

有限拓扑空间上的半流

Pedro J. Chocano

Abstract

在本文中，我们研究定义在任意给定有限拓扑空间 T_0 上的流和半流 X 。我们证明了除非 X 是一个极小的有限空间，否则存在非平凡的半流 X 。具体来说，非平凡的半流存在的充要条件是 X 包含向下击点，并且一个非平凡的半流本质上是一个强形变收缩。作为这一结果的推论，我们提供了一个新的简洁证明，表明唯一可以在 X 上定义的流是平凡流。最后，我们讨论了可以根据向下击点和其他特殊点在 X 上定义的不同半流的数量。

1 介绍

最近的研究认识到在有限偏序集或有限拓扑 T_0 -空间（见 [3, 7] 及相关文献）的组合背景下研究动力系统的重要性。利用这些组合空间来解决动力系统的问题的想法在于，它们是可计算的，具有丰富的代数结构（见 [8]），并且可以用来重构动力系统的相空间（见 [6]）。由于这些原因，它们是开发用于解决动力系统问题的计算方法的理想候选对象。

然而，正如在 [7, Proposition 2.4] 中指出的那样，在有限拓扑 T_0 -空间上唯一可以定义的是平凡流。尽管如此，很容易找到存在非平凡半流的例子。本文重点研究定义在有限拓扑 T_0 -空间上的半流。我们证明了非平凡半流的存在依赖于空间 X 的同伦类型。具体而言，在有限拓扑空间 X 上存在非平凡半流当且仅当 X 包含下击点。这些点的特点是，移除它们后，所得空间的同伦类型保持不变（见 [9]）。此外，我们分析了非平凡半流的行为。基本上，所有这些都将高点移动到低点的强形变收缩。请注意，存在一个用有限集和多值映射表述的普遍结果（见 [4, Theorem 3.1]），这也表明半流对于正数值是相等的，但它没有提供关于正数值上的半流的具体信息。

2020 数学主题分类：37C10, 54C15, 06A06

关键词：有限拓扑空间，流，半流，强形变收缩

该项研究部分得到了西班牙科学、创新和高校部（Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades）的资助，项目编号为 PID2021-126124NB-I00。

论文的组织结构如下。在第 2 节中，我们建立了研究有限拓扑空间中半流所需的基本概念。在第 3 节中，我们通过一个具体的例子说明非平凡半流的存在性。尽管存在非平凡半流，但我们证明了一类重要的有限拓扑空间不接受非平凡半流。由此及其他结果，我们得出结论，非平凡半流的存在与定义半流的空间的同伦类型有关。为了结束这一节，我们将获得的结果应用于提供一个简洁的证明，即在有限拓扑 T_0 -空间上唯一的流是平凡流。最后，在第 4 节中，我们讨论并获得了关于可以定义在有限拓扑空间 X 上的不同半流的数量结果，这些结果以下降击点和其他特殊点为依据。

2 预备知识

设 X 是一个有限的拓扑 T_0 -空间，并设 $x \in X$ 。我们用 $U_x(F_x)$ 表示包含 x 的每个开（闭）集的交集。显然， $U_x(F_x)$ 是一个开（闭）集。给定两个点 $x, y \in X$ ，我们说 $x \leq y$ 当且仅当 $U_x \subseteq U_y$ 。这个关系下的集合 X 形成一个有限偏序集（简称 poset）。相反，给定一个有限的偏序集 $(X, \leq)$ ，下集的集合形成了在 X 上的一个 T_0 拓扑的基础。回忆一下， $S \subseteq X$ 是一个下集，如果每当 $y \leq x$ 和 $x \in S$ 时，则 $y \in S$ 。这两个关联是互逆的，证明了对于任何有限集 X ，存在一种双射对应关系在 T_0 拓扑和定义在 X 上的部分序之间。从此以后，我们将有限偏序集和有限拓扑 T_0 -空间视为等价对象而不进行明确说明。此外，我们假设每个有限拓扑空间都是一个 T_0 -空间。值得注意的是，在有限拓扑空间之间的映射 $f: X \rightarrow Y$ 是连续的当且仅当它是保序的。由此可以推断出有限偏序集范畴和有限拓扑空间范畴是同构的 [1]。我们将假设，在本文中出现的每一个有限拓扑空间都是一个 T_0 空间。

有限偏序集 X 的高度 $ht(X)$ 比其链 X 中元素的最大数目少一。点的高度 $x \in X$ 是 $ht(x) = ht(U_x)$ 。给定一个有限偏序集 $(X, \leq)$ ，和 $x, y \in X$ ，当 $x < y$ 且不存在元素 $z \in X$ 使得 $x < z < y$ 时，我们写为 $x \prec y$ 。哈斯图的 X 是一个有向图，其顶点是 X 的点，并且仅当 $x \prec y$ 时从 x 到 y 存在一条边。在随后的 Hasse 图中我们省略了边的方向。令 $f, g: X \rightarrow Y$ 为有限拓扑空间之间的连续映射，当对于每一个 $x \in X$ 都有 $f(x) \leq g(x)$ 成立时，我们写成 $f \leq g$ 。我们现在回顾并引入有限拓扑空间理论中的基本概念。对于全面的介绍，我们参考 [2]。

