

# 等周不等式的一些类似结果

SUBASH CHANDRA BEHERA AND SHIV PARSAD

摘要. 离散等周不等式指出, 在所有面积固定的  $n$ -边形中, 正  $n$ -边形具有最小的周长. 我们证明了双曲几何中循环多边形和切圆多边形的离散等周不等式的类似结果 (涉及外接圆半径或内切圆半径), 同时考虑单个多边形和多个多边形的情况. 此外, 我们在对它们的面积或周长有一定限制的情况下, 建立了双曲几何中多个多边形的两种版本的等周不等式.

## 1. 介绍

离散等周不等式表明, 在所有固定面积的  $n$ -边形中, 正  $n$ -边形具有最小的周长. 这一结果不仅在欧几里得几何中成立, 在球面和双曲几何中也同样成立, 其中球面情况由 László Fejes Tóth[10] 建立, 双曲情况由 Károly Bezdek[2] 证明. 关于其他相关工作, 请参见 [4, 5].

一个多边形被称为切向的如果它的所有边都与同一个圆 (其内切圆) 相切. 一个多边形被称为循环的如果它的所有顶点都在同一个圆 (其外接圆) 上. 循环多边形已经被几位作者研究过 [6, 8]. 一个循环多边形  $P$  被称为中心的, 如果它的外接圆的中心在其内部  $P$ . 在这篇文章中, 所有的循环多边形都被假定为是中心的. 在整篇文章中, 对于一个循环 (相应的切线) 多边形  $P$ ,  $R(P)$  (相应的).  $r(P)$  表示其外接圆半径 (分别内切圆半径), 并且假设多边形的所有顶点都位于双曲平面上. 受经典等周不等式的启发, 我们探讨了涉及双曲多边形内切圆半径或外接圆半径的类似不等式. 我们证明了以下结果:

**定理 1.1.** 对于任何切线双曲  $n$ -边形  $P$ ,  $Peri(P) \geq 2n \tanh^{-1}(\tan(\pi/n) \sinh r(P))$ , 等号成立当且仅当  $P$  是正则的.

**定理 1.2.** 对于任何循环双曲  $n$ -边形  $P$ ,  $Peri(P) \leq 2n \sinh^{-1}(\sin(\pi/n) \sinh R(P))$ , 等号成立当且仅当  $P$  是正则的.

定理 1.1 和 1.2 的一个直接结果如下, 这些定理建立了内切圆半径与外接圆半径之间的关系:

**推论 1.3.** 对于任意双曲  $n$ -边形  $P$ ,

$$r(P) \geq \sinh^{-1} \left( \frac{\tan(\pi/n)}{\tan(2n \sinh^{-1}(\sin(\pi/n) \sinh R(P)))} \right).$$

**定理 1.4.** 对于任何切线双曲  $n$ -边形  $P$ ,  $Area(P) \geq (n-2)\pi - 2n \cos^{-1}(\sin(\pi/n) \cosh r(P))$ , 等号成立当且仅当  $P$  是正则的.

**定理 1.5.** 对于任意循环双曲  $n$ -边形  $P$ ,  $Area(P) \geq (n-2)\pi - 2n \cot^{-1}(\tan(\pi/n) \cosh R(P))$ , 等号成立当且仅当  $P$  是正则的.

接下来, 我们证明涉及多边形外接圆半径或内切圆半径的等周型不等式. 特别地, 我们证明了以下结果:

2020 *Mathematics Subject Classification.* Primary 52B60; Secondary 51M09.

*Key words and phrases.* 面积, 周长; 圆内接多边形; 切线多边形; 高斯-邦奈定理.

