

预处理技术用于有限支持低维不确定性下的拟凸 机会约束问题

Guillaume Van Dessel¹[0000-0002-7302-8579] and
François Glineur^{1,2}[0000-0002-5890-1093]

¹ UCLouvain, ICTEAM (INMA), 4 Avenue Georges Lemaître, Louvain-la-Neuve, BE
² UCLouvain, CORE, 34 Voie du Roman Pays, Louvain-la-Neuve, BE

Abstract. 机会约束规划 (CCP) 代表了优化中的保守性和鲁棒性之间的权衡。在许多 CCP 中, 目标是在一个由随机向量 ξ 连续参数化的概率约束下进行优化。在这项工作中, 我们研究了一个特定的情况, 其中约束是准凸的与 ξ 相关。此外, 向量 ξ 的支持是一组 N 场景, 在维度 $p = 2$ 或 $p = 3$ 中。

一般来说, 即使在决策变量的情况下, 约束和目标都是凸的, CCP 的可行区域也是非凸的, 使其成为一个困难的问题。然而, 在温和假设下, 许多 CCP 可以重新表述为大 M 混合整数凸规划 (MICP)。

不幸的是, 这些 MICPs 的难度随着场景数量的增加而急剧增加, 限制了实际可在一个合理时间内解决的实例。

为了减少在 MICP 重新公式化中考虑的有效场景数量并加速其求解, 我们提出并测试了基于计算几何的预处理技术。我们的技术生成证书以在求解常规 MICP 之前排除或选择某些场景先验的。此外, 预处理过程中聚合的信息利用了增强大常数 M 的可能性。数值实验表明, 在预处理上花费一些时间比直接求解一类问题更有效概率投影, 包括一种有趣的设施定位问题类型。

1 介绍

令 ξ 是一个具有有限支撑基数 N 的 p 维随机向量, 即: $\text{supp}(\xi) = \{\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(N)}\}$ 。我们关注如下形式的优化问题

$$F_{\tau}^* := \min_{x \in \mathcal{X}} F(x) \quad \text{s.t.} \quad \mathbb{P}_{\xi}[c(x, \xi) \leq 0] \geq 1 - \tau \quad (\text{CCP})$$

其中 F 代表要最小化的目标函数, ξ 参数化概率约束, $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d$ 编码必须满足的确定性约束 (即独立于 ξ) 且 $\tau \in (0, 1)$ 是关于 (完全确定性的) 鲁棒对

偶 (CCP) 的松弛容差, 即

$$F_0^* := \min_{x \in \mathcal{X}} F(x) \quad \text{s.t.} \quad c(x, \xi^{(s)}) \leq 0 \quad \forall s \in \{1, \dots, N\}. \quad (\text{RO})$$

鉴于 ξ 的有限支撑, 通常将 (CCP) 重写如下

$$F_\tau^* = \min_{x \in \mathcal{X}} F(x) \quad \text{s.t.} \quad \sum_{s=1}^N \pi^{(s)} \cdot \mathbb{1}(c(x, \xi^{(s)}) \leq 0) \geq 1 - \tau. \quad (1)$$

对于每一个 $s \in [N] := \{1, \dots, N\}$ 都有 $\pi^{(s)} := \mathbb{P}[\xi = \xi^{(s)}]$ 。

像 (CCP) 这样的问题出现在各个领域, 例如, 在金融 [12], 供应链管理 [3], 最优疫苗接种策略 [13] 或甚至微电网调度 [7] 中。虽然鲁棒性可以说是优化问题解决方案的一个可取特性, 但像 (RO) 这样的公式往往过于保守。确实, 它们的最优解受到随机参数 ξ 的每一个结果的影响, 甚至包括那些定义上在实践中不经常发生的罕见情况。

请注意, 可能会出现 (RO) 甚至是不可行的情况, 特别是在无限支撑的情况下。将松弛容差 $\tau > 0$ (有时文献中称为风险承受能力, 参见例如 [1]) 设置得足够大可以将问题 F_τ^* 转变为一个可行的问题, 同时通过考虑大多数由经验场景引起的约束条件来保持一定程度的鲁棒性。(CCP) 的解可以显著提高成本, 即 $F_\tau^* \ll F_0^*$, 但代价是在一般情况下需要解决一个非凸问题 (见第 2 节)。

大 M 方法

在当前背景下, 通常会提到对于 ξ 的任何实现, 可以计算所谓的 big- M 界限。对于每一个 $s \in [N]$, 都可以访问

$$M^{(s)} \geq \max_{x \in \mathcal{X}} c(x, \xi^{(s)}). \quad (2)$$

基于 (1) 和上述大- M 常数 (2), 可以引入 N 个二进制变量 $z = (z^{(1)}, \dots, z^{(N)})$ 将 (CCP) 重新表述为一个混合整数规划问题 (MI-CCP) (参见例如 [1, 5, 10] 并且参考文献中的相关内容)

$$\begin{aligned} F_\tau^* = \min_{x \in \mathcal{X}, z \in \{0,1\}^N} & F(x) \\ \text{s.t.} & \sum_{s=1}^N \pi^{(s)} z_s \geq 1 - \tau \\ & c(x, \xi^{(s)}) \leq M^{(s)} \cdot (1 - z_s) \quad \forall s \in [N]. \end{aligned} \quad (\text{MI-CCP})$$

因此, 求解 (MI-CCP) 可能在计算上非常昂贵。值得注意的是, 众所周知, 大量可能相当保守的大 M 常量导致了较差的连续松弛 [2]。然而, 对于许多感兴趣的领域应用, 额外的结构 (例如 [9] 其中 $c(x, \xi)$ 是线性的 (ξ) 是可用的。这利用了允许高效计算下界 $\check{F}_\tau^* \leq F_\tau^*$ 和上界 $\hat{F}_\tau^* \geq F_\tau^*$ 以及有效不等式的启发式方法, 在预处理阶段显著减少了 (MI-CCP) 的实际搜索空间。我们研究了这种方法, 其假设是 $c(x, \xi)$ 在 ξ 中是准凸的。

