分数量子绝缘体的通量附加理论

Steven Gassner,[1] Ady Stern,[2] and C. L. Kane[1]

[1]*Department of Physics and Astronomy, University of Pennsylvania, Philadelphia, Pennsylvania 19104, USA*

[2]*Department of Condensed Matter Physics, Weizmann Institute of Science, Rehovot 7610001, Israel*

(10Dated: 2025 年 4 月 11 日)

在没有磁场的情况下寻找分数量子霍尔相的工作主要集中在模仿朗道能级特征的平带系统上。在另一种方法中，分数激子绝缘体（FEI）已被提出作为一种相关电子-空穴流体，在具有强相互作用的不同角动量带之间的带反转附近出现。找到能够稳定这种状态的真实相互作用哈密顿量仍然是一个有趣的挑战。在这里，我们描述了复合玻色子和复合费米子理论，这些理论突出了在一类带反转模型中 $(p_x + ip_y)^m$ 激子配对在稳定 FEI 中的重要性。我们预测了一系列类似贾恩和类似的劳夫林 FEI 状态，其中最简单的具有玻色子 $\nu = 1/2$ 分数量子霍尔态的拓扑序。我们讨论了这些发现对于相互作用陈绝缘体模型中手性自旋液体相最近数值研究的意义。

介绍。量子凝聚态物理的一个近期研究重点是在零磁场下寻找类似于分数量子霍尔 (FQH) 状态的相关电子态。分数陈绝缘体 (FCIs) 最初是为填充近平坦的布洛赫能带并具有非零陈数且存在强相互作用的情况而提出的理论 [1–9]。近期在二维过渡金属二硫属化物材料 [10–12] 和多层石墨烯器件 [13] 中报道的实验结果增强了对该范式的兴趣。

部分填充的平坦陈带提供了一条通往 FQH 状态的道路，这条道路在精神上最接近部分填充朗道能级。经验法则，如优化贝里曲率的一致性和饱和量子度量上的迹条件，是工程布洛赫带以模仿朗道能级的方法，这当部分填充 [14–16] 时实现了 FCI。对于纯二维电子气，伽利略不变性规定霍尔电导与朗道能级填充 $\sigma_{xy} = \nu e^2/h$ 相关联。因此，FQH 平台出现在特定的 ν 的集合中 $\nu \approx \sigma_{xy} h/e^2$。然而，周期晶格消除了 σ_{xy} 和 ν [17, 18] 之间的对应关系。这提出了一个疑问，即部分量化的能带填充对于实现 FQH 状态是否是必不可少的。如果不是这样，那么是什么决定了这个分数?

在最近的工作中，考虑了一条不同的路径，在这条路径中，电子和空穴的关联流体中出现了一个 FQH 状态，称为分数激子绝缘体 (FEI)[19]。考虑了形式为 [20]$|\Psi_m\rangle = \sum_N (f^N/N!)|\psi_m^N\rangle$，

$$\psi_m^N(\{z_i, w_j\}) = \frac{\prod_{i<i'}(z_i - z_{i'})^m \prod_{j<j'}(w_j - w_{j'})^m}{\prod_{i,j}(z_i - w_j)^m}, \tag{1}$$

其中 $z_i(w_j)$ 表示电子 (空穴) 的复坐标，逸度为 f。这个波函数类似于一个两组分的 Halperin 波函数 [21]，但它不包括在朗道能级中出现的高斯因子。它不需要分数化的带填充，但需要电子和空穴的密度相等。已经证明对于 $m = 1$ 方程（1）是一个简单非相互作用两带模型的精确基态，该模型描述了陈绝缘体。使用 Laughlin 的等离子体类比的一个变体 [22]，人们认为对于奇数整数 $m > 1$（1）描述了一个由电荷 $\pm e$ 费米子（玻色子）组成的 Laughlin 态，当 m 为奇数（偶数）时，并具有 $\sigma_{xy} = (1/m)e^2/h$。

这样的 FEI 状态是可能的证据包括（i）复合费米子平均场理论，以及（ii）耦合线构造。然而，这些方法都没有提供如何实现这一状态作为物理可行哈密顿量基态的指导。在这两种情况下，模型输入的结果取决于 σ_{xy} 的值。对于 (i)，它依赖于通量附着方案以及复合费米子哈密顿量，而对于 (ii)，则依赖于指定可解极限的线耦合形式。因此，与 FQH 状态不同，在那里 σ_{xy} 由磁场（或朗道能级填充）指定，从这些理论中无法明确知道给定微观模型中的 σ_{xy} 应为何值。Ref. [19] 还引入了第三种方法：(iii) 使用 Ref.[23] 中介绍的方法构建了一个精确的（1）哈密顿量，该方法涉及特定的长程多体相互作用。如果那些相互作用被随意设为零，则得到的非相互作用费米子问题描述了具有角动量 m 激发配对的两个耦合带。这导致了这样的建议：在合适的相互作用下，FEI 态可能通过反转两个角动量相差 m 的能带来实现。