**定理 1.6.** 令  $P_1, \dots, P_k$  为具有给定总外接圆半径  $\sum_{i=1}^k R(P_i) = T$  的循环正双曲  $n$ -边形。然后,  $\sum_{i=1}^k \text{Peri}(P_i) \geq 2nk \sinh^{-1}(\sin(\pi/n) \sinh(T/k))$ , 等号成立当且仅当所有  $P_i$  都与一个外接圆半径为  $T/k$  的正  $n$  边形全等。

**定理 1.7.** 设  $P_1, \dots, P_k$  为具有给定总内切圆半径  $\sum_{i=1}^k r(P_i) = T$  的相切双曲  $n$ -边形。则  $\sum_{i=1}^k \text{Peri}(P_i) \geq 2nk \tanh^{-1}(\tan(\pi/n) \sinh(T/k))$ , 等号成立当且仅当所有  $P_i$  均与内切圆半径为  $T/k$  的正  $n$  边形等距。

**定理 1.8.** 令  $P_1, \dots, P_k$  为具有给定总外接圆半径  $\sum_{i=1}^k R(P_i) = T$  的循环双曲  $n$  边形。那么  $\sum_{i=1}^k \text{Area}(P_i) \geq k(n-2)\pi - 2nk \cot^{-1}(\tan(\pi/n) \cosh(T/k))$ , 当且仅当所有  $P_i$  都与外接圆半径为  $T/k$  的正  $n$  边形等距时取等号。

**定理 1.9.** 令  $P_1, \dots, P_k$  为具有给定总内切圆半径  $\sum_{i=1}^k r(P_i) = T$  的相切双曲  $n$ -边形。则  $\sum_{i=1}^k \text{Area}(P_i) \geq k(n-2)\pi - 2nk \cos^{-1}(\sin(\pi/n) \cosh(T/k))$  成立, 当且仅当所有  $P_i$  都与内半径为  $T/k$  的正  $n$  边形等距。

受 Sanki 和 Vadnere[9] 工作的启发, 我们证明了在固定总面积或固定总周长条件下带有某些约束的多个多边形的等周不等式。特别地, 我们证明了以下结果:

**定理 1.10.** 设  $P_1, \dots, P_k$  为具有固定总面积的双曲  $n$ -边形,  $\sum_{i=1}^k \text{Area}(P_i) = T$ , 满足  $\text{Area}(P_i) > (n-2)\pi - 2n \sin^{-1}(\sqrt{1 - \sin(\pi/n)})$  对于  $i = 1, \dots, k$ 。然后, 我们有

$$\sum_{i=1}^k \text{Peri}(P_i) \geq 2nk \cosh^{-1}\left(\frac{\cos(\pi/n)}{\sin((n-2)\pi - T/k)/2n}\right),$$

等号成立当且仅当所有  $P_i$  均与面积为  $T/k$  的正多边形等距。

**定理 1.11.** 令  $P_1, \dots, P_k$  为具有固定总周长  $\sum_{i=1}^k \text{Peri}(P_i) = T$  的双曲  $n$  边形, 满足  $\text{Peri}(P_i) > 2n \cosh^{-1} \sqrt{1 + \sin(\pi/n)}$  对于  $i = 1, \dots, k$ 。然后, 我们有

$$\sum_{i=1}^k \text{Area}(P_i) \leq k(n-2)\pi - 2nk \sin^{-1}\left(\frac{\cos(\pi/n)}{\cos(T/(2nk))}\right),$$

等号成立当且仅当所有  $P_i$  都与周长为  $T/k$  的正多边形全等。

证明定理 1.10 的动机是找到均匀填充系统 [7] 的最小长度。主要思想是将每个问题转化为一个带约束的目标函数的优化问题。为了求解这个优化问题, 我们利用了引理 3.1 和双曲三角学。在这一类问题中, 证明极值的存在性是一个困难的任务。使用引理 3.1 的独特之处在于它保证了其适用时极值的存在性和唯一性。

## 2. 预备知识

本节中, 我们介绍了直角双曲三角形的双曲三角学公式, 并包含了面积和周长的表达式, 这对证明我们在第 4 节的主要结果是必不可少的。

**引理 2.1.** [3] 令  $ABC$  为一个双曲三角形, 其边长为  $a, b, c$ , 其中长度为  $a$  的边与角度  $A$  相对, 并且在  $A$  处有一个直角 (参见图 1)。然后, 以下关系成立:

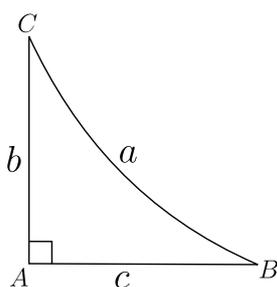


图 1.