目标

正如已经声称的那样, (MI-CCP) 的易处理性关键取决于模型中大 M 值的大小以及考虑的场景数量 (因此是二进制变量)。不幸的是, 即使不等式 (2) 是紧的, c 的结构以及 $\mathcal{X}$ 的直径都可能导致任意大的界限。因此, 为了加快求解 (CCP) (这是我们主要的目标), 可以按以下方式进行。

逻辑编码. 首先, 基于 ξ -空间中的拓扑论据, 我们设计涉及变量 z 的逻辑约束, 这些约束导致场景被划分为一个安全集 $\oplus \subseteq [N]$, 一个剪枝集 $\ominus \subseteq [N]$ 和一个可选集 $[N] \setminus (\oplus \cup \ominus)$ 。令 F_τ^* 为有限的, 并且令 (x^*, z^*) 为 (MI-CCP) 的最优解。如果 $s \in \oplus$, 则可以将 $z_s^* = 1$ 或 z_s^* 设置为 1 而不改变最优值 F_τ^* 。如果 $s \in \ominus$, z_s^* 必须等于 0, 即场景 $\xi^{(s)}$ 可以忽略。最后, 受 [11] 的启发, 我们提供了有效的不等式, 将 z_s^* 的值与 $s \in [N] \setminus (\oplus \cup \ominus)$ 耦合起来, 使得其中至少有一个必须是 0。

大- M -紧致化. 其次, 类似于 [10], 我们基于 $\oplus$ 以及可能的一个上限 $\hat{F}_\tau^* \geq F_\tau^*$ (例如) 收紧大的 M 值。 $\hat{F}_\tau^* = F_0^*$ 如果 (RO) 是可行的。对于每一个 $s \in [N] \setminus (\oplus \cup \ominus)$, 我们计算

$$M^{(s)}(\oplus, \hat{F}_\tau^*) \geq \max_{x \in \mathcal{X}, F(x) \leq \hat{F}_\tau^*} c(x, \xi^{(s)}) \quad \text{s.t.} \quad c(x, \xi^{(\tilde{s})}) \leq 0 \quad \forall \tilde{s} \in \oplus. \quad (3)$$

请注意, 如果 (3) 右边的问题的最优值小于或等于 0, 则可以将场景 s 添加到安全集 $\oplus$ 中。

关于 (2), $M^{(s)}$ 是 $M^{(s)}(\emptyset, +\infty)$ 的简写, 定义见 (3)。

符号表示法

当优化问题为不可行的, 即其可行集为空时, 我们赋予它最优值 $+\infty$ 。相反, 当它是无界的, 例如存在一个衰退方向使得目标函数无下界时, 我们

将最优值设为 $-\infty$ 。令 $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^p$ 表示 ξ 的一个实现，我们将

$$\mathcal{R}(\bar{\xi}) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid c(x, \bar{\xi}) \leq 0\} \quad (4)$$

引入作为在 $\bar{\xi}$ 下概率约束的可容许决策向量集。对于每一个子集 $S \subseteq [N]$ ，我们进一步定义子问题

$$\nu(S) := \min_{x \in \mathcal{X}} F(x) \quad \text{s.t.} \quad c(x, \xi^{(s)}) \leq 0 \quad \forall s \in S. \quad (S\text{-subproblem})$$

假设

我们将列出一些在整个后续内容中都成立的有用假设。

(A) 对于每一个 $s \in [N]$ ， $\pi^{(s)} > 0$ 和 $\nu(\{s\}) > -\infty$ 。

(B) 对于每一个 $x \in \mathcal{X}$ ，函数 $c(x, \cdot)$ 是拟凸的。

Remark 1. 如 [8] 所指出的，假设 (A) 是不失一般性的。确实，如果从考虑的情景数据集中移除 $\pi^{(s)} = 0$ 或 $\mathcal{X} \cap \mathcal{R}(\xi^{(s)}) = \emptyset$ ， $\xi^{(s)}$ ，问题变为具有 $\tilde{N} = N - 1$ 个情景的 F_τ^* 和 $\tilde{\tau} = \tau - \pi^{(s)}$ 。请注意，这个假设意味着当 $\tau < 1$ 时， F_τ^* 的有界性，因为在最优解 (x^*, z^*) 处必须至少存在一个 $s \in [N]$ 使得 $z_s^* = 1$ 。另一方面，可行性可能很难验证先验的。假设 (B) 是我们预处理启发式算法的基础，即我们广泛利用了 $c(x, \cdot)$ 的次级集的凸性将场景添加到 $\oplus$ 和 $\ominus$ 中，见**逻辑编码**。

我们以示例 1 和 2 结束本节，这些示例满足我们的假设。

概率球投影 我们提供了 N 个不同的空间位置，即数据矩阵 $\mathbf{D} = (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(N)})^T \in \mathbb{R}^{N \times p}$ 的行、一个空间参考点 $\bar{x} \in \mathbb{R}^p$ 以及一对范数 $(\|\cdot\|_o, \|\cdot\|_{\bar{o}})$ 和 $o, \bar{o} \in \{1, 2, \infty\}$ 。目标是找到从 $\bar{x}$ 最近的点 $x \in \mathbb{R}^p$ ，即最小化距离 $\|x - \bar{x}\|_o$ 同时确保它属于 $\mathbb{B}_{\bar{o}}(\xi, R)$ 的概率至少为 $1 - \tau$ 。假设对于每个 $s \in [N]$ ， $\mathbb{P}[\xi = \xi^{(s)}] = \pi^{(s)} > 0$ ，问题如下：

$$F_\tau^* = \min_{x \in \mathcal{X}} \underbrace{\|x - \bar{x}\|_o}_{F(x)} \quad \text{s.t.} \quad \mathbb{P}_\xi \left[\underbrace{\|x - \xi^{(s)}\|_{\bar{o}} - R}_{c(x, \xi)} \leq 0 \right] \geq 1 - \tau. \quad (\text{PBP-}(p, o, \bar{o}))$$