尚待确定的是，对于物理上可行的相互作用，倒置带能否稳定一个 FEI 基态。在本文中，我们通过展示基于复合玻色子 [24–26] 或复合费米子 [27, 28] 的通量附着理论，在导带和价带之间的角动量 m 耦合提供了一个能够稳定 FQH 态的相互作用，从而在这方面取

得了一定进展。这超越了之前的理论，通过澄清角动量 m 激子配对选择通量附着方案的物理机制，确定了 FQH 电导。

我们将首先发展复合玻色子理论。我们将展示具有 p 个束缚通量（p 奇数）的复合玻色子，激子配对项仅在降低能量和打开能隙时才有效当 $p=m$ 时。因此，复合玻色子理论选择 $p=m$。对于 $m=1$，该理论正确预测了一个整数量化的霍尔态带有 $\sigma_{xy}=e^2/h$。对于奇数整数 $m>1$，这一理论描述了一种类似于含有 $\sigma_{xy}=(1/m)e^2/h$Laughlin 态的电子和空穴的相关流体。接下来我们将引入一种复合费米子理论，它描述了更大一类状态，类似于 Jain 态 [27]。我们将论证对于角动量 m 的激子配对，在将 p 通量附加到电子（p 偶数）的通量附着方案中，可以导致具有 Chern 数 $n=m-p$ 的有间隙复合费米子态。我们将通过讨论这些新状态中最简单的一种来结束，这种状态是一种具有 $\nu=1/2$FQH 状态拓扑序的玻色子态及其对在强相互作用下实现手性自旋液体的数值工作的意义。

带反转模型。我们从一个哈密顿量 $\mathcal{H}=\mathcal{H}_0+\mathcal{H}_{\text{pair}}$ 开始，描述角动量 m 带反转的情况，其中

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0&=\sum_{\mathbf{k}}\left(\frac{|\mathbf{k}|^2}{2m^*}-\mu\right)\left(\Psi^\dagger_{e,\mathbf{k}}\Psi_{e,\mathbf{k}}+\Psi^\dagger_{h,\mathbf{k}}\Psi_{h,\mathbf{k}}\right)\\ \mathcal{H}_{\text{pair}}&=\sum_{\mathbf{k}}vi^m(k_x+ik_y)^m\Psi^\dagger_{e,-\mathbf{k}}\Psi^\dagger_{h,\mathbf{k}}+h.c.\end{aligned}\tag{2}$$

$\Psi^\dagger_{e,\mathbf{k}}=c^\dagger_{c,\mathbf{k}}$ 在导带 (c) 中创建一个电子 (e)，而 $\Psi^\dagger_{h,\mathbf{k}}=c_{v,-\mathbf{k}}$ 在价带 (v) 中创建一个空穴 (h)。术语 $\mathcal{H}_0$ 描述了 c 和 v 带（两者都具有有效质量 m^*），它们对于 $\mu>0$ 是反向的。术语 $\mathcal{H}_{\text{pair}}$ 描述了电子和空穴之间的 “激子配对”。这是在 c 和 v 带之间的角动量相差 $\Delta J_z=\hbar m$ 时允许的最低阶对称耦合。对于 $m=1$，它描述了“$p+ip$”配对，在存在时间反演对称性破缺的情况下，这种配对在具有反演和/或 C_2 旋转对称性的材料中是可能的。条件 $m>1$ 需要额外的对称性来禁止较小的 m。例如，$m=3$ 可能由于晶体中 s 和 f 状态的反演而产生，该晶体具有 C_6 旋转对称性 [29]。

对于 $\mu>0$，在没有相互作用的情况下，(2) 描述了一个具有 $\sigma_{xy}=me^2/h$ 的陈绝缘体。对于 $m=1$，它描述了一个质量为负的正则化狄拉克费米子 [30–32]。在这种情况下，对于 $\mu=m^*v^2/2$，基态波函数以公式 (1) 的形式精确给出，当用实空间算子 $\Psi^\dagger_c(z)$ 和 $\Psi^\dagger_v(w)$ 表示时，在定义为满价带 [19] 的真空上作用时为 $f=m^*v/(2\pi)$。我们试图识别在强相互作用存在下 $m>1$ 可能的相。

复合玻色子理论。我们通过执行一个奇异规范变换来定义复合玻色子算符，该变换将 p 磁通量子附着到导带中的电子上，并将 $-p$ 磁通量子附着到价带中的空穴上。由于等密度的电子和空穴被附加了相反的磁通，因此统计磁通在平均意义上将是零。虽然任何奇数整数 p 都定义了一个具有此性质的有效统计规范变换，但我们将看到下面选择 $p=m$ 是由 $\mathcal{H}_{\text{pair}}$ 的形式决定的。

