关于洛伦兹分裂定理的注记

Gregory J. Galloway*

Department of Mathematics
University of Miami

摘要

我们给出了一个版本的洛伦兹分裂定理，在减弱的里奇曲率条件下。证明使用了非时相关限 [19, 20] 的基本性质，以及在 [1] 中 C^0 类空超曲面的几何最大原理。我们的版本通过去除里奇曲率上的某个有界性条件，增强了 [29] 中全局双曲设置下的一个相关结果。

1 介绍

在他的 20 世纪 80 年代早期著名的问题部分 [28] 中，S.-T. Yau 提出了建立 Cheeger-Gromoll 分解定理的 Lorentzian 类似物的问题。这个问题在一系列论文 [4, 11, 15, 24] 中于 20 世纪 80 年代末完全解决了。最基本的形式是由 Eschenburg 提出的，如下所述 [11]。

定理 1 (洛伦兹分裂定理)**.** *令 M 为一个全局双曲的、类时测地线完备的时空，满足强能量条件 $\mathrm{Ric}(X,X) \geq 0$，对于所有类时 X 成立。如果 M 允许一条类时光线，则 M 可以分解为度量乘积，即 (M,g) 是等距于 $(\mathbb{R}\times S, -dt^2+h)$，其中 S 是一个光滑的、测地线完备的类空超曲面，其具有诱导度量 h。*

洛伦兹分割问题由丘成桐提出，实际上是为了建立霍金-彭罗斯奇点（不完备）定理的刚性。这一观点在 R. 巴尔蒂尼克的猜想 [2] 中得到了形式化。

*email: galloway@math.miami.edu

猜想 2 (巴尔特尼克分裂猜想)**.** *假设 M 是一个具有紧致类空截面的全局双曲时空，并满足强能量条件。如果 M 在类时测地线方向上是完备的，则 M 可以分解，即 (M, g) 是等距的到 $(\mathbb{R} \times S, -dt^2 + h)$，其中 S 是一个光滑类空 Cauchy 超曲面，具有诱导度量 h。*

因此，根据猜想，这样的时空只有在非常特殊的情况下才能避免奇异性（类时测地线不完备）。为了建立这个猜想，只需证明存在一条类时光线或一个 CMC 柯西面即可。在前一种情况下，可以应用洛伦兹分裂定理；而在后一种情况下，则可以应用 [2] 中的推论 1。有许多条件能够确保要么存在一条类时光线，要么存在一个 CMC 柯西面。然而，这个猜想仍然未被解决；进一步讨论请参见例如 [16, 18, 20]。

与此同时，在这些年里，各种霍金-彭罗斯类型的奇点结果在削弱（或平均）能量条件下得到了证明；参见例如 [27, 9, 6]，以及最近的 [12, 13]，及其参考文献。在这篇笔记中，我们展示了一个洛伦兹分裂定理的证明，在弱化了强能量条件的情况下，如下一节讨论的那样。我们利用了*非时序极限* [19, 20] 的性质，因为它们使得某些简化成为可能，并且使大部分证明保持在基本因果理论层面。这些性质是为全域双曲时空开发的。对于非全域双曲情况的评论，请参阅第 2 节结尾处的第一条备注。

2 一个洛伦兹分割定理

我们简要回顾一些因果时空理论的基本概念和事实。详见例如 [26, 21, 25] 以获取更多细节。

通过时空我们意味着一个光滑的时间定向洛伦兹流形 (M, g)，其维度为 $n+1, n \geq 2$。对于 $p \in M$，$I^+(p)$，p 的类时未来（相应地，$J^+(p)$，p 的因果未来）是满足从 p 到 q 存在一条指向未来的类时（相应地，指向未来的因果）曲线的点 $q \in M$ 的集合。由于类时曲线的小变形仍保持为类时曲线，集合 $I^+(p)$ 是开集。更一般地，对于 $A \subset M, I^+(A), A$ 的类时未来（分别地，$J^+(A), A$ 的因果未来）是这样的点集合 $q \in M$，存在从点 $p \in A$ 到 q 的一条未来的类时光线（分别地，未来的因果光线）。注意，$I^+(A) = \cup_{p \in A} I^+(p)$，因此集合 $I^+(A)$ 是开集。类时和因果过去 $I^-(p), J^-(p)$, $I^-(A), J^-(A)$ 以时间对偶的方式定义。一个*非时序边界*是形式为 $A = \partial I^\pm(S)$ 的非空集合，对于某些子集 $S \subset M$。无时序边界通常是 M 中的一个边缘无时序的 C^0 超曲面 ([26],[25])。