这里， $p = d$ 和 $\mathcal{X} = \mathbb{B}_\infty(\mathbf{0}_d, \bar{R})$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中是具有 $\bar{R} > 0$ 的均匀盒子。

对于任意的 $s \in [N]$ ， $\mathcal{X}(\{s\}) := \mathcal{X} \cap \mathcal{R}(\xi^{(s)}) = \mathbb{B}_{\bar{o}}(\xi^{(s)}, R)$ 是凸且紧的。假设 (A) 在 $\nu(\{s\}) = \|\mathbf{proj}_{\mathcal{X}(\{s\})}(\bar{x}) - \bar{x}\|_o \geq 0 > -\infty$ 下成立，并且 $c(x, \xi)$ 在 ξ 中是凸（因此也是拟凸）的，从而验证了假设 (B)。

我们在此后提供一个 PBP-(2, 2, 1)（示例 1）的实际应用实例和一个不太常规的 PBP-(3, 2, ∞)（示例 2）实例。

Example 1 (概率设施选址).

必须找到安装一个新的直升机停机坪设施 $x \in \mathbb{R}^2$ 的位置, 以使其与参考医院 $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ 的飞行距离 L_2 - 最小。周边居住的相关人口聚集在 N 个不同的地点, 即: $(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(N)})$ 。人口中有 $\pi^{(s)} > 0$ 的比例位于位置 $\xi^{(s)}$, 对于每一个 $s \in [N]$ 。设计约束要求在人群中随机发生的紧急情况应以至少 $1 - \tau$ 的概率位于距直升机场的曼哈顿 L_1 - 距离为 $R > 0$ 半径范围内。

Example 2 (最优观察点).

以同样的精神, 可以思考以下问题。人们希望尽可能接近 $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ 来观看那里发生的事件, 同时待在一个安全的地方, 安全的概率至少为 $1 - \tau$ 。对于每一个 $s \in [S]$, 存在 $\pi^{(s)} \in (0, 1)$ 的几率使得一个随机气象现象的结果意味着: $\xi^{(s)}$ 描绘了一个半径为 $R > 0$ 的三维均匀盒子的中心, 在这个盒子里需要待着才能安全地观看上述事件。

2 枚举复杂度

在本节中, 我们展示了 (MI-CCP) 可以作为目标函数 $\mathcal{F}_\tau$ 的全局最小化问题, 该目标函数是从有限数量的函数集合中的最小值衍生出来的。正如我们将揭示的那样, 这些函数的定义域不同, 导致目标函数 $\mathcal{F}_\tau$ 在 $\mathcal{X}$ 上并非处处连续。最近的工作 [15, 16] 致力于解决有限数量函数集合中的最小值的全局最小化问题。不幸的是, 其中提出的方法不适用, 因为它们关键地依赖于整个目标函数的连续性。为了获得上述集合大小最小的形式, 我们建立以下事实。不失一般性, 总是存在一个最优解 (x^*, z^*) 到 (MI-CCP), 称为最小解, 使得

$$\sum_{s \in [N]} \pi^{(s)} z_s^* - \min_{\bar{s} \in \{s \in [N] \mid z_s^* = 1\}} \pi^{(\bar{s})} < 1 - \tau. \quad (5)$$

确实, 如果 (5) 不满足, 则 $(x^*, z^* - e_{\bar{s}})$ 变为对 (MI-CCP) 的可接受且最优解, 并且我们可以递归地进行直到 (5) 成立。我们注意到这样的 x^* 与 $(1 - \tau)$ 效率点 [4, 6] 的概念密切相关。每个最优解 (x^*, z^*) 引发一个选择 $\hat{S}(z^*) = \{s \in [N] \mid z_s^* = 1\} \subseteq [N]$ 场景集合, 使得 $F_\tau^* = F(x^*) = \nu(\hat{S}(z^*))$, 回顾 (S -subproblem)。

我们现在介绍定义 1, 描述由极小解引入的选择的结构。

Definition 1 (最小子集对于 (MI-CCP)). 令 $S \subseteq [N]$ 。 S 被称为 (MI-CCP) 的极小子集当且仅当

$$1 - \tau \leq \sum_{s \in S} \pi^{(s)} < 1 - \tau + \min_{\bar{s} \in S} \pi^{(\bar{s})}. \quad (6)$$

Remark 2. 显然, 如果 (x^*, z^*) 是一个最小解, 那么 $\hat{S}(z^*)$ 是一个最小子集。然而, 如果 S 是一个最小子集, 那么 $(S\text{-subproblem})$ 中 $\nu(S)$ 的最小化者 $x^*(S)$ 不一定是 (MI-CCP) 的全局最小化者。

我们用 $\mathbf{S}_\tau$ 表示包含每个最小子集的集合, 对于 (MI-CCP)。现在让我们在示例 3 中突出显示 (MI-CCP) 组合性质的第一个线索。当每种情况等概率时, 我们以显式形式表示 $\mathbf{S}_\tau$ 。

Example 3 (等概率场景).