命题 2.1. [2, Corollary 1.2.6] 令 $f, g: X \rightarrow Y$ 为两个有限拓扑空间之间的连续映射。则 f 同伦于 g 当且仅当存在一个栅栏 $f = f_0 \leq f_1 \geq f_2 \leq \cdots \geq f_n = g$ 。

定义 2.2. 在有限拓扑空间 X 中，点 x 是一个下（上）拍点，如果 $U_x \setminus \{x\}$ ($F_x \setminus \{x\}$) 有一个最大值（最小值）。

定义 2.3. 令 X 是一个拓扑空间且 $A \subseteq X$ 。A 回缩 $r: X \rightarrow A$ 是一个连续映射，满足对于每一个 $a \in A$ 都有 $r(a) = a$ 。我们说 r 是一个形变收缩，如果它是一个收缩映射，并且 $i \circ r$ 同伦于恒等映射 $\text{id}: X \rightarrow X$ ，其中 $i: A \rightarrow X$ 表示包含映射。空间 A 被称为形变收缩核的 X 。此外，如果在之前的定义中， $i \circ r$ 和恒等映射之间的同伦固定了 A 的点，则我们说 A 是 X 的一个强形变收缩核。

命题 2.4. [2, Proposition 1.3.4] 设 X 是一个有限拓扑空间, 设 $x \in X$ 是一个击点。那么 $X \setminus \{x\}$ 是 X 的强形变收缩核。

一个有限拓扑空间 X 是一个极小有限空间, 如果它没有节拍点。

示例 2.5. 考虑 $X = \{A, B, C, D, E\}$ 与 $A, B < C, D$ 和 $A, B, C < E$ 。有限拓扑空间 X 不是最小有限空间, 因为 E 是一个下降击点。然而, $X \setminus \{E\}$ 是一个最小有限空间, 因为它不包含击点。

定理 2.6. [2, Theorem 1.3.6] 令 X 是一个极小有限空间。连续映射 $f: X \rightarrow X$ 同伦于恒等映射 $\text{id}: X \rightarrow X$ 当且仅当 $f = \text{id}$ 。

总之, 我们回顾本文的基本概念。

定义 2.7. 在拓扑空间 X 上, 我们所说的半流是指一个连续映射 $\varphi: \mathbb{R}_0^+ \times X \rightarrow X$, 使得:

- i) 对于每一个 $x \in X$, $\varphi(0, x) = x$ 。
- ii) 对于每一个 $x \in X$ 和 $s, t \in \mathbb{R}_0^+$, $\varphi(s, \varphi(t, x)) = \varphi(s + t, x)$ 。

如果群 $\mathbb{R}$ 替换了非负实数的半群 $\mathbb{R}_0^+$, 则称 φ 为流动。

符号约定. 令 φ 为半流 (或流), 令 t 为非负实数 (或实数)。我们将用 φ_t 表示连续映射 $\varphi(t, \cdot): X \rightarrow X$ 。我们说一个半流 (或一个流) 是平凡的, 如果对于每一个 $t \in \mathbb{R}_0^+$ (或 $t \in \mathbb{R}$), φ_t 是恒等映射 $\text{id}: X \rightarrow X$ 。

在 [7, Proposition 2.4] 中, 作者证明了在有限拓扑空间或有限偏序集上下文中流动的概念并不是特别有趣。此外, 在 [5] 中, 他们将这一结果推广到了 Alexandroff 空间或偏序集上。因此, 为了研究有限拓扑空间上的动力系统, 作者引入了多值映射。作为其研究的应用, 他们使用有限空间和多值映射来逼近经典的动力系统 (见 [7, Section 6])。

3 有限拓扑空间上的半流

我们通过一个示例开始证明非平凡半流的存在。这个示例将随后突出显示与该上下文中半流相关的性质。

示例 3.1. 令 $X := \{A, B, C, D, E, F\}$ 满足 $A > B, C, D, E, F; B > D, E, F; C > D, E, F$, 以及 $D > E, F$ 。定义 $\varphi: \mathbb{R}_0^+ \times X \rightarrow X$ 为

$$\varphi(t, x) := \begin{cases} x & \text{if } t = 0, \\ D & \text{if } x > D \text{ and } t \in (0, \infty), \\ x & \text{if } x \leq D \text{ and } t \in (0, \infty). \end{cases}$$

这是一个简单的练习，证明 φ 是一个半流。此外， φ 是一个非平凡的半流，因为对于每一个 $t \in \mathbb{R}^+$ ，都有 $\varphi_t \neq \text{id}$ 。我们在图 1 中展示了 X 的哈斯图，以及 φ 的示意图。