经典上，时空 (M, g) 是全局双曲的，如果 (i) 它是强因果性的（即不存在闭合或

“几乎闭合”的因果曲线）并且 (ii) 所有“因果菱形” $J^+(p) \cap J^-(q)$ 都是紧致的。对于一个时空 (M, g)，其柯西（超）面是一个集合 S，该集合被每条不可延展的因果曲线恰好穿过一次。柯西面 S 必然是一张无边界、非因果性的 C^0 超曲面。通过考虑类时向量场的流，可以看出任何两个柯西面都是同胚的，并且如果 S 是 M 的一个柯西面，则 M 与 $\mathbb{R} \times S$ 同胚。一个时空 (M, g) 全局双曲的基本事实是当且仅当它包含一个柯西面 S。

我们将利用未来（分别过去）射线的概念。设 $\gamma : [0, a) \to M$,$a \in (0, \infty]$ 为一条不可延拓的因果曲线。γ 是一个*未来光线*，如果 γ 的每一段都是极大的，即每一段实现了其端点之间的洛伦兹距离 [3]。给定一个子集 $S \subset M$，γ 是*未来 S-射线*，如果 γ 从 S 开始，并且 γ 的每个初始段实现到 S 的洛伦兹距离。未来光线或 S-射线要么是类时的，要么是零测地线（当适当参数化时）。过去光线和过去 S-射线以类似的方式定义。

本节的主要目的是证明以下分裂结果。

定理 3. *设 (M, g) 是一个全域双曲的、类时测地线完备的时空，使得沿每条（过去和未来）类时光线 $\alpha : [0, \infty) \to M$，里奇曲率满足以下曲率条件：*

$$\liminf_{t \to \infty} \int_0^t \mathrm{Ric}(\alpha'(t), \alpha'(t))\, dt \geq 0\,. \tag{2.1}$$

如果 M 允许一条类时光线 γ，则 M 分裂，即 (M, g) 与 $(\mathbb{R} \times S, -dt^2 + h)$ 等距，其中 S 是一个光滑的、测地完备的类空超曲面，并具有诱导度量 h。

相关的结果在 [29] 中获得；请参见本节末尾的注释以获取更多详细信息。

正如引言中所述，我们对定理 3 的证明使用了在 [19, 20] 中获得的某些结果。这些结果是通过基本因果理论建立的，并且特别地，不涉及洛伦兹布赛曼函数的分析。

在随后的讨论中假设时空 (M, g) 是全局双曲的。

令 $\gamma : [0, \infty) \to M$ 为一个未来的完整单位速度类时光线。如在 [19] 中定义的，相对于 γ,S^-_∞ 的*过去的光线水平球面*由以下给出，

$$S^-_\infty = \partial \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I^-(S^-_k) \right),$$

其中 S^-_k 是过去的洛伦兹球，

$$S^-_k = \{x \mid d\big(x, \gamma(k)\big) = k\}\,,$$

其中 d 是洛伦兹距离函数。S^-_∞ 具有以下基本性质。

命题 4 ([19, Sec. 3])**.** $S^-_\infty(\gamma)$ 是一条无边界的非时序 C^0 超曲面，它从每个点发出一个未来 $S^-_\infty(\gamma)$-射线。特别地，γ 本身就是一个 $S^-_\infty(\gamma)$-射线。

请注意 $\bigcup_{k=0}^\infty I^-(S_k^-) = I^-\left(\bigcup_{k=0}^\infty (S_k^-)\right)$。因此，$S^-_\infty$ 是一个非时序边界，并且是一个无边界的非时序 C^0 超曲面。在每一点保证的未来 S-射线可以是类时或类空测地线。在后一种情况下，它必然包含在 S^-_∞ 中。我们称 $p \in S^-_\infty$ 为零点，如果存在一个来自 p 的未来空 S^-_∞-射线。否则，我们称 p 为 S^-_∞ 的类空点。类时点的集合在 S^-_∞ 中是开集且无因果关系。

