基于正交匹配追踪的模数磁滞算子重构

Matthias Beckmann and Jürgen Jeschke
Center for Industrial Mathematics, University of Bremen, Germany
research@mbeckmann.de • jjeschke@uni-bremen.de

摘要—无限采样通过在采样前使用模数非线性将信号折叠到模拟数字转换器（ADC）的动态范围内，为高动态范围信号提供了一种采集方案以防止饱和。最近，引入了一种称为模滞后的泛化方案来考虑硬件非理想因素。然而，编码算子并不能保证输出信号处于 ADC 的动态范围内。为了解决这个问题，我们提出了一种修改后的模滞后算子，并展示了从模滞后样本中识别带限信号的可能性。我们基于正交匹配追踪提出了一个恢复算法并通过数值实验验证了我们的理论结果。

***Index Terms*—无限采样，广义模运算符，香农采样理论，正交匹配追踪。**

I. 介绍

著名的香农采样定理 [1] 允许从离散样本 $\{g(n\mathrm{T}) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 中恢复带限函数 g，其采样率 $\mathrm{T} > 0$ 足够小，即如果以或高于奈奎斯特速率采样，在硬件中由模拟到数字转换器 (ADCs) 实现。然而，重建公式假设可以访问完美的样本，数据中的任何失真都会导致重建中的伪影。实践中一个特别的瓶颈是 ADC 以固定的动态范围运行，输入信号超过阈值会导致饱和或削波，因此我们遭受永久的信息损失。

为了克服这些限制，在 [2], [3], [4] 中引入了无限采样框架（USF）以及有数学依据的重建算法，其中在采样之前，输入函数使用模算术折叠到动态范围内。从那时起，已经提出了几种重建方法，例如 [5], [6], [7], [8]，并且 USF 已被扩展到各种应用中，如成像 [9]、计算机断层扫描 [10], [11] 和雷达 [12]。考虑了更一般的编码算子 in [13]。

上述方法假设输入信号 g 达到动态阈值时立即折叠，从而生成一种逐点操作的编码，即时间 t 的输出由 $g(t)$ 决定。与此相反，在 [14], [15] 中提出了一种广义模数编码器，该编码器考虑了由于硬件缺陷导致的非瞬时折叠。这给出了一个具有记忆的编码算子 $\mathscr{M}_H$，意思是

This work was supported by the Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG), project number 530863002.

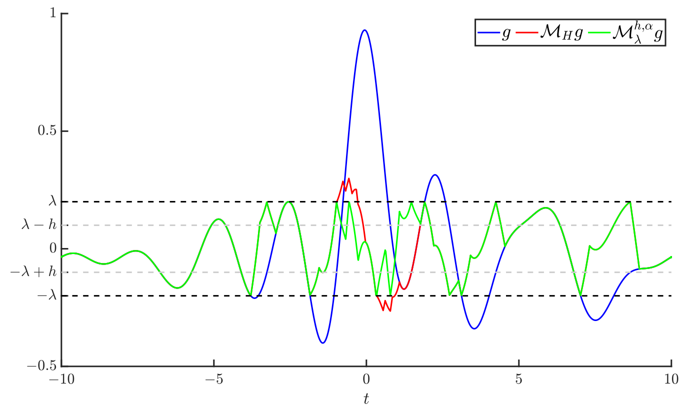

图 1. 广义模编码器 $\mathscr{M}_H$ 和修改后的模滞后算子 $\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha}$ 的示意图，用于随机输入 $g \in \mathrm{PW}_\Omega$，其中包含 $\lambda = 0.2$,$h = 0.1$ 和 $\alpha = 0.3$，其中 $\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g \in [-\lambda, \lambda]$，但对于某些 t 有 $|\mathscr{M}_H g(t)| > \lambda$。

$\mathscr{M}_H g(t)$ 不仅依赖于 $g(t)$，还依赖于 $g(\tau)$ 对于 $\tau \leq t$。因此，$\mathscr{M}_H$ 也被称为模滞后算子。

在 [14], [15] 中提出的模型并不能保证输出处于 ADC 的动态范围内，参见图 1 的说明。因此，在这项工作中，我们提出了一种改进的模滞后算子 $\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha}$，使其保持在给定的动态范围内。在第 II 节中，我们证明输入信号 g 由离散样本 $\{\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(n\mathrm{T}) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 唯一确定，并且当 $\mathrm{T} > 0$ 足够小时成立，在第 III 节中解释了如何使用正交匹配追踪（OMP）恢复 g。最后，我们的理论结果通过第 IV 节中的数值实验得到支持。

II. 模滞后算子

对于函数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，理想的模编码器 $\mathscr{M}_\lambda$ 以模阈值 $\lambda > 0$ 定义，如在 [2] 中定义的那样通过

$$\mathscr{M}_\lambda g(t) = g(t) - 2\lambda \left\lfloor \frac{g(t) + \lambda}{2\lambda} \right\rfloor \quad \text{for } t \in \mathbb{R},$$

其中 $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示实数的地板函数，并且满足对于所有 $t \in \mathbb{R}$ 的 $\mathscr{M}_\lambda g(t) \in [-\lambda, \lambda]$。典型的输入空间是带宽为 $\Omega > 0$ 的平方可积限带函数的 Paley-Wiener 空间 PW_Ω。在这