- (i)  $\cosh a = \cosh b \cosh c$ ,
- (二)  $\cosh a = \cot B \cot C$ ,
- (iii)  $\sinh b = \sin B \sinh a$ ,
- (四)  $\sinh c = \cot B \tanh b$ ,
- (v)  $\cos C = \cosh c \sin B$ ,
- (六)  $\cos B = \tanh c \coth a$ .

**命题 2.2.** 令  $P$  为一个内角为  $\theta$  的正双曲  $n$ -边形。 $P$  的周长由以下给出  $Peri(P) = 2n \cosh^{-1} \left( \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\theta/2)} \right)$ 。

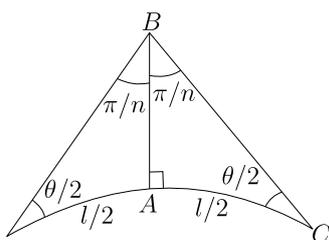


图 2. 一个正双曲  $n$ -边形的三角部分。

证明. 令  $B$  为多边形  $P$  的外心, 且  $P$  的每条边的长度为  $2\ell$ 。 $B$  在任意一边上的垂足平分该边及在  $B$  处的角度 (见图 2)。

由引理 2.1, 我们有  $\frac{\ell}{2} = \cosh^{-1} \left( \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\theta/2)} \right)$ 。因此,  $P$  的周长是  $Peri(P) = n\ell = 2n \cosh^{-1} \left( \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\theta/2)} \right)$ 。  
□

**定理 2.3** (高斯-博内定理). 双曲  $n$  边形  $P$  的内角为  $\theta_1, \dots, \theta_n$  的面积由以下公式给出:  
 $Area(P) = (n - 2)\pi - (\theta_1 + \dots + \theta_n)$ 。

证明. 见 [1] □

### 3. 一个凸性引理

以下引理在本文中被反复用于证明各种优化结果。

**引理 3.1.** 令  $f$  是在开区间  $I$  上定义的凸且二阶可微函数。定义函数  $F : I^k \rightarrow \mathbb{R}$  为  $F(x_1, x_2, \dots, x_k) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k)$ , 其中  $x_1, x_2, \dots, x_k \in I$ 。考虑以下优化问题:

$$\text{Minimize } F(x_1, x_2, \dots, x_k) \text{ subject to the constraint } x_1 + x_2 + \dots + x_k = c,$$

其中  $c \in \mathbb{R}$  是一个常数, 使得  $\frac{c}{k} \in I$ 。全局最小值在该点达到  $\left( \frac{c}{k}, \dots, \frac{c}{k} \right)$ 。

证明. 由于  $f$  是凸的, 我们有  $f''(x) \geq 0$  对所有  $x \in I$  成立。

令  $(a_1, \dots, a_k) \in I^k$ , 并令  $a_i = \frac{c}{k} + h_i$  对于某个  $h_i$  而言, 对于  $1 \leq i \leq k$ . 使用泰勒定理, 对于每个  $i$ , 存在  $c_i$ , 使得

$$F(a_1, \dots, a_k) = F\left(\frac{c}{k} + h_1, \dots, \frac{c}{k} + h_k\right) = \sum_{i=1}^k f\left(\frac{c}{k} + h_i\right) = \sum_{i=1}^k \left[ f\left(\frac{c}{k}\right) + h_i f'\left(\frac{c}{k}\right) + \frac{h_i^2 f''(c_i)}{2} \right].$$

由于  $f''(x) \geq 0$ , 二次项是非负的, 所以

$$F\left(\frac{c}{k} + h_1, \dots, \frac{c}{k} + h_k\right) \geq \sum_{i=1}^k \left[ f\left(\frac{c}{k}\right) + h_i f'\left(\frac{c}{k}\right) \right].$$