令 $\pi^{(s)} = 1/N$ 对每个 $s \in [N]$ 成立。可知 (6) 可以重新表述为

$$N \cdot (1 - \tau) \leq |S| < N \cdot (1 - \tau) + 1. \quad (7)$$

从 (7), 可以推断出 $\mathbf{S}_\tau = \{S \subseteq [N] \mid |S| = \lceil N \cdot (1 - \tau) \rceil\}$ 使得

$$|\mathbf{S}_\tau| = \binom{N}{\lceil N \cdot (1 - \tau) \rceil}. \quad (8)$$

由于 (至少) 一个全局最小值 (x^*, z^*) 的 (MI-CCP) 是最小的, 并且可以通过设置 x^* 为 $\nu(\hat{S}(z^*))$ 的最小值来获得, 其中 $\hat{S}(z^*) \in \mathbf{S}_\tau$, 那么解决 (MI-CCP) 的策略可以如下进行。对 $\mathbf{S}_\tau$ 进行迭代, 一次尝试一个最小子集 S , 通过计算 $\nu(S)$ 。最终, 它实现了

$$F_\tau^* = \min_{S \in \mathbf{S}_\tau} \nu(S). \quad (9)$$

Remark 3. 当所有场景的可能性相等 (示例 3) 时, (9) 中要求的详尽枚举很容易实现。在更一般的分布下, 可以解决一系列增量的可行性问题。从一个空集合 $\hat{\mathbf{S}}_\tau = \emptyset$ 开始, 我们计算下一个要审查的最小子集 S 在 (9) 中 (并在

之后包括 $\hat{\mathbf{S}}_\tau$), 作为 $\hat{S}(z) = \{s \in [N] \mid z_s = 1\}$ 其中 z 是该系统的可行解

$$\sum_{s=1}^N \pi^{(s)} z_s \geq 1 - \tau \quad (10)$$

$$\sum_{s \in S} \pi^{(s)} z_s \leq 1 - \tau - \tilde{\epsilon} + \pi^{(\tilde{s})} + (1 - z_{\tilde{s}}) \quad \forall \tilde{s} \in [N] \quad (11)$$

$$\sum_{s \in S} z_s \leq |S| - 1 \quad \forall S \in \hat{\mathbf{S}}_\tau. \quad (12)$$

第一个 (10) 和中间不等式 (11) 上面的实现要求最小子集通过 $\tilde{\epsilon} \in (0, \min_{s \in [N]} \pi^{(s)}/2]$ 确保右边的严格不等式 (6)。可以注意到, 确实, 如果 $z_s = 0$ (因此 $s \notin S = \hat{S}(z)$) 的话, (11) 的右侧大于 1, 且约束始终有效。

最后的不等式 (12) 排除了之前见过的最小子集 S , 存储在 $\hat{\mathbf{S}}_\tau$ 中。也就是说, 上述枚举方法很快就变得不切实际, 即使对于 N 的适度值也是如此。值得注意的是, 当 $\mathbf{S}_\tau$ 是明确的 (示例 3) 时, 枚举任务可以在 $B \geq 1$ 单元上并行化。然而, 除非 $B = \Theta(|\mathbf{S}_\tau|)$, 否则在串行求解的最小数量 (S -subproblem) (因此实际经过的时间) 随 N 指数增长。

如前所告, 我们通过将 (MI-CCP) 作为 $\mathcal{F}_\tau$ 的全局最小化来结束本节, 即对于每一个 $S \in \mathbf{S}_\tau$, 有限多个函数 $f_S : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 的逐点最小值。相应的有效域为

$$\text{dom } f_S = \mathcal{X}(S) := \bigcap_{s \in S} \left(\mathcal{X} \cap \mathcal{R}(\xi^{(s)}) \right).$$

从而, 简单地写作 $F_\tau^* = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \mathcal{F}_\tau(x)$ 其中对于每一个 $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathcal{F}_\tau(x) := \min_{S \in \mathbf{S}_\tau} F(x) + \mathbb{I}_{\mathcal{X}(S)}(x) = \min_{S \in \mathbf{S}_\tau} f_S(x). \quad (13)$$

Remark 4. 在任何情况下, $\text{dom } \mathcal{F}$ 是 $|\mathbf{S}_\tau|$ 子集的并集, 即:

$$\text{dom } \mathcal{F}_\tau = \bigcup_{S \in \mathbf{S}_\tau} \mathcal{X}(S).$$

令 $\mathcal{X}$ 是凸的, 并且对于每一个 $s \in [N]$, $c(\cdot, \xi^{(s)})$ 是拟凸的。 $\mathcal{F}_\tau$ 的定义域作为有限多个凸集的并集而存在。如在 [14] 中分析的那样, 在 ξ 允许对数凹连续分布的情况下, $\text{dom } \mathcal{F}_\tau$ 可能整体为凸, 这取决于参数 τ 。显然, $\text{dom } \mathcal{F}_0$ 是凸的。在连续情况下, [14] 发现存在一个阈值 $\hat{\tau}$, 在该阈值以下, 每一个 $\tau \leq \hat{\tau}$ 都会导致一个凸的 $\text{dom } \mathcal{F}_\tau$ 。这种情况有时对于离散分布也是正确的。我们在图 2 中展示了这一点, 并用经验性 $\hat{\tau} \simeq 2 \cdot 10^{-2}$ 验证了 [14] 的研究结果。