就电子（空穴）复合玻色子算符 $\tilde{\Phi}_{e(h)}(z=x+iy)$ 而言，费米子算符是

$$\begin{aligned}\Psi^\dagger_e(z)&=\tilde{\Phi}^\dagger_e(z)e^{ip\int d^2z'\Theta(z-z')\rho(z')}\\ \Psi^\dagger_h(w)&=\tilde{\Phi}^\dagger_h(w)e^{-ip\int d^2w'\Theta(w-w')\rho(w')}\end{aligned}\tag{3}$$

其中 $\rho(z)=\tilde{\Phi}^\dagger_e(z)\tilde{\Phi}_e(z)-\tilde{\Phi}^\dagger_h(z)\tilde{\Phi}_h(z)$，和 $\Theta(z)=\arg z$。将（3）代入（2），我们得到

$$\mathcal{H}_0=\frac{|(\nabla-i\mathbf{a})\tilde{\Phi}_e|^2+|(\nabla+i\mathbf{a})\tilde{\Phi}_h|^2}{2m^*}+V(\tilde{\Phi}_e,\tilde{\Phi}_h)\tag{4}$$

其中包含 $\mathbf{a}=p\int d^2z'\nabla\Theta(z-z')\rho(z')$ 和 $V=-\mu(|\tilde{\Phi}_e|^2+|\tilde{\Phi}_h|^2)+\frac{u}{2}(|\tilde{\Phi}_e|^4+|\tilde{\Phi}_h|^4)-w|\tilde{\Phi}_e|^2|\tilde{\Phi}_h|^2$。（4）包括四次相互作用（带有 $u>w$），这取决于费米子相互作用。然而，这种理论并不能精确预测 u,w。术语 u 即使对于非相互作用的费米子也存在，这是由于泡利不相容原理。

配对项需要更仔细的处理，这将是我们分析的核心。在实空间中，

$$\mathcal{H}_{\text{pair}}=\int d^2\delta z F(\delta z)\Psi^\dagger_e(z)\Psi^\dagger_h(z+\delta z)+h.c.\tag{5}$$

与 $F(\delta z)=v\partial^m_{\delta\bar{z}}\delta^2(\delta z)\equiv v(\partial_x+i\partial_y)^m\delta(x)\delta(y)$。$\delta$-函数将在晶格尺度 d 上进行正则化。对于一个简单的正则化，$\delta^2(\delta z)=(\pi d^2)^{-1}e^{-|\delta z|^2/d^2}$，

$$F(\delta z)=\frac{2^m v}{\pi d^{2+2m}}\delta z^m e^{-|\delta z|^2/d^2}.\tag{6}$$

在复合玻色子算符方面，

$$\mathcal{H}_{\text{pair}}=\int d^2\delta z\tilde{F}_p(\delta z)\tilde{\Phi}^\dagger_e(z)\tilde{\Phi}^\dagger_h(z+\delta z),\tag{7}$$

其中

$$\tilde{F}_p=F(\delta z)e^{-ip\Theta(\delta z)}e^{ip\int d^2z'\rho(z')(\Theta(z-z')-\Theta(z+\delta z-z'))}.\tag{8}$$

第一个指数项描述了电子和空穴之间的统计相互作用。第二个指数项描述了与其他所有电子和空穴的相互作用，并且对于小 δz 可以展开为 $1+i\bar{a}\delta z+\ldots$，其中 $\bar{a}=a_x-ia_y$。使用 (6)，该展开式的首项（零阶在 δz）是

$$\tilde{F}_p(\delta z)=\frac{2^m v}{\pi d^{2+2m}} r^m e^{-r^2/d^2} e^{i(m-p)\theta}, \tag{9}$$

其中 $\delta z=re^{i\theta}$。这表明 (3) 将电子-空穴耦合的角动量移动了 p。重要的是，对于 $p=m$，复合电子和空穴以零角动量配对，表示为 $\tilde{F}_m(\delta z)=\tilde{v}\delta^2(\delta z)$，带有 $\tilde{v}=2^m\Gamma(1+m/2)v/d^m$。然后，

$$\mathcal{H}_{\mathrm{pair}}=\tilde{v}(\tilde{\Phi}_e^\dagger\tilde{\Phi}_h^\dagger+\tilde{\Phi}_h\tilde{\Phi}_e). \tag{10}$$