给定约束条件  $a_1 + \dots + a_k = c$ , 我们有

$$\sum_{i=1}^k \left(\frac{c}{k} + h_i\right) = c.$$

这简化为

$$c + \sum_{i=1}^k h_i = c \implies \sum_{i=1}^k h_i = 0.$$

因此,

$$F(a_1, \dots, a_k) \geq \sum_{i=1}^k f\left(\frac{c}{k}\right) = F\left(\frac{c}{k}, \dots, \frac{c}{k}\right).$$

所以,  $F$  在  $\left(\frac{c}{k}, \dots, \frac{c}{k}\right)$  处取得全局最小值。 □

**推论 3.2.** 如果  $f$  是凹的, 则  $F$  在  $\left(\frac{c}{k}, \dots, \frac{c}{k}\right)$  处具有全局最大值。

#### 4. 主要结果的证明

在本节中, 我们证明定理 1.1–1.11. 我们描述图 3, 我们在证明中反复使用它. 考虑一个  $n$  边的切线多边形  $P$ , 其内切圆半径为  $c$  (见图 3(a)). 设  $\theta$  为内切圆心  $B$  处由两个连续切点的半径形成的角. 设  $b$  为从这些切点到相邻切线相遇顶点处的切线段长度. 设  $\phi$  为多边形  $P$  在该顶点处的内角. 请注意, 从内切圆心到两个切线相交顶点的线段平分角  $\theta$  和  $\phi$ .

现在, 考虑一个  $n$  边的循环双曲多边形, 其外接圆半径为  $a$  (见图 3(b)). 设  $\theta$  为外心  $B$  处的角度, 由连接一条长度为  $2c$  的边两端点的半径形成. 从  $B$  表示的垂线是投射到多边形对应边上的垂直投影, 平分角度  $\theta$  和该边. 设  $\phi$  是多边形的一边与内切圆半径之间的夹角。

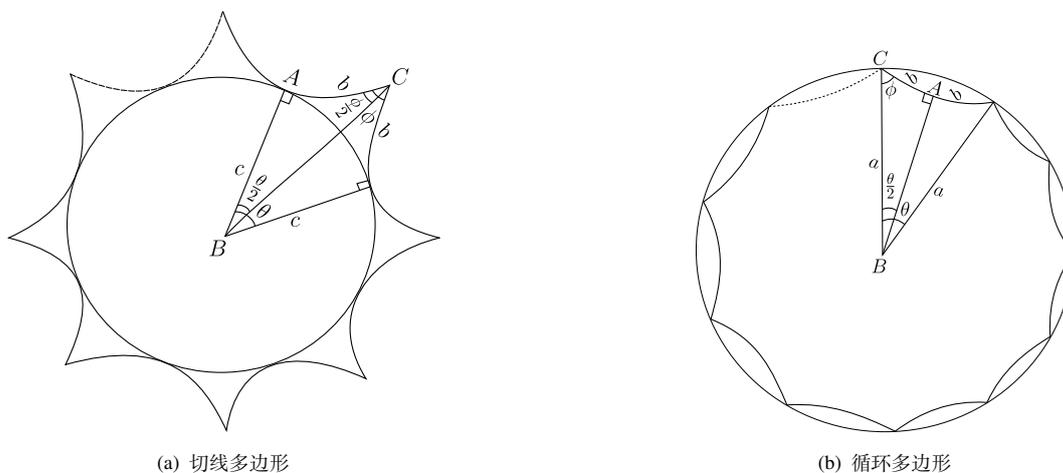


图 3. 切线和循环多边形

4.1. 等周型不等式对于循环或多边形相切的情形. 在本小节中, 我们证明定理 1.1– 1.5

定理的证明 1.1. 令  $P$  为图 3(a) 中所述的多边形, 具有  $\theta = \theta_i$  和  $c = r$ .