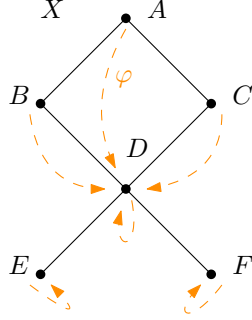


Figure 1: X 的哈斯图以及示例 3.1 中半流 φ 的示意图。

定理 3.2. 设 X 是一个极小的有限拓扑空间。如果 $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \times X \rightarrow X$ 是一个半流，那么 φ 是平凡的。

Proof. 我们通过矛盾进行论证。假设存在一个非平凡的半流 $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \times X \rightarrow X$ 。这意呀着存在 $x \in X$ 和 $t \in \mathbb{R}^+$ ，使得 $\varphi(t, x) \neq x$ 。此外，连续映射 $\varphi_t : X \rightarrow X$ 同伦于恒等映射 $\text{id} : X \rightarrow X$ ，因为 $\varphi_{|[0,t]} : [0, t] \times X \rightarrow X$ 提供了从 id 到 φ_t 的同伦。然而，根据定理 2.6，我们得到 $\text{id} = \varphi_t$ ，这导致了矛盾。 $\square$

定理 3.2 证明，除非空间 X 包含拍点，否则在这个框架内我们只有非平凡的动力系统。例如，在示例 3.1 中，点 B, C, E 和 F 是拍点，使我们可以定义一个非平凡的半流。在接下来的一系列引理中，我们将陈述并缩小半流的可能性。

引理 3.3. 设 X 是一个有限拓扑空间， $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \times X \rightarrow X$ 是一个半流。如果存在 $\epsilon > 0$ ，使得对于每一个 $t \in [0, \epsilon)$ ， φ_t 都是恒等映射，则 φ 是平凡的。

Proof. 令 $s \in \mathbb{R}_0^+$ 。则 $s = \sum_{i=1}^n s_i$ ，其中对于每一个 $i = 1, \dots, n$ 都有 $s_i \in (0, \epsilon)$ 。因此，根据定义 2.7 中的 ii)，对于每一个 $x \in X$ ，我们得到

$$\varphi_s(x) = \varphi_{s_n} \circ \dots \circ \varphi_{s_2} \circ \varphi_{s_1}(x) = x,$$

这表明 φ 是平凡的。 $\square$

观察到这个引理与示例 3.1 中的 φ 的定义是一致的。

引理 3.4. 设 X 是一个有限拓扑空间， $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \times X \rightarrow X$ 是一个半流。如果 $s, t \in \mathbb{R}_0^+$ 满足 $s < t$ ，那么 $\varphi_t \leq \varphi_s$ 。

Proof. 映射 φ 在 $(0, x)$ 和 (s, x) 处对于每一个 $x \in X$ 都是连续的, 这表明存在 $\epsilon > 0$ 和 $\delta > 0$ 满足 $\varphi([0, \epsilon) \times U_x) \subseteq U_x$ 和 $\varphi(I \times U_x) \subseteq U_{\varphi_s(x)}$, 其中 $I = \mathbb{R}_0^+ \cap (s - \delta, s + \delta)$ 。我们可以将 t 表示为如下形式 $t = \sum_{i=1}^n s_i + s_{n+1}$, 其中 $s_i \in (0, \epsilon)$ 和 $s_{n+1} \in I$ 对于每一个 $i = 1, \dots, n$ 。由定义 2.7 的 ii) 可得

$$\varphi_t(x) = \varphi_{s_{n+1}} \circ \varphi_{s_n} \circ \dots \circ \varphi_{s_2} \circ \varphi_{s_1}(x).$$

显然, $y = \varphi_{s_n} \circ \dots \circ \varphi_{s_2} \circ \varphi_{s_1}(x) \in U_x$ 。因此, $\varphi_t(x) = \varphi_{s_{n+1}}(y) \in U_{\varphi_s(x)}$ 。 $\square$

作为这一结果的直接推论, 我们可以得到以下引理。

引理 3.5. 令 X 是一个有限拓扑空间, 并令 $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \times X \rightarrow X$ 是一个半流。则

1. $\text{id} \geq \varphi_t$ 对于每一个 $t \in \mathbb{R}_0^+$ 。
2. $\varphi(t, x) \in U_x$ 对于每一个 $t \in \mathbb{R}_0^+$ 和 $x \in X$ 。
3. $\varphi(t, y) = y$ 对于所有 $t \in \mathbb{R}_0^+$ 和每个 $y \in X$ 满足 $ht(y) = 0$ 。

这些结果表明, 半流的动力学总是从顶层元素移动到较低层元素。在有限拓扑空间的哈斯图中, 我们朝底部前进 (见图 1)。此外, 必须有下降击点来定义非平凡的半流。

定理 3.6. 令 X 是一个有限拓扑空间。如果 X 没有向下击打点且 $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \times X \rightarrow X$ 是半流, 则 φ 是平凡的。