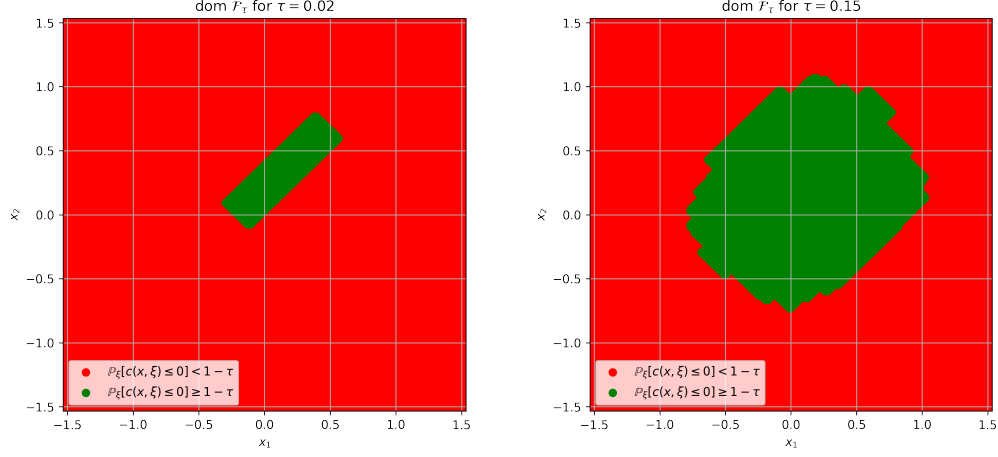


Fig. 1: 概率设施选址 (示例 1): $\text{dom } \mathcal{F}_\tau$ 的凸性分析 | 对每个 $\tau \leq 2 \cdot 10^{-1}$ 都是凸的 (左图) 和在 $\tau = 1.5 \cdot 10^{-1}$ 下是非凸的 (右图)。

3 预处理技术

现在背景已经设置好了, 我们可以深入我们的预处理技术。

我们强调假设 (B) 的重要性, 基于此我们推导出有用的引理 1。我们回忆一下对于任意的 $z \in \{0, 1\}^N$, $\hat{S}(z) = \{s \in [N] \mid z_s = 1\}$ 。

Lemma 1. 令 (x, z) 对于 (MI-CCP) 和 $\Xi = \text{conv}(\{\xi^{(\tilde{s})} \mid \tilde{s} \in \hat{S}(z)\})$ 是可行的。对于每一个满足 $z_s = 0$ 和 $\xi^{(s)} \in \Xi$ 的 $s \in [N]$, $(x, z + e_s)$ 保持可行。

Proof. 由构造可知, 对于每一个满足 $z_{\tilde{s}} = 1$ 的 $\tilde{s} \in [N]$, 都有 $c(x, \xi^{(\tilde{s})}) \leq 0$ 。令 $\xi^{(s)} \in \Xi$, 使得存在权重 $q^{(\tilde{s})} \in [0, 1]$ 总和为 1, 其中 $\sum_{\tilde{s} \in \hat{S}(z)} q^{(\tilde{s})} \xi^{(\tilde{s})} = \xi^{(s)}$ 。由拟凸性 (假设 (B)) 的 $c(x, \cdot)$,

$$c(x, \xi^{(s)}) \leq \max_{\tilde{s} \in \hat{S}(z)} c(x, \xi^{(\tilde{s})}) \leq 0.$$

可知, 如果 $z_s = 0$, 则可以设定 $z_s = 1$ 而不改变 x 的值, 从而证明 $(x, z + e_s)$ 是 (MI-CCP) 的一个可行解。□

因此, 应该考虑可行的解 (x, z) 在最小体积意义上的问题, 即不存在最小子集 $S \subset \{s \in [N] \mid \xi^{(s)} \in \text{conv}(\{\xi^{(\tilde{s})} \mid \tilde{s} \in \hat{S}(z)\})\}$,

$$\text{conv}(\{\xi^{(s)} \mid s \in S\}) \subsetneq \text{conv}(\{\xi^{(\tilde{s})} \mid \tilde{s} \in \hat{S}(z)\}). \quad (14)$$

否则, 对于每一个 $s \in S$ 和 $\hat{z}_s = 0$, $(x, \hat{z})$ 与 $\hat{z}_s = 1$ 也是可行的, 并且进一步地, 有 $F_\tau^* \leq \nu(S) \leq \nu(\hat{S}(z))$ 。当场景等概率时, 对于最小体积解决方案, 最小子集 $S = \hat{S}(z)$ 必须满足

$$s \in S \Leftrightarrow \xi^{(s)} \in \mathbf{conv}(\{\xi^{(\tilde{s})} \mid \tilde{s} \in S\}). \quad (15)$$

。这在示例 4 中所示的非均匀分布情况下并不成立。

Example 4. 令 $N = 5$, $d = 2$ 和 $\tau = 15/100$ 。对于 $s \in [4]$, $\pi^{(s)} = 22/100$ 和 $\{\xi(s) \mid s \in [4]\} = \mathbf{vert}(\mathbb{B}_\infty(\mathbf{0}_2, 1))$, 使得 $\pi^{(5)} = 1 - 4 \cdot 22/100 = 12/100$ 。唯一的可能最小子集是 $S = [4] = \hat{S}(\mathbf{1}_5 - \mathbf{e}_5)$ 。然后, 如果 $\xi^{(5)} = \mathbf{0}_2$, $\xi^{(5)} \in \mathbf{int}(\mathbb{B}_\infty(\mathbf{0}_2, 1))$ 但是 $5 \notin S$ 。

我们现在定义两种类型的子集用于场景, 即。安全和修剪集 (参见定义 2&3), 每个都作为一种或多种技术的骨干, 并允许计算上下界。

Definition 2 (安全集). $\oplus \subseteq [N]$ 是一个安全集, 如果对每个在 (MI-CCP) 中的 $s \in \oplus$ 包含等式 $z_s = 1$ 不会增加其最优值 F_τ^* 。

Definition 3 (修剪后的集合). $\ominus \subseteq [N]$ 是一个修剪集如果包含每个在 (MI-CCP) 中的 $s \in \ominus$ 的等式 $z_s = 0$ 不增加其最优值 F_τ^* 。