由引理 2.1, 我们有

$$\tan(\theta_i/2) = \frac{\tanh b}{\sinh r}.$$

$$\implies b(\theta_i) = \tanh^{-1}(\sinh r \tan(\theta_i/2)).$$

微分得,

$$b'(\theta_i) = \frac{\sinh r}{2} \cdot \frac{\sec^2(\theta_i/2)}{1 - \sinh^2 r \tan^2(\theta_i/2)}.$$

$$\implies b''(\theta_i) = \frac{\sinh r}{2} \cdot \frac{\sec^2(\theta_i/2) \tan(\theta_i/2)(1 + \sinh^2 r)}{(1 - \sinh^2 r \tan^2(\theta_i/2))^2} > 0, \quad \text{for } 0 < \theta_i < \pi.$$

因此,  $b$  是  $\theta_i$  的凸函数. 由引理 3.1 可知, 在约束条件

$$\sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi$$

下, 当所有角度  $\theta_i$  相等时, 即  $\theta_i = 2\pi/n$ , 周长

$$\sum_{i=1}^n 2nb(\theta_i)$$

达到最小. 这意味着多边形的所有边和角度都相等, 因此它是正多边形. 由此可知,

$$\text{Peri}(P) \geq 2n \tanh^{-1}(\tan(\pi/n) \sinh r).$$

□

定理的证明 1.2. 令  $P$  为如图 3(b) 所描述的多边形, 其中包含  $\theta = \theta_i$  和  $a = R$ .

由引理 2.1, 我们有:

$$\sin(\theta_i/2) = \frac{\sinh b}{\sinh R}.$$

$$\implies b(\theta_i) = \sinh^{-1}(\sin(\theta_i/2) \sinh R).$$

$$\implies b'(\theta) = \frac{\sinh R}{2} \frac{\cos(\theta_i/2)}{\sqrt{1 + \sinh^2 R \sin^2(\theta_i/2)}}$$

$$\implies b''(\theta_i) = -\frac{\sinh R \sin(\theta_i/2)((1 + \sinh^2 R \sin^2(\theta_i/2))^{\frac{3}{2}}) + \cos^2(\theta/2) \sin(\theta_i/2)}{4(1 + \sinh^2 R \sin^2(\theta_i/2))^{\frac{3}{2}}} < 0 \text{ for all } 0 < \theta_i < \pi$$

边长  $b$  是  $\theta_i$  的一个凹函数。

因此, 根据推论 3.2, 问题的解:

$$\text{Maximize } \sum_{i=1}^n 2b(\theta_i),$$

在约束条件

$$\sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi$$

下, 当所有角度  $\theta_i$  都相等时达到, 即对于所有的  $i = 1, \dots, n$  有  $\theta_i = 2\pi/n$ 。这意味着多边形的所有边和角都相等, 因此它是正多边形。由此可知,  $\text{Peri}(P) \leq 2n \sinh^{-1}(\sin(\pi/n) \sinh R)$

□

定理的证明 1.4. 令  $P$  为如图 3(a) 所示的多边形, 带有  $\theta = \theta_i$  和  $c = r$ 。

由引理 2.1, 我们有

$$\cosh r = \frac{\cos(\phi/2)}{\sin(\theta_i/2)}.$$

$$\implies \phi(\theta_i) = 2 \cos^{-1}(\sin(\theta_i/2) \cosh r).$$

对  $\theta_i$  求导, 我们得到:

$$\frac{\phi'(\theta_i)}{\cosh r} = \frac{-\cos(\theta_i/2)}{\sqrt{1 - \cosh^2 r \sin^2(\theta_i/2)}}.$$

对  $\theta_i$  求二次导数, 我们得到:

$$\frac{\phi''(\theta_i)}{\cosh r} = -\frac{\sin(\theta_i/2)(\cosh^2 r - 1)}{(1 - \cosh^2 r \sin^2(\theta_i/2))^{3/2}} < 0 \text{ for all } 0 < \theta_i < \pi.$$