如果我们选择了 $p\neq m$，那么 (9) 中的 θ 相关性禁止了 δ 函数耦合。在一阶近似下，$\tilde{F}_p$ 将涉及 δ 函数的导数，导致

$$\mathcal{H}_{\mathrm{pair}}\propto\begin{cases}\tilde{\Phi}_e^\dagger(\partial_z-\bar{a})^{p-m}\tilde{\Phi}_h^\dagger+h.c. \ \text{ for } \ p>m,\\ \tilde{\Phi}_e^\dagger(\partial_{\bar{z}}-a)^{m-p}\tilde{\Phi}_h^\dagger+h.c. \ \text{ for } \ p<m.\end{cases} \tag{11}$$

a 依赖性（由规范不变性保证）来自于 (8) 中第二个指数的展开中的高阶项。比较 (10) 和 (11)，由 $\mathcal{H}_{\mathrm{pair}}$ 提供的复合电子和空穴之间的耦合在 $p=m$ 的梯度中阶数最低。这为选择合适的通量附着方案以用于复合玻色子理论提供了机制。

我们接下来展示对于 $p=m$，$\mathcal{H}_{\mathrm{pair}}$ 锁定了复合电子和复合空穴玻色子流体，使得系统能够利用 $\mathcal{H}_{\mathrm{pair}}$ 降低其能量。最简单的方法是采用欧几里得拉格朗日公式，在该公式中 $\mathbf{a}$ 通过陈西蒙斯项实现。拉格朗日密度是

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=&\tilde{\Phi}_e^\dagger\left(\partial_\tau-ia_0-iA_0\right)\tilde{\Phi}_e+\frac{1}{2m^*}|(\nabla-i\mathbf{a}-i\mathbf{A})\tilde{\Phi}_e|^2\\&+\tilde{\Phi}_h^\dagger\left(\partial_\tau+ia_0+iA_0\right)\tilde{\Phi}_h+\frac{1}{2m^*}|(\nabla+i\mathbf{a}+i\mathbf{A})\tilde{\Phi}_h|^2\\&+V(\tilde{\Phi}_e,\tilde{\Phi}_h)+\tilde{v}(\tilde{\Phi}_e^\dagger\tilde{\Phi}_h^\dagger+\tilde{\Phi}_h\tilde{\Phi}_e)+\frac{1}{m}\mathcal{L}_{CS}[a_\mu],\end{aligned} \tag{12}$$

其中我们包含了外部矢量势 A_μ，以及

$$\mathcal{L}_{CS}[a_\mu]=\frac{i}{4\pi}\epsilon_{\mu\nu\lambda}a_\mu\partial_\nu a_\lambda. \tag{13}$$

在没有 $\tilde{v}$ 并且与 a_μ 耦合的情况下，$\mathcal{L}$ 描述了复合电子和空穴的两种玻色流体。它们的密度由 μ 决定，重要的低能自由度是 $\tilde{\Phi}_{e,h}$ 的相位。为了继续进行，我们写出 $\tilde{\Phi}_{e/h}=\sqrt{n_{e/h}}e^{i(\varphi_\sigma\pm\varphi_\rho)}$，其中 $e^{2i\varphi_{\rho(\sigma)}}$ 产生电荷 $2e$（中性复合电子-空穴对）。作用在 $n_e=n_h=\bar{n}\equiv\mu/(u-w)$ 下达到最小。我们接下来将 $\delta n_{e,h}=n_{e,h}-\bar{n}$ 扩展到二次阶，并消去 $\delta n_{e,h}$ 中的大量波动。在所得作用量中，φ_ρ 只出现在组合 $\partial_\mu\varphi_\rho-a_\mu$ 中，可以通过对 a_μ 的规范变换将其消除。我们然后找到 $\mathcal{L}=\mathcal{L}_\sigma+\mathcal{L}_\rho$ 与

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\sigma&=\frac{(\partial_\tau\varphi_\sigma)^2}{u-w}+\frac{\bar{n}}{m^*}(\nabla\varphi_\sigma)^2+2\bar{n}\tilde{v}\cos2\varphi_\sigma\\\mathcal{L}_\rho&=\frac{(a_0+A_0)^2}{u+w}+\frac{\bar{n}}{m^*}(\mathbf{a}+\mathbf{A})^2+\frac{1}{m}\mathcal{L}_{CS}[a_\mu].\end{aligned} \tag{14}$$

对于 $\mathcal{L}_\sigma$，$\cos2\varphi_\sigma$ 项将锁定 φ_σ 并隔离中性部分。为此重要的是 $p=m$。对于其他 p，耦合由 (11) 给出。例如，如果 $p=m+2$，则为 $[(\partial_z\varphi_\sigma)^2-(\partial_z\varphi_\rho)^2]\cos2\varphi_\sigma$，这不会使中性部分出现能隙。对于 $\tilde{v}=0$，电子和空穴电荷各自守恒，并且 $\mathcal{L}_\sigma$ 描述了一个无能隙的戈德斯通模。这表明选择 $p=m$ 是自然的，因为它导致了最稳定的有能隙复合玻色子平均场理论。