Proof. 令 $x \in X$ 。我们将通过 x 的高度归纳法证明对于每个 $t \in \mathbb{R}_0^+$ 都有 $\varphi_t(x) = x$ 。假设 $ht(x) = 0$; 然后, 根据引理 3.5 中的 3., 对于每一个 $t \in \mathbb{R}_0^+$, 我们有 $\varphi_t(x) = x$ 。情况 $ht(x) = 1$ 显然成立, 因为 $U_x \setminus \{x\}$ 是一组不相交的点集, 所有这些点都被 φ_t 固定。因此, 由于对每一个 $t \in \mathbb{R}_0^+$, φ_t 的连续性, 我们得出 $\varphi_t(x) = x$ 。现在假设当 $ht(x) = n$ 时结果成立。考虑 $ht(x) = n+1$ 的情况。根据假设, $U_x \setminus \{x\}$ 没有最大值, 因此存在有限多个点 y_i , 使得 $y_i \prec x$, 其中 $i = 1, \dots, m$ 。显然对于每一个 $i = 1, \dots, m$ 都有 $ht(y_i) < n+1$ 。由归纳假设, 我们知道对于每一个 $\varphi_t(y_i) = y_i$ 和 $t \in \mathbb{R}_0^+$, 都有 $i = 1, \dots, m$ 。如果对于某些 $i = 1, \dots, m$, $\varphi_t(x) \leq y_i < x$ 成立, 那么由于 φ_t 的连续性, 我们有对于每一个 $j \neq i$ 都成立 $y_j = \varphi_t(y_j) \leq \varphi_t(x) \leq y_i$, 这导致了一个矛盾。因此, $\varphi_t(x) = x$ 。 $\square$

给定一个有限拓扑空间 X , 令 $D(X)$ 表示 X 的下拍点集。那么, 存在非平凡半流在 X 上当且仅当 $D(X)$ 非空。对于每个 $x \in D(X)$, 我们用 $\bar{x}$ 表示 $U_x \setminus \{x\}$ 的最大值。

示例 3.7. 设 X 是一个有限拓扑空间, 使得 $D(X)$ 非空。定义 $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \times X \rightarrow X$ 为

$$\varphi(t, x) := \begin{cases} x & \text{if } t = 0, \\ \bar{x} & \text{if } x \in D(X) \text{ and } t \in (0, \infty), \\ x & \text{if } x \notin D(X) \text{ and } t \in (0, \infty). \end{cases}$$

很容易验证 φ 是一个非平凡半流。此外，很明显对于每一个 $t \in (0, \infty)$, $\varphi_t(X)$ 是 X 的强形变收缩核。我们从命题 2.4 推导出这个结果。我们可以将 φ 解释为去除 X 中某些向下击点的过程。

请注意，并非每个在有限拓扑空间 X 上的半流都与示例 3.7 中定义的一样。例如，考虑示例 3.1。此外，可能存在不允许可非平凡半流的可缩空间。为了说明这一点，设 X 是一个不可缩空间。定义 Y 为 X 和单点 $\{y\}$ 的并集，保持在 X 中给定的顺序，并声明对于每一个 $x \in X$ 都有 $y > x$ 。显然， Y 是可缩的，但 $D(Y) = \emptyset$ 。

定理 3.8. 令 X 是一个有限拓扑空间，并且令 $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \times X \rightarrow X$ 是一个非平凡半流。然后 $\varphi_t = r$ 对于每个 $t \in \mathbb{R}^+$ ，其中 $r : X \rightarrow r(X)$ 是收缩，而 $r(X)$ 是 X 的强形变收缩。

Proof. 首先，观察到存在有限数量的连续映射 $r : X \rightarrow X$ ，使得 $r \leq \text{id}$ ，其中 id 是恒等映射，因为 X 是一个有限拓扑空间。因此，存在有限数量的如下形式的连续映射链 $\text{id} > r_1 > \dots > r_n$ 。注意这些链都是有限的。从这一点我们可以推断出存在一个正实数值 a 满足对于每一个 $t \in (0, a)$ 都有 $\varphi_t = r : X \rightarrow X$ ，其中 r 是一个连续映射使得 $\text{id} > r$ 。否则，我们会与之前的评论产生矛盾。

现在，我们证明 $r(X)$ 是 X 的强形变收缩，通过证明 $i \circ r = \text{id}$ 和 $r \circ i$ 同伦于 id 其中 $i : r(X) \rightarrow X$ 表示包含。让我们考虑 $t \in (0, a)$ ，显然对于某些 $t_1, t_2 \in (0, t)$ 有 $t = t_1 + t_2$ 。然后

$$\varphi_t(x) = \varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2}(x),$$

这与 $r(x) = r^2(x)$ 相同。这证明了 r 是 $r(X)$ 上的恒等映射，即， $r : X \rightarrow r(X)$ 是一个收缩。根据构造，我们有 $i \circ r \leq \text{id}$ 。这意味着 $r \circ i$ 同伦于 id ，依据命题 2.1。因此， $r(X)$ 是一个强形变收缩核。

我们将证明对于每一个 $t \in \mathbb{R}^+$ ，都有 $\varphi_t = r$ 。假设 $t \in [a, \infty)$ 。那么 $t = \sum_{i=1}^n t_i$ ，其中对于每一个 $i = 1, \dots, n$ 都有 $t_i \in (0, a)$ 。因此，

$$\begin{aligned} \varphi_t(x) &= \varphi_{t_n} \circ \dots \circ \varphi_{t_1}(x) \\ &= r \circ \dots \circ r(x) = r^n(x) = r(x). \end{aligned}$$