由于  $\phi$  是  $\theta_i$  的凸函数, 根据推论 3.2, 在约束条件

$$\sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi$$

下最大化问题

$$\sum_{i=1}^n \phi(\theta_i)$$

在所有角度  $\theta_i$  相等时达到最大值, 即对于所有的  $i = 1, \dots, n$  都有  $\theta_i = 2\pi/n$ 。此条件对应于最小化面积, 因为  $P$  的面积是

$$\text{Area}(P) = (n-2)\pi - \sum_{i=1}^n \phi_i.$$

因此, 当多边形为正多边形时, 面积达到最大。

由于所有  $\theta_i$  都相等, 即  $\theta_i = 2\pi/n$ , 所以多边形的所有边和角度都相等, 因此该多边形是正多边形。从而  $\text{Area}(P) \geq (n-2)\pi - 2n \cos^{-1}(\sin(\pi/n) \cosh r)$ 。

□

定理的证明 1.5. 设  $P$  为图 3(b) 中所述的多边形, 具有  $\theta = \theta_i$  和  $a = R$ 。

由引理 2.1, 我们有:

$$\phi(\theta_i) = \cot^{-1}(\cosh R \tan(\theta_i/2))$$

对  $\theta_i$  求导, 我们得到:

$$\frac{-2\phi'(\theta_i)}{\cosh R} = \frac{\sec^2(\theta_i/2)}{1 + \cosh^2 R \tan^2(\theta_i/2)}$$

对  $\theta_i$  求二阶导数, 我们得到:

$$\frac{-2\phi''(\theta_i)}{\cosh R} = \frac{\tan(\theta_i/2)(\cosh^2 R - 1) \tan^2(\theta_i/2)}{(1 + \cosh^2 R \tan^2(\theta_i/2))^2}$$

由于  $\cosh^2 R - 1 > 0$ , 我们得出  $\phi''(\theta_i) < 0$ 。

这表明  $\phi$  是  $\theta_i$  的凹函数。根据推论 3.2, 优化问题:

$$\text{Maximize } \sum_{i=1}^n \phi_i$$

在约束条件下:

$$\sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi$$

达到最大值时, 所有角度  $\theta_i$  都相等, 即对于所有的  $i = 1, \dots, n$ , 都有  $\theta_i = 2\pi/n$ 。这表明该多边形是正多边形。

此条件对应于最小化面积, 因为面积由公式给出

$$\text{Area} = (n-2)\pi - \sum_{i=1}^n \phi_i.$$

因此,  $\text{Area}(P) \geq (n-2)\pi - 2n \cot^{-1}(\cosh R \tan(\pi/n))$ 。

□

#### 4.2. 多重切线或循环多边形的等周型不等式. 在本小节中, 我们证明定理 1.6–1.9

定理的证明 1.6. 令  $P_i$  为如图 3(b) 所描述的多边形, 具有  $\theta = 2\pi/n$  和  $a = R_i$ 。我们的目标是解决以下约束最小化问题:

$$\text{Minimize } \sum_{i=1}^k \text{Peri}(P_i),$$

受约束于

$$\sum_{i=1}^k R_i = T,$$

。

由引理 2.1, 我们有关系:

$$b(R_i) = \sinh^{-1}(\sin(\pi/n) \sinh R_i).$$

$$\implies b'(R_i) = \frac{\sin(\pi/n) \cosh R_i}{\sqrt{\sin^2(\pi/n) \sinh^2 R_i + 1}}.$$

$$\implies b''(R_i) = \frac{\sin(\pi/n) \sinh R_i \cos^2(\pi/n)}{(\sin^2(\pi/n) \sinh^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

由引理 3.1, 当所有  $R_i$  相等时, 总周长

$$\sum_{i=1}^k \text{Peri}(P_i) = \sum_{i=1}^k nb(R_i)$$

达到最小值。即  $R_i = T/k$ 。因此, 所有  $P_i$  都与一个外接圆半径为  $T/k$  的正多边形全等。从而,  $\sum_{i=1}^k \text{Peri}(P_i) \geq 2nk \sinh^{-1}(\sin(\pi/n) \sinh(T/k))$ 。