当中性部分存在能隙，剩余的低能量自由度由 $\mathcal{L}_\rho$ 描述，该部分对电荷涨落表现出一个能隙。消除 a_μ 后，则剩下 $\mathcal{L}_\rho=m^{-1}\mathcal{L}_{CS}[A_\mu]$，其描述了一个带有 $\sigma_{xy}=m^{-1}e^2/h$ 的分数量子霍尔响应。

复合费米子理论。我们现在考虑将偶数整数 p 附着到通量上以定义复合费米子。在分数量子霍尔效应和分数电荷绝缘体的背景下，复合费米子的平均场理论将没有相互作用时无能隙的问题——部分填充的朗道能级或电子的陈带——映射为一个有能隙的问题，在这个问题中整数个复合费米子朗道能级或迷你带被填充。然后复合费米子的霍尔电导 σ_{xy}^{CF} 是整数（以 e^2/h 为单位），而电子的霍尔电导 σ_{xy}^{e} 是分数，因为 $(\sigma_{xy}^{e})^{-1}=(\sigma_{xy}^{CF})^{-1}+p$。这里，无相互作用的基态是有能隙的，并表现出整数量子霍尔电导。复合费米子起始点有效的必要条件是相互作用足够强以克服这一能隙。当这种情况发生时，一个关闭能隙的相变会将系统从整数量子霍尔状态带到分数量子霍尔状态。我们现在分析后者。

在我们的通量附着方案中，复合费米子看不到平均通量并表现出能隙。我们假设这个能隙足够大以至于可以忽略相互作用。不同的 m 和 p 值然后导致一系列类似于 Jain 序列的分数量子霍尔状态。然而，与 Jain 状态不同的是，p 的值和陈数并不能确定一个特

定的分数量子填充因子。在一个给定系统中选择的 p 值将取决于具体的相互作用，并且超出当前理论的范围来决定。

通量附着 (3) 后，使用 (11) 复合费米子 ($\tilde{\Psi}_{e,h}$) 的哈密顿量（忽略相互作用）是

$$\mathcal{H}_{CF} = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{|\mathbf{k}|^2}{2m^*} - \mu \right) \left(\tilde{\Psi}^\dagger_{e,\mathbf{k}} \tilde{\Psi}_{e,\mathbf{k}} + \tilde{\Psi}^\dagger_{h,\mathbf{k}} \tilde{\Psi}_{h,\mathbf{k}} \right) + \tilde{v} i^{m-p} (k_x + i\,\mathrm{sgn}(m-p) k_y)^{|m-p|} \tilde{\Psi}^\dagger_{e,-\mathbf{k}} \tilde{\Psi}^\dagger_{h,\mathbf{k}} + h.c. \quad (15)$$

方程 (15) 具有 Chern 数 $m-p$ 的间隙，这决定了 σ^{CF}_{xy}。移除与 a_μ 和 A_μ 耦合的 $\tilde{\Psi}_{e,h}$ 后，拉格朗日量为

$$\mathcal{L} = (m-p)\mathcal{L}_{CS}[A_\mu + a_\mu] + p^{-1}\mathcal{L}_{CS}[a_\mu], \quad (16)$$

并描述了一个带隙 FQH 流体。对 a_μ 进行积分则给出一个带有确定系数的 $\mathcal{L}_{CS}[A_\mu]$，该系数决定了

$$\sigma_{xy} = \left(\frac{1}{m-p} + p \right)^{-1} \frac{e^2}{h}. \quad (17)$$

对于 m 为奇数的情况，这一系列可能的状态包括由复合玻色子理论 ($p = m-1$) 预测的状态 $\sigma_{xy} = m^{-1}e^2/h$，以及非相互作用的陈绝缘体带有 $\sigma_{xy} = me^2/h(p=0)$，以及其他状态。有趣的是，这种情形提出了从弱相互作用的整数 $\sigma_{xy} = me^2/h$ 转变为强相互作用克服带隙时的分数 $\sigma_{xy} = m^{-1}e^2/h$ 的可能性。

玻色量子霍尔态和手性自旋液体。上述分析可以应用于电荷为 $\pm q$ 的玻色子系统。该分析是相同的，除了复合玻色子（费米子）理论需要 p 为偶数（奇数）。特别是，具有 $m=2$ 的玻色子理论预计会支持一个类似于 (1) 且带有 $m=2$ 的基态。根据 Ref. 的分析。[19] 此状态比 m 的较高值更稳健，因为波函数即使在配对密度（或逸度，f）较低时也描述了量子霍尔流体。因此，玻色子 $m=2$ 状态是一个吸引人的目标。