未来光线双曲球面相对于过去的完整类时光线是按时间对偶的方式定义的，$S^+_\infty = \partial\left(\bigcup_{k=0}^\infty I^+(S_k^+)\right)$，并且满足类似的性质。此外，未来光线双曲球面上的点被分类为零或类空，在类似的方式下进行。

下一个结果描述了过去和未来光线双曲球面之间的重要结构联系；参见 [20, Lem. 4.10]。

命题 5. 假设 S^-_∞ 和 S^+_∞ 分别是过去和未来的光线等距球面，满足 $I^+(S^+_\infty)\cap I^-(S^-_\infty) = \emptyset$。那么对于任意一点 $p \in S^-_\infty \cap S^+_\infty$，以下情况之一成立：

(1) p 是两个准球面的类空点，且存在唯一的未来 S^-_∞-射线从 p 出发，并存在唯一的过去 S^+_∞-射线从 p 出发，这两条射线均为类时射线并连接形成一条类时直线。

(2) p 是两个半径球的零点，且从 p 出发存在唯一的未来 S^-_∞-射线，并且从 p 出发存在唯一的过去 S^+_∞-射线，这两条都是零射线，并连接形成一条零线，β，与 $\beta \subset S^-_\infty \cap S^+_\infty$。

命题 4 和 5 通过基本的因果理论方法得到证明。证明定理 3 所需的关键几何分析工具涉及平均曲率不等式在支撑意义上的概念；参见例如 [1, 19, 20]。

令 S 为 M 中的一个局部不同时超曲面 C^0。我们说 Σ 是 S 在 $q \in S$ 的一个未来支撑超曲面，如果 $q \in \Sigma$ 和 Σ 是一个光滑类空超曲面，在 q 的邻域内满足 $\Sigma \subset J^+(S)$。进一步，我们说 S 具有平均曲率 $\le a$ 在支撑意义上 如果对于所有 $q \in S$ 和 $\epsilon > 0$，存在一个未来支撑超曲面 $\Sigma_{q,\epsilon}$ 到 S 在点 q 具有平均曲率 $H_{q,\epsilon}$ 满足

$$H_{q,\epsilon}(q) \le a + \epsilon\,. \tag{2.2}$$

(按照我们的符号约定，$H_{q,\epsilon}$ 是沿着 $\Sigma_{q,\epsilon}$ 的未来指向单位法向量场的散度。) 时间对偶地，我们有在 $q \in S$ 处对于 S 的过去支撑超曲面的概念，并且可以通过要求反向不等式 $H_{q,\epsilon}(q) \ge a - \epsilon$ 来将 S 称为具有平均曲率 $\ge a$ 的支持意义。

下列定理推广了 [19] 中的定理 4.2 的某些方面，特别是将其扩展到曲率条件 (2.1)。

定理 6. 设 (M, g) 是一个全局双曲的、未来类时测地线完备时空，并设 S 是一个局部非类时的 C^0 超曲面。假设在每个点 $p \in S$ 处，存在一个从 $\alpha(0) = p$ 开始的未来完整的类时射线 S-$ray\alpha : [0, \infty) \to M$，使得曲率条件 (2.1) 成立。那么 S 在支撑意义下的平均曲率为 $H \geq 0$。

证明. 固定 $p \in S$ 并且一个未来的完整的单位速度类时射线 S- 射线 α 具有 $\alpha(0) = p$。由于对于任意的 t，$\alpha|_{[0,t]}$ 都最大化了与 S 的距离，可以看出过去的距离球面 $S_t^-(\alpha(t))$ 位于 S 过去的局部区域附近 q。进一步，由于沿 $\alpha|_{[0,t]}$ 没有到 $\alpha(t)$ 的割点，过去的球体 $S_{t-r}^-(\alpha(t))$,$r \in [0, t)$ 在 $\alpha(r)$ 附近是光滑的。特别地，这意味着 $S_t^-(\alpha(t))$ 是 S 在 $p \in S$ 附近的一个过去的支撑超曲面。

该定理是以下主张的结果。

声明：对于任何 $\epsilon > 0$，存在 $T > 0$，使得距离球面 $S_T^-(\alpha(T))$ 在 p 处的平均曲率为 $H \geq -\epsilon$。