□

定理的证明 1.7. 由定理 1.1, 不失一般性, 我们可以假设所有  $P_i$  都是规则的。令多边形  $P$  如图 3(a) 所示, 带有  $\theta = 2\pi/n$  和  $c = r_i$ 。由引理 2.1, 我们有:

$$b(r_i) = \tanh^{-1}(\tan(\pi/n) \sinh r_i)$$

可以看出  $b''(r_i) > 0$ 。类似的论证方法在定理 1.6 的情况下同样适用。

□

定理的证明 1.8. 根据定理 1.5, 不失一般性, 我们可以假设所有  $P_i$  都是正则的。设  $P_i$  为如图 3(b) 所示的多边形, 带有  $\theta = 2\pi/n$  和  $a = R_i$ 。

由引理 2.1, 我们有:

$$\phi(R_i) = \cot^{-1}(\tan(\pi/n) \cosh R_i)$$

可以看出  $\phi''(R_i) < 0$ 。类似的论证方法可以应用于定理 1.6 的情况。

□

定理的证明 1.9. 令  $P_i$  为如图 3(a) 所示的多边形, 具有  $\theta = 2\pi/n$  和  $c = r_i$ 。

由引理 2.1, 我们有:

$$\phi(r_i) = \cos^{-1}(\sin(\pi/n) \cosh r_i)$$

可以看出  $\phi''(r_i) < 0$ 。类似的论证方法应用于定理 1.6 的情况。

□

### 4.3. 多边形的等周不等式.

定理的证明 1.10. 不失一般性, 我们假设所有  $P_i$  都是正则 [2].

令  $\theta_i$  表示  $P_i$  的内角.  $P_i$  的周长是

$$\text{Peri}(P_i) = 2n \cosh^{-1} \left( \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\theta_i/2)} \right).$$

总面积是  $T$ , 这意味着

$$\sum_{i=1}^k \theta_i = \frac{(n-2)k\pi - T}{n}.$$

我们的目标是最小化

$$\sum_{i=1}^k 2n \cosh^{-1} \left( \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\theta_i/2)} \right).$$

设

$$f(\theta) = \cosh^{-1} \left( \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\theta/2)} \right)$$

然后我们有,

$$f'(\theta) = -\frac{\cos(\pi/n)}{2} \cdot \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2) \sqrt{\cos^2(\pi/n) - \sin^2(\theta/2)}}.$$

我们获得

$$f''(\theta) = \frac{\cos(\pi/n)}{4[\cos^2(\pi/n) - \sin^2(\theta/2)]^{3/2}} \left[ \frac{\cos^2(\pi/n)}{\sin^2(\theta/2)} - 2 + \sin^2(\theta/2) \right].$$

由此得出  $f''(\theta_i) > 0$  如果  $\theta_i < 2 \sin^{-1}(\sqrt{1 - \sin(\pi/n)})$ , 这意味着  $\text{Area}(P_i) > (n-2)\pi - 2n \sin^{-1} \sqrt{1 - \sin(\pi/n)}$ . 通过应用引理 3.1, 当  $\theta_i$  相等时问题被最小化, 即  $\theta_i = 2\pi/n$  for all  $i = 1, \dots, k$ . 因此,  $P_i$  与面积为  $T/k$  的正多边形等距. 由此,  $\sum_{i=1}^k \text{Peri}(P_i) \geq 2nk \cosh^{-1} [\cos(\pi/n) / \sin(((n-2)\pi - T/k)/(2n))]$ .  $\square$

定理的证明 1.11. 不失一般性, 我们可以假设所有  $P_i$  都是正则的 [2]. 我们的目标是解决以下最大化问题:

$$\max \sum_{i=1}^k \text{Area}(P_i)$$

受约束于

$$\sum_{i=1}^k \text{Peri}(P_i) = T$$

双曲正则  $n$ -边形  $P_i$  的面积由  $\text{Area}(P_i) = (n-2)\pi - n\theta_i$  给出, 其中  $\theta_i$  是内角. 周长  $\text{Peri}(P_i)$  由给定的公式决定

$$\text{Peri}(P_i) = 2n \cosh^{-1} \left( \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\theta_i/2)} \right),$$