这里我们描述了一个玻色子由束缚的单态电子对组成的场景。考虑由哈密顿量 (2) 描述的带自旋电子，其中包含 $m=1$。没有相互作用时，反转状态是一个具有 $\sigma_{xy} = 2e^2/h$ 的陈绝缘体。从非倒状态 $\mu < 0$ 开始，假设 $\uparrow$ 和 $\downarrow$ 电子之间存在强烈的吸引力相互作用，因此低能电荷激发是由 $\Phi^\dagger_{2e} = \Psi^\dagger_{e\uparrow}\Psi^\dagger_{e\downarrow}$ 和 $\Phi^\dagger_{2h} = \Psi^\dagger_{h\uparrow}\Psi^\dagger_{h\downarrow}$ 形成的束缚对，其结合能为 ΔE。对于 $-\Delta E < \mu < 0$，生成电荷 $\pm 2e$ 玻色子对在能量上是有利的，而单个电子和空穴之间仍然存在能隙。方程（7）中的配对项则要求一个二级过程来创建一组单态电子和一组单态空穴。如果可以正确调整相互作用，“玻色带反转”将由

$$\mathcal{H} = -(\mu + \Delta E)(|\Phi_{2e}|^2 + |\Phi_{2h}|^2) + \frac{|\nabla\Phi_{2e}|^2 + |\nabla\Phi_{2h}|^2}{2m^*} + \frac{u}{2}(|\Phi_{2e}|^4 + |\Phi_{2h}|^4) - w|\Phi_{2e}\Phi_{2h}|^2 + v(\Phi^\dagger_{2e}\partial_z^2\Phi^\dagger_{2h} + h.c.) \quad (18)$$

描述。然后通过 3 变换为复合玻色子 $\tilde{\Phi}_{2e,2h}$，并以 $p=2$ 进行，并预测具有 $\sigma_{xy} = (1/2)(2e)^2/h = 2e^2/h$ 的强配对玻色量子霍尔态。

第二个场景可以通过考虑上述带自旋的 $m=1$ 理论，并对 $\downarrow$ 自旋电子执行粒子空穴变换来处理排斥相互作用（例如，$c^\dagger_{c,\mathbf{k},\downarrow} \leftrightarrow c_{v,-\mathbf{k},\downarrow}$ 或等价地 $\Psi^\dagger_{e\downarrow} \leftrightarrow \Psi^\dagger_{h\uparrow}$）。在这种情况下，未反转状态下的电子之间的排斥相互作用导致低能量中性玻色子激子，并且这些激发态携带自旋 $S_z = \pm 1$：$\Phi^\dagger_{+1} = \Psi^\dagger_{e\uparrow}\Psi^\dagger_{h\uparrow}$ 和 $\Phi^\dagger_{-1} = \Psi^\dagger_{e\downarrow}\Psi^\dagger_{h\downarrow}$。分析这种由类似于 (18) 描述的中性 $S_z = \pm 1$ 玻色子引起的激子带反转问题，然后使用 $p=2$ 导致自旋部分具有量子霍尔响应的绝缘状态，从而实现 Kalmeyer Laughlin 手征自旋液体 (CSL) 状态 [33]。

最近的研究 [34–36] 已经研究了一个每三角形磁通量为 $\pi/2$ 的三角晶格霍夫斯塔特-哈伯德（tHH）模型。作为哈伯德 U 的函数，存在从具有 $\sigma_{xy} = 2e^2/h$ 陈绝缘体到识别为 CSL 绝缘态的转变。参考文献 [36] 论证了这种转变与电荷 $2e$ 单重态电子对间隙消失同时发生，暗示掺杂后存在非常规超导性的可能性。tHH 模型与此处研究的模型密切相关。它与具有最近邻跃迁和沿一个对角线的二阶跃迁的，具有 $s(p_x + ip_y)$ 轨道位于 A (B) 子晶格上的双分层方晶格上的 Hubbard 模型相同。跃迁振幅具有相等的幅度 t 和由轨道对称性确定的相位。如果我们另外包含一个交错的子晶格势 μ，那么对于 $|\mu| < 6t$，其中 $U = 0$，该系统是具有两个自旋简并能带且陈数等于 1 的陈绝缘体。对于 $|\mu| = 6t$，系统表现出与 2 和 $m=1$ 相同的带反转过渡。

Divic 等人 [35, 36] 考虑了该模型用于 $\mu = 0$，处于切尔恩绝缘体相中，并发现随着 U 的增加，电荷 $2e$ 对的能隙趋于零。这似乎类似于上述的玻色子能带反转情形 (18)，其中由玻色子电荷 $\pm 2e$ 电子对和空穴对（它们是切尔恩数两个绝缘体的激发）构成的强配对玻色子态具有 $\sigma_{xy} = -2e^2/h$。所得的 CSL 可以被视为 Chern 绝缘体和强配对态之间的差异。当然，这种情况发生在较大的 U 时，远离任何可解极限。如果正确，