主张的证明（参见 *[12]*）。. 假设不是；即，假设存在 $\epsilon > 0$，使得对于所有任意大的 T，$H < -\epsilon$ 在 p 处。由曲率假设，存在 $r_0 > 0$ 使得沿 α，

$$\int_0^r \mathrm{Ric}(\alpha'(\hat{r}), \alpha'(\hat{r}))d\hat{r} \geq -\epsilon, \quad \text{for all } r \geq r_0 . \tag{2.3}$$

我们可以假设 $T > r_0$。令 $H(r)$ 为距离球 $S_{T-r}^-(\alpha(T))$ 在 $\alpha(r)$,$r \in [0, T)$ 处的平均曲率。由 Raychaudhuri 方程（迹 Riccati 方程 [21]），沿 $\alpha|_{[0,T)}$ 我们有，

$$\frac{dH}{dr} = -\left(\rho + \frac{H^2}{n}\right) \tag{2.4}$$

其中 $\rho = \mathrm{Ric}(\alpha', \alpha') + \sigma^2$，且其中 σ，即剪切张量，是第二基本形式 $S_{T-r}^-(\alpha(T))$ 在 $\alpha(r)$ 处的无迹部分。

由于 $\sigma^2 \geq 0$，(2.3) 暗示，

$$\int_0^r \rho(\hat{r})d\hat{r} \geq -\epsilon, \quad \text{for all } r \in [r_0, T) . \tag{2.5}$$

从 0 到 r 对 (2.4) 进行积分，并利用 (2.5)，我们得到，

$$-H(r) = \int_0^r \frac{H^2}{n}d\hat{r} + \int_0^r d\hat{r} - H(0) > \int_0^r \frac{H^2}{n}d\hat{r} , \tag{2.6}$$

对于 $r \in [r_0, T)$。设 $Q(r) = \int_0^r \frac{H^2}{n} d\hat{r}$; 注意 $Q(r) > 0$ 在 $[r_0, T)$ 上。然后从 (2.6) 我们得到微分不等式，

$$\frac{dQ}{dr} = \frac{H^2}{n} > \frac{Q^2}{n} \ \ (>0) \tag{2.7}$$

对于 $r \in [r_0, T)$。除以 Q^2 并从 r_0 到 r 积分得到，

$$\frac{1}{Q(r_0)} > \frac{1}{Q(r_0)} - \frac{1}{Q(r)} > \int_{r_0}^{r} \frac{1}{n} d\hat{r} = \frac{r - r_0}{n} \,. \tag{2.8}$$

通过取 T 足够大且 r 充分接近 T，不等式

$$\frac{r - r_0}{n} < \frac{1}{Q(r_0)}$$

将被违反，因此我们得到了一个矛盾。这确立了声明并证明了定理。 $\square$

我们现在进行定理 3 的证明，该证明基于定理 [20, Theorem 4.1] 的证明。

定理 3 的证明. 令 $\gamma : (-\infty, \infty) \to M$ 是一条完整的未来指向的单位速度类时直线。我们可以将 γ 分解为一个未来的射线 $\gamma_+ : [0, \infty)$，$\gamma_+(t) = \gamma(t)$ 和一个过去的射线 $\gamma_- : [0, \infty)$，$\gamma_-(t) = \gamma(-t)$。与这些光线相关的是过去光线水平球面 $S^-_\infty = S^-_\infty(\gamma_+)$ 和未来光线水平球面 $S^+_\infty = S^+_\infty(\gamma_-)$。

由命题 5 可知，$p = \gamma(0) \in S^-_\infty \cap S^+_\infty$ 是 S^-_∞（以及 S^+_∞）的类空点，因此存在一个完全由类空点组成的非因果邻域 $U^- \subset S^-_\infty$。特别地，在 U^- 的每一点上都存在一条基于该点的未来完备类时 S^-_∞-光线。定理 6 然后暗示了 U^- 在支撑意义下具有平均曲率 $H \geq 0$。以时间对偶的方式，存在一个非因果邻域 $U^+ \subset S^+_\infty$，在支撑意义下具有平均曲率 $H \leq 0$。此外，由于 $I^+(S^+_\infty) \cap I^-(S^-_\infty) = \emptyset$（这可以从 [19, Proposition 2.5] 轻易得出），U^+ 在接近 p 的地方局部位于 U^- 的未来。然后由几何最大值原理，[1, Theorem 3.6],[1]，存在一个具有平均曲率 $H = 0$ 的光滑类空超曲面 $U \subset U^+ \cap U^-$。考虑正则指数映射 $\Phi : \mathbb{R} \times U \to M$,

$$\Phi(t, q) = \exp_q tu \,, \tag{2.9}$$

其中 $u =$ 是指向未来的单位类时法线到 U。由命题 5 可知，对于每个 $q \in U$,$\alpha_+(t) = exp_q tu$,$t \in [0, \infty)$ 是未来的类时 U-射线，因此在 U 上没有焦散点。类似地，$\alpha_-(t) =$