令  $\text{Peri}(P_i) = x_i$

$$\implies \theta_i = 2 \sin^{-1} \left( \frac{\cos(\pi/n)}{\cosh(x_i/2n)} \right),$$

。

因此，原始问题被简化为最小化

$$\sum_{i=1}^k 2 \sin^{-1} \left( \frac{\cos(\pi/n)}{\cosh(x_i/2n)} \right)$$

受约束于

$$\sum_{i=1}^k x_i = T.$$

令  $f(x) = \sin^{-1} ((\cos(\pi/n))/(\cosh(x/2n)))$ . 我们有  $f''(x) > 0$  对于  $x > 2n \cosh^{-1} \sqrt{1 + \sin(\pi/n)}$ 。

由引理 3.1，最小值在  $x_i$  相等时取得，即对于所有  $i = 1, \dots, n$  有  $x_i = T/k$ 。因此， $\sum_{i=1}^k \text{Area}(P_i) \leq k(n-2)\pi - 2nk \sin^{-1} [(\cos(\pi/n))/(\cos(T/(2nk)))]$ 。□

结束语] 结论 remarks 应翻译为评论或备注，但根据上下文，“Concluding remarks” 通常被翻译为“结束语”或“结论”。所以此处最合适的翻译是：

结束语

需要探讨的问题是，当  $P$  不居中时，定理 1.2、1.5、1.6 和 1.8 的陈述是否仍然有效。此外，如果  $P$  不是切线的，定理 1.1、1.4、1.7 和 1.9 的结论仍然成立吗？

致谢

第一作者感谢科学与工业研究理事会（文件号：09/1290(0005)2020-EMR-I）提供的财政支持。第二作者感激印度政府的科学技术研究委员会（SERB）通过 MATRICS 资助（文件号：MTR/2021/000067）提供的财政支持。

## REFERENCES

- [1] Alan F. Beardon. *The geometry of discrete groups*, volume 91 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [2] K. Bezdek. Ein elementarer Beweis für die isoperimetrische Ungleichung in der Euklidischen und hyperbolischen Ebene. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, 27:107–112, 1984.
- [3] Peter Buser. *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, volume 106 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.
- [4] Balázs Csikós, Zsolt Lángi, and Márton Naszódi. A generalization of the discrete isoperimetric inequality for piecewise smooth curves of constant geodesic curvature. *Period. Math. Hungar.*, 53(1-2):121–131, 2006.
- [5] Basudeb Datta. A discrete isoperimetric problem. *Geom. Dedicata*, 64(1):55–68, 1997.
- [6] Jason DeBlois. The geometry of cyclic hyperbolic polygons. *Rocky Mountain J. Math.*, 46(3):801–862, 2016.
- [7] Ernesto Gironde, Gabino González-Diez, and Rubén A. Hidalgo. The minima of the geodesic length functions of uniform filling curves, 2023.
- [8] Ren Guo and Nilgün Sönmez. Cyclic polygons in classical geometry. *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, 64(2):185–194, 2011.
- [9] Bidyut Sanki and Arya Vadnere. Isoperimetric inequality for disconnected regions. *Geom. Dedicata*, 219(1):Paper No. 1, 13, 2025.
- [10] J. A. Todd. L. fejes toth, regular figures (pergamon press, 1964), xi + 339 pp., 84s. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 14(2):174 – 175, 1964.

SCHOOL OF MATHEMATICS & COMPUTER SCIENCE, INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY GOA, AT GOA COLLEGE OF ENGINEERING CAMPUS,  
FARMAGUDI, PONDA-403401, GOA, INDIA

*Email address:* subash20232102@iitgoa.ac.in

SCHOOL OF MATHEMATICS & COMPUTER SCIENCE, INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY GOA, AT GOA COLLEGE OF ENGINEERING CAMPUS,  
FARMAGUDI, PONDA-403401, GOA, INDIA

*Email address:* shiv@iitgoa.ac.in