Remark 5. 作为这两个定义的直接结果, 如果寻找一个像 $\hat{F}_\tau^* = \nu(S) \geq F_\tau^*$ 那样的合理上界, 则子集 $S \subseteq [N]$ 应满足

$$S \in \mathbf{T}(\oplus, \ominus) := \left\{ S \subseteq [N] \setminus \ominus \mid \oplus \subseteq S \wedge \sum_{s \in S} \pi^{(s)} \geq 1 - \tau \right\}. \quad (16)$$

类似于 (9), 可以推导出 $F_\tau^* = \min_{S \in \mathbf{T}(\oplus, \ominus)} \nu(S)$ 。此外, 仅考虑由 $\oplus$ 引起的约束来最小化 F 得到一个下界 $\check{F}_\tau^* = \nu(\oplus) \leq F_\tau^*$ 。

3.1 保障安全性 技术

在本小节中, 我们提出了有助于逐步构建安全集的充分条件。即, 从 $\oplus = \emptyset$ 开始, 可选择的指数 $s \in [N] \setminus (\oplus \cup \ominus)$ 可以尝试³, 如果以下条件之一被触发, 则安全集更新为 $\oplus \leftarrow \oplus \cup \{s\}$ 。我们首先给出一个通用条件 (命题 1), 该条件独立于假设 (B)。第二个命题 (命题 2), 更为复杂, 是新提出

³ 我们强调可以同时处理多个索引, 即并行处理。

的且特定于这项工作。然而需要注意的是，从实际角度来看，只有当 $p = 2$ 或 $p = 3$ 时才能有效地实现。

首先，基于 (MI-CCP) 的有效不等式，剩余的可行域（或其某些松弛形式）足够小，以至于给定约束 $c(\cdot, \xi^{(s)})$ 在其中处处非正。如果是这样， $s \in \oplus$ 。

Proposition 1 (Non-positivity selection). 令 $\hat{F}_\tau^* \geq F_\tau^*$ 。对于任意的 $S \subseteq \oplus$,

$$0 \geq \max_{x \in \mathcal{X}, F(x) \leq F_\tau^*} c(x, \xi^{(s)}) \quad s.t. \quad c(x, \xi^{(\tilde{s})}) \leq 0 \quad \forall \tilde{s} \in S$$

表明 s 属于 $\oplus$ 。

其次，条件是集合 $\oplus$ 和 $\ominus$ 的当前状态，如果 s 属于每一个声音子集 $S \in \mathbf{T}(\oplus, \ominus)$ （见 (14)），可以得出结论 $s \in \oplus$ 。通过引理 1 的视角，这个陈述等价于以下条件。

Proposition 2 (Non-separability induction). 若不存在 $S \in \mathbf{T}(\oplus, \ominus)$ 使得 $\xi^{(s)}$ 被不包含在 $\Xi = \text{conv}(\xi^{(\tilde{s})} \mid \tilde{s} \in S)$ 中，则 $s \in \oplus$ 。

Proof. 我们需要考虑两种结果。要么问题 (MI-CCP) 是不可行的和 $F_\tau^* = \infty$ ，或者存在一个最优解 (x^*, z^*) 与 $\hat{S}(z^*) \in \mathbf{T}(\oplus, \ominus)$ 。在第一种情况下，立即得到 $s \in \oplus$ ，因为根据定义，这个等式不会影响该问题的最优值。否则，要么 $z_s^* = 1$ 已经如此，要么 $z_s^* = 0$ 和 $\xi^{(s)} \in \text{conv}(\xi^{(\tilde{s})} \mid \tilde{s} \in \hat{S}(z^*))$ 。在后一种情况下，引理 1 确保 $(x^*, z^* + e_s)$ 保持可行的，因此根据假设是最佳的。因此，可以将 s 包含在 $\oplus$ 中。 $\square$

最后，我们引用推论 1，它允许将安全集 $\oplus$ 扩展到由 $\oplus$ 的场景构成的凸包内的所有可选择的场景。

Corollary 1. 集合 $\{s \in [N] \mid \xi^{(s)} \in \text{conv}(\{\xi^{(\tilde{s})} \mid \tilde{s} \in \oplus\})\}$ 是（也）安全的。

Proof. 证明可以直接从引理 1 推出。 $\square$

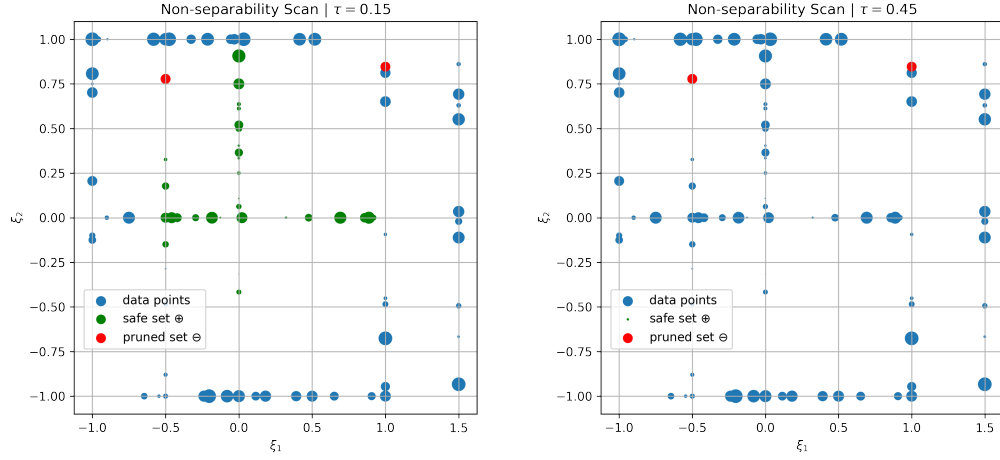


Fig. 2: 概率设施选址 (示例 1): 基于命题 2 的安全集增量构建; 从 $\oplus = \emptyset$ 和 $\ominus = \{11, 74\}$ 开始 (玩具示例) | 初始化。 $|T(\oplus, \ominus)|$ 较小 (左边) 比 (右边) 因此有更多的不可分离索引 s 。