[1]由 [1, Proposition 3.5]，我们在情况中满足了 [1, Theorem 3.6] 中陈述的某个技术条件。

$exp_q(-tu)$，$t \in [0,\infty)$ 是一个过去类时的无焦散点的 U-光线。此外，由于这样的 U-光线不能相交，因此 $\Phi : \mathbb{R} \times U \to M$ 是到其像 $W_U \subset M$ 上的微分同胚。

现在对于每个固定的 $t \in \mathbb{R}$，考虑水平集 $U_t = \Phi(\{t\} \times U) = \{\exp_q tu : q \in U\}$。令 $H(t)$ 为 U_t 的平均曲率。由 Raychaudhuri 方程，沿每个未来指向的法正测地线 α_+ 从 U 开始，我们有，

$$= -\mathrm{Ric}(\alpha_+', \alpha_+') - \frac{1}{n} H^2 - \sigma^2 \,. \tag{2.10}$$

通过与定理 6 证明中声明证明类似的论证，对于所有 $t \in [0,\infty)$ 必须有 $H(t) \geq 0$，否则 $H(t)$ 不能对所有 $t \in [0,\infty)$ 定义。

假设 $H(t_0) > 0$ 对某些 $t_0 \geq 0$ 成立。令 $\tilde{H}(t) = -H(t)$。由于 $\tilde{H}(t_0) < 0$，基本上相同的论证表明 $\tilde{H}(t)$，因此 $H(t)$ 不能对所有 $t \in (-\infty, t_0)$ 定义。由此得出，对于所有的 $t \in [0,\infty)$，都有 $H(t) = 0$。然后 (2.10) 给出，

$$\mathrm{Ric}(\alpha_+', \alpha_+') = -\sigma^2 \leq 0 \,, \quad \text{for all } t \in [0,\infty) \,.$$

结合曲率条件 (2.1)，我们得出结论，对于所有的 $t \in [0,\infty)$，都有 $\mathrm{Ric}(\alpha_+', \alpha_+') = -\sigma^2 = 0$。这表明 U_t 对于每个 $t \in [0,\infty)$ 都是全测地的。时间对偶论点还显示 U_t 对于 $t \in (-\infty, 0]$ 也是全测地的。标准论证现在表明 (W_U, g) 与产品 $(\mathbb{R} \times U, -dt^2 + h)$ 等距，其中 h 是在 U 上诱导的度量。

现在我们想要将其扩展到全局分裂。设 $V \supset U$ 为包含 p 的 $S_\infty^- \cap S_\infty^+$ 中共同类空点的连通分量；V 在 $S_\infty^- \cap S_\infty^+$ 中是因果且开放的。从命题 5 可知，在每个点 $q \in V$ 都存在一个唯一的未来 S_∞^--射线 β_+ 和一个唯一的过去 S_∞^+-射线 β_-，它们连接在一起形成一条类时直线 β。然后，通过与上述相同的论证，我们得到了围绕类时线 β 的类似的空间时间分解。由此可知，V 是一个光滑的全测地类空超曲面，并且通过法向指数映射 Φ 扩展到 V，$(W_V = \Phi(\mathbb{R} \times V), g)$ 与积 $(\mathbb{R} \times V, -dt^2 + h)$ 等距，其中现在 h 是在 V 上诱导的度量。从 V 是全测地的以及 M 是类时测地完备的事实中，在证明 [20, Theorem 4.11] 中表明 V 是测地完备的。我们将在附录中包含此论证。由此得出 $(\mathbb{R} \times V, -dt^2 + h)$ 是测地完备的，并且 $\{0\} \times V$ 是 $(\mathbb{R} \times V, -dt^2 + h)$ 中的一个柯西面（参见 [3, Theorems 3.67 and 3.69]）。因此，(W_V, g) 是测地完备的，并且，$W_V = D(V)$，其中 $D(V)$ 是 V 在 M 内的依赖域。然后很容易证明 V 是 M 中的一个柯西面（例如，通过证明没有柯西视界，$H^+(V) = H^-(V) = \emptyset$），因此 $W_V = M$。从而，(M, g) 与 $(\mathbb{R} \times V, -dt^2 + h)$ 等距。 □