□

作为这一结果的直接推论，我们得到了一个新的证明 [7, Proposition 2.4]。

推论 3.9. 令 X 是一个有限拓扑空间。如果 $\varphi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ 是一个流，则 φ 是平凡的。

Proof. 我们通过矛盾进行论证。假设 φ 是非平凡的。则存在 $t > 0$ 和 $x \in X$ ，使得 $\varphi(t, x) = y \neq x$ (如果 $t < 0$ ，那么 $\varphi(t, x) = y \neq x$ ，并且我们有 $\varphi(-t, y) = x$ ，其中 $-t > 0$)。另一方面， $\varphi|_{\mathbb{R}_0^+ \times X}$ 是一个半流。根据定理 3.8，对于每一个 $t > 0$ ，都有 $\varphi(t, x) = r(x)$ ，其中 $r : X \rightarrow X$ 是一个强形变收缩。然而，除非 r 是恒等映射，否则 r 没有逆映射，这就导致了矛盾。 □

总之, 给定一个有限拓扑空间 X , 一个非平凡半流 $\varphi: \mathbb{R}_0^+ \times X \rightarrow X$ 本质上是一个强形变收缩。此外, 由于 X 是有限的, 因此可以定义在其上的半流数量有限。例如, 在示例 3.1 中, 很容易验证可以定义在 X 上的非平凡半流只有 6 个。我们已在图 2 中表示了它们。

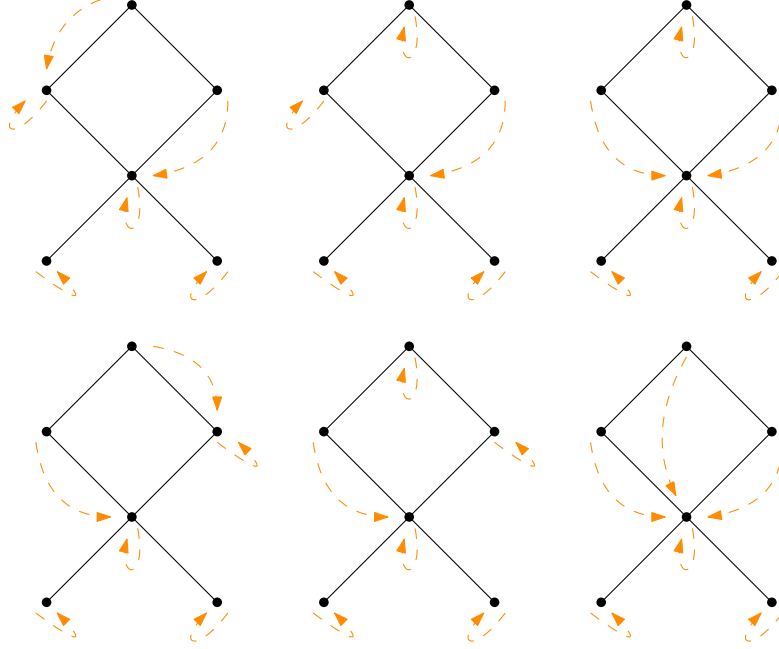


Figure 2: 描述在示例 3.1 中定义的空间 X 上的非平凡半流。

4 计数半流

给定任何有限拓扑空间 X , 我们定义 $S_F(X)$ 为可以在 X 上定义的不同半流的数量。作为第 3 节结果的直接推论, 我们可以得出以下定理。

定理 4.1. 令 X 是一个有限拓扑空间。则 $D(X) = \emptyset$ 当且仅当 $S_F(X) = 1$ 。

我们现在研究有限拓扑空间 X 的下降拍点数量与数量 $S_F(X)$ 之间的关系。

命题 4.2. 令 X 为一个有限拓扑空间。那么 $S_F(X) \geq 2^{|D(X)|}$ 。

Proof. 设 $D(x) = \{x_1, \dots, x_n\}$ 使得 $ht(x_i) \geq ht(x_j)$ 对每个 $1 \leq i < j \leq n$ 成立。对于每个下拍点 $x_i \in D(X)$, 我们用 $\bar{x}_i$ 表示 $U_{x_i} \setminus \{x_i\}$ 的最大值。考虑 $r_i(x_i) := \bar{x}_i$ 和 $r_{i|X \setminus \{x_i\}} := \text{id} : X \setminus \{x_i\} \rightarrow X \setminus \{x_i\}$ 。通过结合上述定义的缩回 r_i , 我们可以获得 2^n 个不同的半流。我们证明最后一个断言。令 $I = (a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$ 并设定 $X_i^I := X \setminus \{x_j \in D(X) | j \leq i \text{ 和 } a_j = 1\}$ 。对于每个 $1 \leq i \leq n$, 定义 $r_{a_i} : X_{i-1}^I \rightarrow X_i^I$ 为 $r_{a_i} := \text{id}$ 如果 $a_i = 0$ 和 $r_{a_i}(x) := r_{i|X_{i-1}^I}(x)$ 如果 $a_i = 1$, 其中 $X_0^I = X$ 。考虑由 $r_I(x) := r_{a_n} \circ r_{a_{n-1}} \circ \dots \circ r_{a_2} \circ r_{a_1}(x)$ 定义的 $r_I : X \rightarrow X_n^I$ 。