3.2 剪枝 技术

与第 3.1 节的精神相同, 但目标截然相反, 我们现在旨在排除某些情景。同样地, 如果以下条件之一得到满足, 则将修剪集更新为 $\ominus \leftarrow \ominus \cup \{s\}$ 。

类似于命题 1, 反之可能会发生的情况是, 剩余的可行域 (或其某种松弛形式) 足够小, 以至于给定约束 $c(\cdot, \xi^{(s)})$ 在其中处处严格为正。如果是这样, $s \in \ominus$ 。

Proposition 3 (Strict-positivity exclusion). 令 $\hat{F}_\tau^* \geq F_\tau^*$ 。对于任意的 $S \subseteq \oplus$,

$$0 < \min_{x \in \mathcal{X}, F(x) \leq F_\tau^*} c(x, \xi^{(s)}) \quad s.t. \quad c(x, \xi^{(\tilde{s})}) \leq 0 \quad \forall \tilde{s} \in S$$

意味着 s 属于 $\ominus$ 。

容易观察到如果一个安全集 $\oplus$ 涵盖足够的概率权重, 即 $\sum_{s \in \oplus} \pi^{(s)} \geq 1 - \tau$ (例如, $\mathbf{a}$ 最小子集), 在 $\nu(\oplus) = F_\tau^*$ 的意义下是最佳的。

否则, $\oplus$ 必须包含 (至少) 一个额外的索引 $s \in [N] \setminus (\oplus \cup \ominus)$ 。如果优化

(MI-CCP) 条件于 $z_{\tilde{s}} = 1$ 对于每个 $\tilde{s} \in \oplus \cup \{s\}$ 产生一个值, 即 $\nu(\oplus \cup \{s\})$, 严格位于 $\hat{F}_\tau^* \geq F_\tau^*$ 之上, 则假设 $z_s = 1$ 不会恶化 (MI-CCP) 的最优值被拒绝。

Proposition 4 (Sub-optimality exclusion). 设 $\hat{F}_\tau^* \geq F_\tau^*$, 并令 $\oplus \subseteq [N]$ 为一个非最优安全集。如果 $\nu(\oplus \cup \{s\}) > \hat{F}_\tau^*$, 则 $s \in \ominus$ 。此外, 成立

$$\check{F}_\tau^* = \min_{s \in [N] \setminus (\oplus \cup \ominus)} \nu(\oplus \cup \{s\}) \leq F_\tau^*. \quad (17)$$

3.3 有效不等式

在某些情况下, 例如约束可以分解为 $c(x, \xi) = \bar{c}(x) - \xi$, 可以定义所谓的 (广义) 优先约束条件 (见 [11] 及其参考文献)。也就是说, 可以在 ξ 空间中定义偏序 $\preceq$ (例如逐元素比较 $\leq$), 从而从 $\xi^{(s_1)} \preceq \xi^{(s_2)}$, $z_{s_1} \leq z_{s_2}$ 成为 (MI-CCP) 的有效不等式。这里, 我们提出两种类型的有效不等式, 源自引理 1。由于篇幅限制, 证明从略。

令 $S \subseteq [N]$ 和 $\Xi = \text{conv}(\xi^{(\tilde{s})} \mid \tilde{s} \in S)$ 。我们用 $V(S)$ 表示 Ξ 的顶点场景索引, 即。 $V(S) := \{s \in S \mid \xi^{(s)} \in \text{vert}(\Xi)\}$ 并且我们通过 $N(S)$ 指数描绘了包含在 Ξ 中的所有场景, 即 $N(S) := \{s \in S \mid \xi^{(s)} \in \Xi\}$ 。

Proposition 5 (Convex-hull inductions). 下列不等式成立

$$z_s \geq \sum_{\tilde{s} \in V(S)} z_{\tilde{s}} - |V(S)| + 1 \quad \forall s \in N(S) \setminus V(S). \quad (18)$$

如果场景的可能性相等且 $\sum_{s \in N(S)} \pi^{(s)} \geq (1 - \tau) + N^{-1}$, 则

$$\sum_{\tilde{s} \in V(S)} z_{\tilde{s}} \leq |V(S)| - 1. \quad (19)$$

4 数值实验

我们这里关注的是示例 1（及其对 $p = 3$ 的直接推广）以展示以下预处理程序的好处。

我们初始化 $(\oplus, \ominus) = (\emptyset, \emptyset)$ 和 $(\check{F}_\tau^*, \hat{F}_\tau^*) = (\infty, \infty)$ 。

1. 对于每一个 $s \in [N]$ ，我们解决 $\nu(\{s\})$ 问题，记录其最小值点 $x^*(\{s\})$ ，更新 $\check{F}_\tau^* \leftarrow \min\{\check{F}_\tau^*, \nu(\{s\})\}$ ，并且如果 $x^*(\{s\}) \in \text{dom } \mathcal{F}_\tau$ ，则 $\hat{F}_\tau^* \leftarrow \min\{\hat{F}_\tau^*, \nu(\{s\})\}$ 。
最后， $\check{F}_\tau^* \leq F_\tau^* \leq \hat{F}_\tau^*$ 。如果 $\hat{F}_\tau^* < \infty$ ，我们设 $\ominus \leftarrow \{s \in [N] \mid \nu(\{s\}) > \hat{F}_\tau^*\}$ 。
2. 对于每一个 $s \in [N] \setminus (\oplus \cup \ominus)$ ，都会检查命题 2 的条件以考虑将 s 添加到 $\oplus$ 中。建议设置一个时间限制，在达到该限制后停止检查。确实，我们对非可分性归纳检查的实现复杂度为 $\mathcal{O}(N^3)$ 对于 $p = 3$ ，而相比之下为 $\mathcal{O}(N \log N)$ 对于 $p = 2$ 。因此，我们选择了 60[s]（在实践中从未达到）用于 $p = 2$ 和 120[s] 用于 $p = 3$ 。
3. 我们应用推论 1（可能扩展 $\oplus$ ），并对每个 $s \in [N] \setminus (\oplus \cup \ominus)$ 实施次优性排除检查（可能扩展 $\ominus$ ）。
4. 我们通过收紧大- M 界限来完成，如 (3) 所示。