我们提到定理 3 的一个结果。令 (M,g) 为具有紧致柯西面的未来类时测地完备时空。由时间对偶 [20, Prop. 5.9]，如果 M 的未来因果边界是空类 [2]，则 M 存在一条类时光线。因此，在这个附加假设下，猜想 2 成立，因为可以应用标准洛伦兹分裂定理。类似地，有一个如下推广。

定理 7. 假设 (M,g) 是一个具有紧致柯西面的时间样完备测地线时空，满足能量条件 (2.1)。如果未来的因果边界是空间样的，则 M 分裂，即 (M,g) 是等距于 $(\mathbb{R}\times S,-dt^2+h)$，其中 S 是一个光滑的类空柯西超曲面，具有诱导度量 h。

现在是定理 3 确保了 (M,g) 分裂。关于未来因果边界为类空的相关性进一步讨论见 [18, Sec. 5.1]。

最终评论。

在定理 3 的证明中所采用的原因论技术回避了一些关于洛伦兹布赛曼函数规则性的技术问题。转而使用“光线类空球面”则带来了很多简化。然而，利用 [17] 中为时似测地完全时空发展的洛伦兹布赛曼函数的规则性理论，可以在没有全局双曲条件的情况下证明定理 3。这种做法在 [29] 中被采用，但那里的论证还需要一个关于里奇曲率的额外条件。大致来说，要求沿时似光线积分里奇曲率负部分是有界的。通过结合来自 [17] 的结果以及本文中的论证，可以避免这一额外条件。我们对此稍作评论。

根据 [17] 中的结果，存在一个邻域 U，包含 $\gamma(0)$（γ 是给定的时间线），使得局部 Busemann 水平集 $S_\pm=\{b^\pm=0\}\cap U$ 为无因果关系的 C^0 空间类超曲面，穿过 $\gamma(0)$，并且 S_- 位于 S_+ 的因果未来。利用某些 Busemann 支撑函数的局部正则性（如在 [17] 中讨论的，另见 [3]），结合类似于定理 6 证明中的论证，可以证明 S_- 具有支撑意义下的平均曲率 ≤ 0，并且 S_+ 具有支撑意义下的平均曲率 ≥ 0。然后，应用 [1] 中的几何最大原理，如定理 3 的证明所示，可以得到 S_- 和 S_+ 在 U 中的一个光滑极大类空间超曲面 S 上一致，该超曲面穿过 $\gamma(0)$。现在，利用在 S 的每一点上过去和未来的 S-射线的存在（见 [17, 3]），可以按照定理 3 的证明进行操作以获得局部分裂。这种局部分裂可以扩展为全局分裂，如 [11] 或 [3] 所示。

在 [14] 中，通过修改 Eschenburg 和 Heintze 在 [10] 中证明 Cheeger-Gromoll 分裂定理的证明方法，得到了一个类似于 Theorem3 的黎曼类比。这表明最近基于 p-Laplacian 证明洛伦兹分裂定理的椭圆方法 [7] 可能与这里考虑的情况有关。

[2] 关于时空的因果边界讨论，请参见例如，[21, Sect. 6.8]。如果没有任何一个 TIP 被另一个 TIP 完全包含，则未来的因果边界是类空的。

3. 推广洛伦兹分裂定理的一个非常不同的方向在于当前活跃的研究领域，即低正则性洛伦兹几何。这包括洛伦兹度量的正则性低于 C^2 的情况，如同霍金-彭罗斯奇点定理的低正则性版本（参见 [8] 及其中的参考文献），或者可以使用合成方法的情况 [22]。例如，请参阅 [5]，该文献将洛伦兹分裂定理在截面曲率情况下的推广扩展到合成设置，并且 [7] 描述了在那里开发的新方法如何将在里奇曲率界下导致洛伦兹分裂定理的低正则性版本。在当前的背景下，人们可能会怀疑在 [19, 20] 中发展的因果理论技术，连同度量“正则化”，例如在 [23] 中提到的，是否可能在获得洛伦兹分裂定理的低正则性版本中发挥作用。

