_q x$ 可以被视为一种测度，我们得到：

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) d_q x = (q^{-1} - q) \left(\sum_{n=-\infty}^\infty q^{2n+1} f(-q^{2n+1}) + \sum_{n=-\infty}^\infty q^{2n+1} f(q^{2n+1}) \right),$$

相信此时第一个级数的收敛是显而易见的 ($f \in \mathcal{S}$)。实际上, 所有允许的函数 f 仅在以下可数点集上有贡献:

$$\dots, -q^{-2n+1}, \dots, -q^{-3}, -q^{-1}, -q^1, -q^3, \dots, -q^{2n+1}, \dots, q^{2n+1}, \dots, q^3, q^1, q^{-1}, q^{-3}, \dots, q^{-2n+1}, \dots,$$

全部属于 $\mathbb{R}$ 。因此, 我们可以陈述, 我们不是在对单独的 f 函数进行积分, 而是对其等价类进行积分, 这些等价类由不同的 f, g 等组成, 尽管它们在刚才提到的点上是相同的。

6 积分方程

存在性和唯一性定理关于微分方程的解在物理学中起着关键作用, 因为它们允许自然法则被形式化。在作品 [7] 中表明, 即使特殊函数 $E_q(x), S_q(x)$ 和 $G_q(x)$ 是已知的 Jackson 方程常微分方程的解

$$[D_x^{(q)}]^2 f(x) + af(x) = 0,$$

证明是通过检查完成的。但似乎不存在这样的定理, 也没有一般情况下的解算法。虽然有一些公式将杰克逊导数与其相应的杰克逊积分联系起来, 即

$$D_x^{(q)} \int_0^b f(t)_q dt = f(x),$$

和

$$\int_0^b D_x^{(q)} [f(x)]_q dx = f(b),$$

(在这里我们与 [7] 不同, 因为上述公式中不存在 $f(0)$)。正如对于原函数一样, 可以写作

$$\int f(x) dx = (q^{-1} - q) \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n+1} x f(q^{2n+1} x) + \text{const},$$

问题在积分方程层面更容易解决。假设对于涉及 $h(x)$ 的方程 ($F(b)$ 是一个已知函数)。

$$\int_0^b h(x)_q dx = F(b), \quad (11)$$

有两个解，即 $f(x)$ 和 $g(x)$ 。将它们代入并相减，我们得到

$$b(q^{-1} - q) \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n+1} [f(q^{2n+1}b) - g(q^{2n+1}b)] = 0,$$

对于任何允许的 q 。由于序列 $q^3, q^5, \dots$ 由独立的 q 函数组成，我们有

$$f(q^{2n+1}b) = g(q^{2n+1}b),$$

对于 $n = 0, 1, 2, \dots$ ，或者换句话说，由我们定义的函数等价类 $\{f(x)\}$ 是方程 (11) 的唯一解。

存在性的证明被归结为在 S 的元素中找到一类函数，其代表者将满足方程 (11)。对方程 (11) 进行微分，并考虑到这一点，我们将面临一个类似于格林函数理论类型的问题 [10]。

7 讨论与结论

变形代数在量子物理中的适用性不可避免地涉及到杰克逊微积分。作为一种增量计算方法，它有其优势和劣势。我们相信首先的优势在于能够将空间视为晶格，即通过**多少个**。如果定义杰克逊积分的级数可以表示为傅里叶展开式，那么可以通过这种逆变换，在一个有限脉冲空间中工作。这样的程序将消除许多奇异性问题，包括场论在点 0 遇到的问题。另一个优势是有可能通过变形参数 q 进行调整。然而，在我们看来，将变形理论应用于量子物理存在某些困难。至关重要的是只有交换算子能够表示同时可测量的量。这允许构建适当的基来寻找搜索平均值。不幸的是，消失的变形对易子并不能保证同时测量。这提出了一个疑问，即是否可行使用这种类型的对易子进行“量子化”。另一个必须克服的障碍是，正如我们已经提到的，调整算子 $\hat{N}$ (见 (8)) 的解释，因为其在 [7] 中的处理不正确。仅有一个分数数量的量子与量子理论本身相矛盾。最后，我们提到我们已经设法使

杰克逊微积分与配备好的希尔伯特空间兼容，并纠正了一些错误，例如上述关于证明级数对负下标收敛性和基本定理类比的问题。所有这些都使得将来能够尝试严格地将已开发的内容应用于晶格场论。

References

- [1] X. Chen and M. Lu. Varieties of modules over the quantum plane. *Journal of Algebra*, 580:158–198, 2021.
- [2] Werner Heisenberg. Über quantentheoretische umdeutung kinematischer und mechanischer beziehungen. *Zeitschrift für Physik*, (33):873 – 879, 1925.
- [3] L. Hellström and S. D. Silvestrov. *Commuting Elements in q -Deformed Heisenberg Algebra*. World Scientific, 2000.
- [4] F. H. Jackson. On q -functions and a certain difference operator. *Messenger of Mathematics*, 38:57, 1909.
- [5] D. A. Jordan and I. Wells. Invariants for automorphisms of certain iterated skew polynomial rings. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 39(3):461–472, 1996.
- [6] V. Kac. *Quantum Calculus*. Springer, 2002.
- [7] A. Lavagno and G. Gervino. Quantum mechanics in q -deformed calculus. *Journal of Physics: Conference Series*, 174, 2009.
- [8] K. Schmüdgen. Operator representations of a q -heisenberg algebra. *Journal of Mathematical Physics*, 40:4596–4605, 1999.
- [9] S. Stenberg. *Lectures on Differential Geometry*. Prentice Hall, 1972.
- [10] V. S. Vladimirov. *Equations of Mathematical Physics*, volume 315. Marcel Dekker, Inc., New York, 1971.

- [11] I. Volovich and I. Y. Aref'eva. Quantum groups, particles and non-archimedean geometry. *Physics Letters B*, 268(2):179–187, 1991.
- [12] J. Wess. *q-Deformed Heisenberg Algebra*, volume 543. Springer, 2000.
- [13] J. Wess and J. Schwenk. A q -deformed quantum mechanical toy model. *Physics Letters B*, 291(3):273–277, 1999.
- [14] Nouredine Zettili. *Quantum Mechanics: Concepts and Applications*. A John Wiley and Sons, Ltd., Publication, Jacksonville State University, Jacksonville, USA, 2nd edition, 2009.