基准测试 我们实现的所有细节以及数据生成均在 GitHub 上公开。参数在 $(\text{PBP}-(p, o, \bar{o}))$ 中被取为 $p \in \{2, 3\}, o = 2, \bar{o} = 1$ 和 $R = \frac{23}{25} \cdot p \cdot \max_{s \in [N]} \|\zeta^{(s)}\|_\infty$ 。对于每一层 $\tau \in \{0.05, 0.15\}$ ，5 独立的随机数据集 $\mathbf{D}$ 被抽取并输入模型。设置了总体时间限制为 500[s] ($p = 2$) 和 720[s] ($p = 3$) 来解决问题。我们报告如下结果：**上界**（分别地 **LB**）作为求解过程中找到的最佳上界（分别地 **下界**）。第四列代表算法成功提供最优解（即 **UB** = **LB** = F_τ^* ）时所花费的平均时间，无论是预处理还是直接。最后一列代表实现的平均事后验证相对优化差距。请注意，如果给定实例的最优值 F_τ^* 在时间限制内对于方法都未找到，我们重新启动预处理进行长时间运行直到获得它。正如上述报告结果清晰显示的那样，我们的初步数值实验表明使用我们的预处理技术在计算上是有益的。我们将可能性作为未来研究课题，将我们的有效不等式 (18)&(19) 结合到 (MI-CCP) 中，并扩展我们方法论的应用范围至更高维度 $p > 3$ 。

<i>method</i>	p	τ	avg. time [s] $\mathbf{UB} = \mathbf{LB}$	# insts. solved	avg. $(\mathbf{UB} - F_\tau^*)/F_\tau^*$
presolve	2	5%	211.75	5/5	0%
direct			321.07	3/5	1.15%
presolve	2	15%	157.41	5/5	0%
direct			(time limit: 500)	0/5	110.3% (excl. 1 outlier)
presolve	3	5%	438.91	4/5	$\leq 0.8\%$
direct			(time limit: 720)	0/5	14.31%
presolve	3	15%	363.24	3/5	$\leq 7.49\%$
direct			(time limit: 720)	0/5	122.8%

Table 1: 预处理与直接求解的比较

Bibliography

- [1] Ahmed, S., Luedtke, J., Song, Y., Xie, W.: Nonanticipative duality, relaxations, and formulations for chance-constrained stochastic programs. *Math. Prog.* **162**, 51–81 (2017)
- [2] Camm, J.D., Raturi, A.S., Tsubakitani, S.: Cutting big m down to size. *Interfaces* **20**(5), 61–66 (1990)
- [3] Chen, F.Y., Krass, D.: Inventory models with minimal service level constraints. *European Journal of Operational Research* **134**(1), 120–140 (2001)
- [4] Dentcheva, D., Prékopa, A., Ruszczyński, A.: Concavity and efficient points of discrete distributions in probabilistic programming. *Math. Prog.* **89**, 55–77 (2000)
- [5] Küçükyavuz, S., Jiang, R.: Chance-constrained optimization under limited distributional information: A review of reformulations based on sampling and distributional robustness. *EURO Journal on Computational Optimization* **10** (2022)
- [6] Lejeune, M.A.: Pattern-based modeling and solution of probabilistically constrained optimization problems. *Op. Research* **60**(6), 1356–1372 (2012)
- [7] Liu, G., Starke, M., Xiao, B., Zhang, X., Tomsovic, K.: Microgrid optimal scheduling with chance-constrained islanding capability. *Electric Power Systems Research* **145**, 197–206 (2017)
- [8] Luedtke, J.: A branch-and-cut decomposition algorithm for solving chance-constrained mathematical programs with finite support. *Math. Prog.* **146**(1), 219–244 (2014)
- [9] de Oliveira, W.: Derivative-free approaches for chance-constrained problems with right-hand side uncertainty. *SIAM Journal on Optimization* **35**(1), 1–27 (2025)
- [10] Roland, M., Forel, A., Vidal, T.: Adaptive partitioning for chance-constrained problems with finite support. *arXiv:2312.13180* (2023)
- [11] Ruszczyński, A.: Probabilistic programming with discrete distributions and precedence constrained knapsack polyhedra. *Math. Prog.* **93** (2002)
- [12] Swain, P., Ojha, A.K.: Chance constrained robust portfolio optimization when the perturbations follow normal and exponential distributions. *arXiv:2311.04577* (2023)

- [13] Tanner, M.W., Sattenspiel, L., Ntamo, L.: Finding optimal vaccination strategies under parameter uncertainty using stochastic programming. *Mathematical Biosciences* **215**(2), 144–151 (2008)
- [14] Van Ackooij, W., Malick, J.: Eventual convexity of probability constraints with elliptical distributions. *Math. Prog.* **175**(1), 1–27 (2019)
- [15] Van Dessel, G., Glineur, F.: Global minimization of a minimum of a finite collection of functions. *arXiv:2412.04625* (2024)
- [16] Van Dessel, G., Glineur, F.: Global and local approaches for the minimization of a sum of pointwise minima of convex functions. *arXiv:2501.19372* (2025)