那么显然吸引相互作用必须在较大的（排斥）U 下出现，将电子和空穴绑定成电荷 $\pm 2e$ 对。

另一种到达 CSL 相的方法是从平凡绝缘体开始，具有 $|\mu| > 6t$。在这种情况下，从平凡绝缘体到 CSL 的转变类似于上述第二种情景，涉及形成一个相关的 $S_z = \pm 1$ 电子激发流体。在这种情况下，激子束缚是由排斥相互作用驱动的。这一情景与 Divic 等人考虑的模型之间的一个重要区别是，(18) 的粒子空穴变换版本 $SU(2)$ 自旋对称性被减少到由 S_z 生成的 $U(1)$，因此它适用于包含晶场或自旋轨道相互作用的模型。或者，考虑激子带反转问题的一个 $SU(2)$ 不变量版本可能是有趣的。

讨论。在这篇论文中，我们研究了一个相互作用费米子的模型，该模型经历了一次带反转过渡，带有轨道角动量 m 耦合。基于由 m 决定的通量附着方案的复合玻色子分析预测，在反转状态下存在一种强关联的电子和空穴流体，类似于具有 $\sigma_{xy} = (1/m)e^2/h$ 的 Laughlin 态。复合费米子分析预测了一组可能的状态，这些状态类似于 Jain 态。尚待确定的是，对于 $m > 1$(2) 与相互作用（或对于玻色子的 (18)）是否表现出 FEI 相，如果表现出该相，则是否存在直接过渡到平庸绝缘体。数值研究这个问题以及紧密相关的问题将很有趣，即平庸绝缘体和手性自旋液体之间是否存在直接过渡。这项工作确立了能带反转与通量附加相结合的范式作为解决这些问题的有前景的组织原则。

我们感谢 Stefan Divic 和 Clemens Kuhlenkamp 的有益讨论。SG 感谢 NSF GRFP 下 Grant No.DGE-1845298 的资金支持。AS 得到了 CRC TRR-183 关于“纠缠物质态”的支持，以色列科学基金会的支持，以及以色列科学基金会的量子计划的支持。

[1] E. Tang, J.-W. Mei, and X.-G. Wen, High-Temperature Fractional Quantum Hall States, Phys. Rev. Lett. **106**, 236802 (2011).

[2] T. Neupert, L. Santos, S. Ryu, C. Chamon, and C. Mudry, Fractional topological liquids with time-reversal symmetry and their lattice realization, Phys. Rev. B **84**, 165107 (2011).

[3] K. Sun, Z. Gu, H. Katsura, and S. Das Sarma, Nearly Flatbands with Nontrivial Topology, Phys. Rev. Lett. **106**, 236803 (2011).

[4] N. Regnault and B. A. Bernevig, Fractional Chern Insulator, Phys. Rev. X **1**, 021014 (2011).

[5] Parameswaran, S. A and Roy, R. and Sondhi, S. L., Fractional quantum hall physics in topological flat bands, Comptes Rendus Physique **14**, 816 (2013).

[6] Liu, Z. and Bergholtz, E. J., Topological flat bands and fractional chern insulators, Int. J. Mod. Phys. B **27**, 1330017 (2013).

[7] Neupert, Titus and Chamon, Claudio and Iadecola, Thomas and Santos, Luiz H and Mudry, Christopher, Fractional (chern and topological) insulators, Physica Scripta **2015**, 014005 (2015).

[8] A. Stern and L. Fu, Transport properties of a half-filled chern band at the electron and composite fermion phases, Phys. Rev. Lett. **133**, 246602 (2024).

[9] A. Abouelkomsan, N. Paul, A. Stern, and L. Fu, Compressible quantum matter with vanishing drude weight (2024), arXiv:2403.14747 [cond-mat.str-el].

[10] J. Cai, E. Anderson, C. Wang, X. Zhang, W. Holtzmann, Y. Zhang, F. Fan, T. Taniguchi, K. Watanabe, Y. Ran, T. Cao, L. Fu, D. Xiao, W. Yao, and X. Xu, Signatures of fractional quantum anomalous Hall states in twisted $MoTe_2$, Nature **622**, 63 (2023).

[11] Y. Zeng, Z. Xia, K. Kang, J. Zhu, P. Knüppel, C. Vaswani, K. Watanabe, T. Taniguchi, K. F. Mak, and J. Shan, Thermodynamic evidence of fractional Chern insulator in moiré $MoTe_2$, Nature **622**, 69 (2023).

[12] H. Park, J. Cai, E. Anderson, Y. Zhang, J. Zhu, X. Liu, C. Wang, W. Holtzmann, C. Hu, Z. Liu, T. Taniguchi, K. Watanabe, J.-H. Chu, T. Cao, L. Fu, W. Yao, C.-Z. Chang, D. Cobden, D. Xiao, and X. Xu, Observation of fractionally quantized anomalous Hall effect, Nature **622**, 74 (2023).