我们验证 r_I 是一个强形变收缩。根据构造, 显然有 $r_I \circ i = \text{id}_{X_n^I}$, 其中 $i: X_n^I \rightarrow X$ 是包含映射, 并且还有 $i \circ r_I \leq \text{id}_X$ 。给定 $I, J \in \{0, 1\}^n$, 显然 $r_I = r_J$ 当且仅当 $I = J$ 。因此, 存在 2^n 种形式为 r_I 的不同强形变收缩。综上所述, 对于每一个 $t > 0$ 和 $x \in X$, 由 $\varphi^I(0, x) := x$ 定义的 $\varphi^I: \mathbb{R}_0^+ \times X \rightarrow X$, 其中包含 $x \in X$ 和 $\varphi^I(t, x) := r_I(x)$, 是一个半流。 $\square$

定理 4.3. 对于每一个正整数 $n \geq 2$, 存在一个有限拓扑空间 X , 使得 $D(X) = 1$ 和 $S_F(X) = n$ 。

Proof. 考虑由 $X_n := \{\bar{x}_0, x_0, x_1^+, \bar{x}_1, x_1, x_2^+, \bar{x}_2, x_2, \dots, x_n^+, \bar{x}_n, x_n\}$ 给出的有限拓扑空间 $\bar{x}_i < x_j, \bar{x}_j; x_i < x_j$ 和 $x_i^+ < x_j, \bar{x}_j$ 对于每一个 $i < j$, 其中 n 是一个非负整数 (参见图 3 中的 Hasse 图 X_3)。显然, X_n 只有一个下降点, $D(X_n) = \{x_0\}$ 。此外, 很容易推导出 $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ 是移除下降点后 X 的唯一下降点。考虑由 $r_i(x_j) := \bar{x}_j$ 定义的缩回 $r_i: X_n \rightarrow X_n$, 对于所有 $0 \leq j \leq i$ 和 $r_i(x) := x$ 否则, 其中 $i \leq n$ 。 X 上的非平凡半流由 r_i 给出。因此, $S_F(X_n) = n + 2$ 。 $\square$

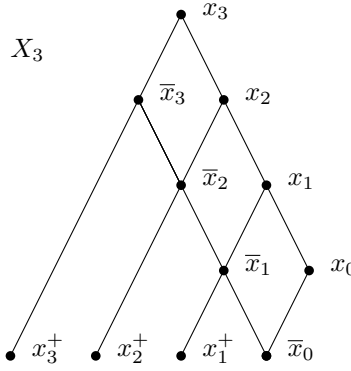


Figure 3: X_3 的哈塞图来自定理 4.3 的证明。

请注意, 通过对定理 4.3 证明中的空间 X_n 进行修改, 我们可以生成具有 n 个不同半流的无限多个有限拓扑空间。定理 4.3 中提出的构造表明, 下降击点并不是获得非平凡半流的独特重要点。在这种情况下, 图 3 中的空间 X_3 的点 x_i 起着重要作用。在以下定义中, 我们确定了这类点。

定义 4.4. 令 X 为一个有限拓扑空间和 $y \in X$ 。我们说如果存在一个点序列 $x_1, \dots, x_n \in X$, 使得 x_1 是 X 的下降节拍点, x_{i+1} 是 $X \setminus \{x_1, \dots, x_i\}$ 的下降节拍点对每一个 $i = 1, \dots, n-1$, $ht(x_i) \leq ht(x_j)$ 在 X 中当且仅当 $i \leq j$ 和 $y = x_n$, 那么 y 是一个潜在的弱拍点。

给定一个有限拓扑空间 X , 很明显, 通过考虑平凡序列: x , 每一个下击点 $x \in X$ 都是一个潜在的下击点。此外, 如果 x 是一个潜在的下击点, 则存在一个下击点 $y \in X$ 使得 $y < x$ 。

定理 4.5. 令 X 是一个有限拓扑空间且 $y \in X$ 。则存在一个非平凡的半流 $\varphi: \mathbb{R}_0^+ \times X \rightarrow X$, 使得对于每一个 $t > 0$ 都有 $\varphi(t, y) \neq y$ 成立, 当且仅当 y 是一个潜在的下击点。