附录

设设定和符号与定理 3 的陈述和证明中的相同，并令 $V \subset S^-_\infty \cap S^+_\infty$ 如在证明中定义。我们希望展示 V 是测地完备的。固定 $p \in V$，并选择任意一个满足 $|X| = 1$ 的 $X \in T_pV$。令 $\sigma : [0, a) \to M$,$a \in (0, \infty]$ 是在方向 X 上最大限度延伸的唯一单位速度测地线，其起点为 $\sigma(0) = p$ 和 $\sigma'(0) = X$，在 M 中。我们首先观察到 σ 不离开 V。因为 V 是全测地的，σ 初始包含在 V 内。固定任意 $s_0 \in (0, a)$ 使得 $\sigma([0, s_0)) \subset V$。再次，由于 V 是全测地的，V 的未来单位法向场 u 沿着 $\sigma|_{[0,s_0)}$ 平行。由命题 5 可知，从每个 $x \in V$ 出发存在唯一一条未来类时的 S^-_∞-射线 γ_x，其中 $\gamma_x'(0) = u_x$。无论 $q = \sigma(s_0)$ 是否位于 V 中，都存在一个明确定义的极限向量 $u_q = \lim_{s\to s_0} u_{\sigma(s)}$，通过在所有 $\sigma_{[0,s_0]}$ 上平行传输 u 获得，其中 u_q 必然为未来的类时。令 γ_q 为未来的单位速度类时测地线，具有 $\gamma_q'(0) = u_q$，这必然是完整的。由于 $q \in \overline{V} \subset S^-_\infty \cap S^+_\infty$，$\gamma_q$ 是从 S^-_∞ 开始的曲线。此外，由于 $\gamma_{\sigma(s)}$ 是所有 $s \in [0, s_0)$ 的 S^-_∞ 射线，因此 $\gamma_q|_{[0,\infty)}$ 也是 S^-_∞ 射线。由于 $q \in S^-_\infty \cap S^+_\infty$，命题 5 意味着 q 是一个类空点，因此 $q \in V$。这表明 σ 永远不会离开 V，即我们有 $\sigma : [0, a) \to V$。现在我们证明 σ 在方向 X 上是完备的，即证明 $a = \infty$。假设相反的是 $a < \infty$。然后曲线 $c(s) = \Phi(-2s, \sigma(s))$，$c : [0, b) \to W_V \subset M$ 是在 M 中的一条指向过去的类时测地线，并且 $\sigma(s) = \exp_{c(s)}(2s\Phi_*(\partial_t))$。通过类时完备性，$c$ 延伸到 $[0, a]$。此外，向量场 $\Phi_*(\partial_t)$ 在 W_V 中是平行的，因此沿 c 平移后，在 $c(a)$ 处有一个极限。因此，$\sigma(s) = \exp_{c(s)}(2s\Phi_*(\partial_t))$ 在 $s \to a$ 处有极限，即 σ 连续延伸，并且作为测地线延伸至 $[0, a]$，这与 a 的定义相矛盾。因此，$a = \infty$。由于 X 是 V 中 p 的任意单位向量，我们实际上已经证明了 $\exp_p : T_pV \to V$ 在整个 T_pV 上是有定义的。因此根据 Hopf-Rinow 定理，V 是测地完备的。

致谢。我们感谢 Carlos Vega 对本文早期版本的许多有益评论。

参考文献

[1] L. Andersson, G. J. Galloway, and R. Howard, *A strong maximum principle for weak solutions of quasi-linear elliptic equations with applications to Lorentzian and Riemannian geometry*, Comm. Pure Appl. Math. **51** (1998), no. 6, 581–624.

[2] R. Bartnik, *Remarks on cosmological spacetimes and constant mean curvature surfaces*, Comm. Math. Phys. **117** (1988), no. 4, 615–624.

[3] J. K. Beem, P. E. Ehrlich, and K. L. Easley, *Global Lorentzian geometry*, second ed., Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 202, Marcel Dekker Inc., New York, 1996.