[13] Z. Lu, T. Han, Y. Yao, A. P. Reddy, J. Yang, J. Seo, K. Watanabe, T. Taniguchi, L. Fu, and L. Ju, Fractional quantum anomalous Hall effect in multilayer graphene, Nature **626**, 759 (2024).

[14] R. Roy, Band geometry of fractional topological insulators, Phys. Rev. B **90**, 165139 (2014).

[15] M. Claassen, C. H. Lee, R. Thomale, X.-L. Qi, and T. P. Devereaux, Position-Momentum Duality and Fractional Quantum Hall Effect in Chern Insulators, Phys. Rev. Lett. **114**, 236802 (2015).

[16] P. J. Ledwith, A. Vishwanath, and D. E. Parker, Vortexability: A unifying criterion for ideal fractional Chern insulators, Phys. Rev. B **108**, 205144 (2023).

[17] D. R. Hofstadter, Energy levels and wave functions of bloch electrons in rational and irrational magnetic fields, Phys. Rev. B **14**, 2239 (1976).

[18] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs, Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential, Phys. Rev. Lett. **49**, 405 (1982).

[19] Y. Hu, J. W. F. Venderbos, and C. L. Kane, Fractional Excitonic Insulator, Phys. Rev. Lett. **121**, 126601 (2018).

[20] J. Dubail and N. Read, Tensor network trial states for chiral topological phases in two dimensions and a no-go theorem in any dimension, Phys. Rev. B **92**, 205307 (2015).

[21] B. I. Halperin, Theory of the quantized Hall conductance, Helv. Phys. Acta **56**, 75 (1983).

[22] R. B. Laughlin, Anomalous Quantum Hall Effect: An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations, Phys. Rev. Lett. **50**, 1395 (1983).

[23] C. L. Kane, S. Kivelson, D. H. Lee, and S. C. Zhang, General validity of Jastrow-Laughlin wave functions, Phys. Rev. B **43**, 3255 (1991).

[24] S. M. Girvin and A. H. MacDonald, Off-diagonal long-range order, oblique confinement, and the fractional quantum Hall effect, Phys. Rev. Lett. **58**, 1252 (1987).

[25] S. C. Zhang, T. H. Hansson, and S. Kivelson, Effective-Field-Theory Model for the Fractional Quantum Hall Effect, Phys. Rev. Lett. **62**, 82 (1989).

[26] N. Read, Order Parameter and Ginzburg-Landau Theory for the Fractional Quantum Hall Effect, Phys. Rev. Lett. **62**, 86 (1989).

[27] J. K. Jain, Composite-fermion approach for the fractional quantum Hall effect, Phys. Rev. Lett. **63**, 199 (1989).

[28] B. I. Halperin, P. A. Lee, and N. Read, Theory of the half-filled Landau level, Phys. Rev. B **47**, 7312 (1993).

[29] J. W. F. Venderbos, Y. Hu, and C. L. Kane, Higher angular momentum band inversions in two dimensions, Phys. Rev. B **98**, 235160 (2018).

[30] N. Read and D. Green, Paired states of fermions in two dimensions with breaking of parity and time-reversal symmetries and the fractional quantum Hall effect, Phys. Rev. B **61**, 10267 (2000).

[31] X.-L. Qi, Y.-S. Wu, and S.-C. Zhang, Topological quantization of the spin hall effect in two-dimensional paramagnetic semiconductors, Phys. Rev. B **74**, 085308 (2006).

[32] B. A. Bernevig, T. L. Hughes, and S.-C. Zhang, Quantum Spin Hall Effect and Topological Phase Transition in HgTe Quantum Wells, Science **314**, 1757 (2006).

[33] V. Kalmeyer and R. B. Laughlin, Equivalence of the resonating-valence-bond and fractional quantum Hall states, Phys. Rev. Lett. **59**, 2095 (1987).

[34] C. Kuhlenkamp, W. Kadow, A. Imamoğlu, and M. Knap, Chiral pseudospin liquids in moiré heterostructures, Phys. Rev. X **14**, 021013 (2024).

[35] S. Divic, T. Soejima, V. Crépel, M. P. Zaletel, and A. Millis, Chiral Spin Liquid and Quantum Phase Transition in the Triangular Lattice Hofstadter-Hubbard Model (2024), arXiv:2406.15348 [cond-mat.str-el].

[36] S. Divic, V. Crépel, T. Soejima, X.-Y. Song, A. Millis, M. P. Zaletel, and A. Vishwanath, Anyon Superconductivity from Topological Criticality in a Hofstadter-Hubbard Model (2024), arXiv:2410.18175 [cond-mat.str-el].