Proof. 假设 y 是一个潜在的弱拍点。然后存在一个序列 $x_1, \dots, x_n \in X$, 使得 x_1 是 X 的下降击点, x_{i+1} 是 $X \setminus \{x_1, \dots, x_i\}$ 的下降击点对于每一个 $i = 1, \dots, n-1$, $ht(x_i) \leq ht(x_j)$ 在 X 中当且仅当 $i \leq j$, 和 $y = x_n$ 。令 $\bar{x}_i$ 为 $X \setminus \{x_1, \dots, x_{i-1}\}$ 中 U_{x_i} 在 $i > 2$ 的最大值, 并令 $\bar{x}_1$ 为 X 中 U_{x_1} 的最大值。定义 $\varphi: \mathbb{R}_0^+ \times X \rightarrow X$ 通过 $\varphi(0, x) := x$ 和 $\varphi(t, x) := r(x)$, 其中 $r: X \rightarrow X$ 是由 $r(x_i) := \bar{x}_i$ 给出的收缩, 对于每一个 $i = 1, \dots, n$ 和 $r|_{X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}} := \text{id}: X \setminus \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ 。由 r 的构造可知, 对于每一个 $x \in X$ 都有 $r(x) \leq x$ 。为了证明 r 的连续性, 我们研究可能的情况, 在这些情况中我们考虑 $x < x'$ 在 X 中。假设 $x, x' \notin \{x_1, \dots, x_n\}$ 。然后 $x = r(x) < r(x') = x'$ 。假设对于某些 $i = 1, \dots, n$ 和 $x' \notin \{x_1, \dots, x_n\}$, 有 $x = x_i$ 。这表明 $r(x_i) = \bar{x}_i < x_i < x' = r(x')$ 。假设 $x \notin \{x_1, \dots, x_n\}$ 和 $x' = x_i$ 对于某个 $i = 1, \dots, n$ 成立。根据 r 的定义, $r(x) = x$ 和 $r(x_i) = \bar{x}_i$ 。如果 $\bar{x}_i \not\leq x$, 则我们得到 x_i 不是 $X \setminus \{x_1, \dots, x_{i-1}\}$ 中的下降重点, 这导致了一个矛盾。如果 $x > \bar{x}_i$, 那么 $\bar{x}_i$ 不是 $X \setminus \{x_1, \dots, x_{i-1}\}$ 中 $U_{x_i} \setminus \{x_i\}$ 的最大值, 因为 $\bar{x}_i < x < x_i$, 这导致了一个矛盾。假设 $x, x' \in \{x_1, \dots, x_n\}$, 比如说 $x = x_i$ 和 $x' = x_j$ 。根据定义 4.4, 我们得到 $i < j$ 因为 $ht(x_i) < ht(x_j)$ 。通过构造 r , $\bar{x}_i = r(x_i) < x_i$ 和 $\bar{x}_j = r(x_j) < x_j$ 。因此, $\bar{x}_i < x_j$ 。如果 $\bar{x}_i \notin \{x_1, \dots, x_n\}$, 则 $\bar{x}_i \leq \bar{x}_j$, 因为 $\bar{x}_j$ 是 U_{x_j} 在 $X \setminus \{x_1, \dots, x_{j-1}\}$ 中的最大值。如果 $\bar{x}_i \in \{x_1, \dots, x_n\}$, 则与定义 4.4 矛盾。为了总结, 我们证明了 $r \circ i = \text{id}_{r(X)}$, 其中 $i: r(X) \rightarrow X$ 是包含。我们证明了对于每一个 i 都有 $r(x_i) \notin \{x_i, \dots, x_n\}$ 。我们通过反证法进行论证, 假设对于某个 $j > i$ 有 $r(x_i) = x_j$, 即 $\bar{x}_i = x_j$ 。通过 r 的构造, 我们得到 $x_i > x_j$ 。根据假设, $i > j$ 因为 $ht(x_i) > ht(x_j)$, 这导致了矛盾。此外, 通过 r 的构造, 很明显 $r(x_i) \neq x_j$ 与 $j \leq i$ 。因此, 对于每一个 $1 \leq i \leq n$, 都有 $r(x_i) \in X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ 。由于 $r|_{r(X)} = \text{id}_{r(X)}$, 我们得到 $r \circ i = \text{id}_{r(X)}$ 。

假设存在一个非平凡的半流 φ , 使得 $\varphi(t, y) \neq y$ 。定义 $r: X \rightarrow X$ 为 $r(x) := \varphi(1, x)$ 。让我们考虑 $\{x_1, \dots, x_n\} := X \setminus r(X)$, 在这里我们有 $i < j$, 只要 $ht(x_i) \leq ht(x_j)$ 。由引理 3.5 的 1. 和 $r(X)$ 是 X 的强形变收缩核的事实 (见定理 3.8), 我们可以推断出通过考虑 $\{x_1, \dots, x_n\}$, y 可能是一个下降击点。□

命题 4.6. 令 X 为一个有限拓扑空间, 并令 A 为 X 的潜在下拍点的最大反链, 使得对于每一个 $a, b \in A$, 均有 $U_a \cap U_b = \emptyset$, 其中 $a \neq b$ 。然后 $S_F(X) \geq 2^{|A|}$ 。