[4] J.K. Beem, Ehrlich P.E., S. Markvorsen, and G. J. Galloway, *Decomposition theorems for lorentzian manifolds with nonpositive curvature*, J. Differential Geom. **22** (1985), 29–42.

[5] T. Beran, A. Ohanyan, F. Rott, and D. A. Solis, *The splitting theorem for globally hyperbolic Lorentzian length spaces with non-negative timelike curvature*, Lett. Math. Phys. **113** (2023), no. 2, Paper No. 48, 47. MR 4579262

[6] A. Borde, *Geodesic focusing, energy conditions and singularities*, Classical Quantum Gravity **4** (1987), no. 2, 343–356.

[7] M. Braun, N. Gigli, R. J. McCann, A. Ohanyan, and C. Sämann, *An elliptic proof of the splitting theorems from lorentzian geometry*, 2024, arXiv:2410.12632.

[8] M. Calisti, M. Graf, E. Hafemann, M. Kunzinger, and R. Steibauer, *Hawking' s singularity theorem for lipschitz lorentzian metrics*, 2025, arXiv:2501.18450.

[9] C. Chicone and P. Ehrlich, *Line integration of Ricci curvature and conjugate points in Lorentzian and Riemannian manifolds*, Manuscripta Math. **31** (1980), no. 1-3, 297–316.

[10] J. Eschenburg and E. Heintze, *An elementary proof of the Cheeger-Gromoll splitting theorem*, Ann. Global Anal. Geom. **2** (1984), no. 2, 141–151.

[11] J.-H. Eschenburg, *The splitting theorem for space-times with strong energy condition*, J. Differential Geom. **27** (1988), no. 3, 477–491.

[12] C. J. Fewster and G. J. Galloway, *Singularity theorems from weakened energy conditions*, Class.Quant.Grav. **28** (2011), 125009.

[13] C. J. Fewster and E.-A. Kontou, *A new derivation of singularity theorems with weakened energy hypotheses*, Classical Quantum Gravity **37** (2020), no. 6, 065010, 31.

[14] G. J. Galloway, *A generalization of the Cheeger-Gromoll splitting theorem*, Arch. Math. (Basel) **47** (1986), no. 4, 372–375.

[15] ———, *The Lorentzian splitting theorem without the completeness assumption*, J. Differential Geom. **29** (1989), no. 2, 373–387.

[16] ———, *Existence of CMC Cauchy surfaces and spacetime splitting*, Pure Appl. Math. Q. **15** (2019), no. 2, 667–682.

[17] G. J. Galloway and A. Horta, *Regularity of Lorentzian Busemann functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), no. 5, 2063–2084.

[18] G. J. Galloway and E. Ling, *A CMC existence result for expanding cosmological spacetimes*, 2024, arXiv:2410.16619.

[19] G. J. Galloway and C. Vega, *Achronal limits, lorentzian spheres, and splitting*, Ann. Henri Poincaré **15** (2014), no. 11, 2241–2279.

[20] ———, *Hausdorff closed limits and rigidity in Lorentzian geometry*, Ann. Henri Poincaré **18** (2017), no. 10, 3399–3426.

[21] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, London, 1973, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, No. 1.

[22] M. Kunzinger and C. Sämann, *Lorentzian length spaces*, Ann. Global Anal. Geom. **54** (2018), no. 3, 399–447.

[23] M. Kunzinger, R. Steinbauer, M. Stojković, and J. A. Vickers, *Hawking's singularity theorem for $C^{1,1}$-metrics*, Classical Quantum Gravity **32** (2015), no. 7, 075012, 19.

[24] R. P. A. C. Newman, *A proof of the splitting conjecture of S.-T. Yau*, J. Differential Geom. **31** (1990), no. 2, 163–184.

[25] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry*, Pure and Applied Mathematics, vol. 103, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1983.

[26] R. Penrose, *Techniques of differential topology in relativity*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1972, Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Applied Mathematics, No. 7.

[27] F. J. Tipler, *Energy conditions and space-time singularities*, Phys. Rev. D (3) **17** (1978), no. 10, 2521–2528.

[28] S.-T. Yau, *Problem section*, Annals of Math. Studies, No. 102, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1982, pp. 669–706.

[29] J.-G. Yun, *A generalization of the Lorentzian splitting theorem*, Bull. Korean Math. Soc. **49** (2012), no. 3, 647–653.