Proof. 通过定理 4.5 的证明和假设, 对于 A 的每个潜在的下拍点 a , 都存在一个非平凡的半流 φ^a , 使得对每一个 $t > 0$ 都有 $\varphi^a(t, a) \neq a$, 并且对每一个 $t \geq 0$ 和 $x \in X \setminus \{U_a\}$ 都有 $\varphi^a(t, x) = x$ 。对于每一个 $a \in A$, 设 $r_a := \varphi^a(1, x): X \rightarrow X$ 。通过重复命题 4.2 的证明中关于收缩映射 r_a 的相同论证, 我们可以得到期望的结果。□

命题 4.7. 令 X 为一个有限拓扑空间, 并且 $x \in X$ 。如果 x 不是一个下降点, 并且 φ 是定义在 X 上的非平凡半流, 使得对于每一个 $t > 0$ 都有 $\varphi(t, x) \neq x$, 那么存在一个下降点 $y < x$ 使得对于每一个 $t > 0$ 都有 $\varphi(y, t) \neq y$ 。

Proof. 令 $r : X \rightarrow X$ 为定义 φ 的收缩。存在 $y_1, y'_1 \in X$ 使得 $y_1 \prec x$ 和 $y'_1 \prec x$ 满足 $y_1 \not\sim y'_1$, 且 $r(x) \leq y_1$ 因为 x 不是一个下击点。通过 r 的连续性, 我们推断出 $r(y'_1) \neq y'_1$ 。根据定理 4.5, y'_1 是一个潜在的下拍点。如果 y'_1 是一个下拍点, 那么我们可以得出结论。假设 y'_1 不是一个下拍点。那么我们可以重复之前的论证以获得一个潜在的下拍点 y'_2 并讨论它是否为下拍点。由有限性可知, 存在一个下降击点 y'_n , 使得 $y'_n < y'_{n-1} < \cdots < y'_1 < x$ 和 $r(y'_n) \neq y'_n$ 。 $\square$

这一结果也在图 2 中进行了说明。将唯一潜在的下降节拍点 X , 即 A 移动的半流, 同时也会移动 B 、 C 或两者 B 和 C 。此外, 这个示例证明存在这样的半流, 可以将一个潜在的下拍点 $x \in X$ 移动, 并在 U_x 中固定一个下拍点。

命题 4.8. 令 X 是一个有限拓扑空间, 使得每个潜在的下拍点 $x \in X$ 的高度为 1, 并令 n 是 X 的潜在下拍点的数量。那么 $S_F(X) = 2^n$ 。

Proof. 根据假设, x 是一个潜在的低点当且仅当 x 是一个低点。对于每个低点 x , 存在唯一的半流 φ , 使得对于每一个 $t > 0$ 和 $\varphi(t, y) = y$, 有 $\varphi(t, x) \neq x$ 成立, 否则不成立。通过组合这些半流, 我们可以得到定义在 X 上的每一个半流。具体来说, 我们有 2^n 个不同的半流。 $\square$

命题 4.8 表明并非每一个自然数都能作为某个高度为一的有限拓扑空间 X 的 $S_F(X)$ 实现。此外, 在定理 4.3 的证明中, 有限拓扑空间 X_n 的高度是 $n + 1$ 。这自然引出了以下问题: 是否存在一个自然数 m , 使得每一个正数都可以表示为某个有限拓扑空间 X 的 $S_F(X)$, 该空间具有 $ht(X) \leq m$? 是否存在一个简单的闭合公式来表示 $S_F(X)$, 该公式基于 X 的潜在下拍点数量?

References

- [1] P. S. Alexandroff. Diskrete Räume. *Mathematiceskii Sbornik (N.S.)*, 2:501–518, 1937.
- [2] J. A. Barmak. *Algebraic topology of finite topological spaces and applications*. Lecture Notes in Mathematics 2032. Springer, 2011.
- [3] J. A. Barmak, M. Mrozek, and T. Wanner. A Lefschetz fixed point theorem for multivalued maps of finite spaces. *Math. Z.*, 294:1477–1497, 2020.
- [4] J. A. Barmak, M. Mrozek, and T. Wanner. Conley index for multivalued maps on finite topological spaces. *Found. Comput. Math.*, 2024.
- [5] P. J. Chocano, D. Mondéjar Ruiz, M. A. Morón, and F. R. Ruiz del Portal. On the triviality of flows in Alexandroff spaces. *Topol. Appl.*, 339, Part A, 2023.
- [6] P. J. Chocano, M. A. Morón, and F. R. Ruiz del Portal. Computational approximations to compact metric spaces. *Phys. D: Nonlinear Phenom*, 433(133168), 2022.

- [7] P. J. Chocano, M. A. Morón, and F. R. Ruiz del Portal. Coincidence theorems for finite topological spaces. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, (To appear), 2024.
- [8] M. C. McCord. Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces. *Duke Math. J.*, 33:465–474, 1966.
- [9] R. E. Stong. Finite topological spaces. *Trans. Am. Math. Soc.*, 123(2):325–340, 1966.

P.J. CHOCANO, 应用数学系, 材料科学与工程及电子技术, ESCET 西班牙马德里莫斯特拉斯 28933 乌奈隆卡洛斯国王大学

电子邮件地址: `pedro.chocano@urjc.es`