种情况下,[3] 表明如果采样率满足过采样条件 $\mathrm{T} < \frac{1}{2\Omega \mathrm{e}}$，则可以从输出样本中恢复输入函数，其中重建基于时域中的迭代向前差分。首次硬件验证的模编码器在 [4] 中报告，并结合了频域恢复方法。

为了考虑非理想的硬件实现，在 [14] 中引入了一个具有参数三元组 $H = (\lambda, h, \alpha)$ 的广义模编码器 $\mathscr{M}_H$，其中参数滞后效应的 $h \geq 0$ 建模了复位阈值与后复位值的不完美对齐，而参数瞬态的 $\alpha \geq 0$ 则建模了一个不精确的折叠转换。对于函数 g，输出 $\mathscr{M}_H g$ 是通过一系列折叠点 $(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 定义的，由

$$\tau_1 = \min\big\{t > \tau_0 \;\big|\; \mathscr{M}_\lambda(g(t) + \lambda) = 0\big\},$$
$$\tau_{i+1} = \min\big\{t > \tau_i \;\big|\; \mathscr{M}_\lambda(g(t) - g(\tau_i) + h s_i) = 0\big\}$$

给出，并且有 $s_i = \mathrm{sgn}(g(\tau_i) - g(\tau_{i-1}))$ 和 $\tau_0 \in \mathbb{R}$。然后，对于 $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathscr{M}_H g(t) = g(t) - (2\lambda - h) \sum\nolimits_{i\in\mathbb{N}} s_i\, \varepsilon_\alpha(t - \tau_i),$$

其中 $\varepsilon_0(t) = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)$ 模型表示瞬时折叠转换，并且对于 $\alpha > 0$，$\varepsilon_\alpha(t) = \frac{t}{\alpha}\mathbb{1}_{[0,\alpha)}(t) + \mathbb{1}_{[\alpha,\infty)}(t)$ 将折叠转换建模为一条斜率为 ${}^1\!/\!_\alpha$ 的直线。

注意输出 $\mathscr{M}_H g(t)$ 取决于所有的折点 $\tau_j < t$, 因此，$\mathscr{M}_H$ 不是逐点作用的。此外，上述定义并不能保证对于 $t \geq \tau_0$ 有 $\mathscr{M}_\lambda g(t) \in [-\lambda, \lambda]$, 如图 1 所示。其中一个原因是折叠点 $(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 独立于瞬态 α。为了说明这一点，我们现在希望提出一个修正后的模滞回编码器定义。为此，我们通过定义函数序列 $(\eta_n^{(\alpha)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ 重写 $\mathscr{M}_H g$

$$\eta_{n+1}^{(\alpha)} = \eta_n^{(\alpha)} - (2\lambda - h)\, \mathrm{sgn}(\eta_n^{(\alpha)}(\tau_{n+1}))\, \varepsilon_\alpha(\cdot - \tau_{n+1}),$$

其中 $\eta_0^{(\alpha)} = g$。这样，我们得到

$$\tau_i = \inf\big\{t > \tau_{i-1} \;\big|\; |\eta_{i-1}^{(0)}(t)| \geq \lambda\big\}$$

和

$$\mathscr{M}_H g(t) = \lim_{n\to\infty} \eta_n^{(\alpha)}(t).$$

现在的想法是让 τ_i 依赖于 $\eta_{i-1}^{(\alpha)}$ 而不是 $\eta_{i-1}^{(0)}$。

定义 1 (修改后的模滞后)**.** 令 $\lambda > 0$，$h \geq 0$ 和 $\alpha \geq 0$。对于函数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 和起始点 $\tau_0 \in \mathbb{R}$，我们通过

$$\kappa_{n+1} = \inf\big\{t > \kappa_n \;\big|\; |\zeta_n(t)| \geq \lambda\big\}$$

和

$$\zeta_{n+1} = \zeta_n - (2\lambda - h)\, \mathrm{sgn}(\zeta_n(\kappa_{n+1}))\, \varepsilon_\alpha(\cdot - \kappa_{n+1}),$$

定义两个序列 $(\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 和 $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, 其中设定了 $\kappa_0 = \tau_0$ 和 $\zeta_0 = g$。据此，我们定义修改后的滞环算子 $\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha}$ 为

$$\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(t) = \lim_{n\to\infty} \zeta_n(t) \quad \textit{for } t \in \mathbb{R}.$$

当考虑输入函数空间

$$\mathscr{C}^{0,1}_{\lambda,\tau_0} = \big\{g \in \mathscr{C}^{0,1}(\mathbb{R}) \;\big|\; |g(t)| < \lambda \;\forall |t| \geq |\tau_0|\big\},$$

其中 $\mathscr{C}^{0,1}(\mathbb{R})$ 表示在 $\mathbb{R}$ 上的 Lipschitz 连续函数空间，这些函数几乎处处可微且导数本质上是有界的，可以证明对于所有 $g \in \mathscr{C}^{0,1}_{\lambda,\tau_0}$，$\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g$ 是良好定义的，并且与 $\mathscr{M}_H g$ 相反，它满足 $\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(t) \in [-\lambda, \lambda]$ 对于所有的 $t \in \mathbb{R}$ 和

$$\kappa_0 < \kappa_n < \infty \implies |\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(\kappa_n)| = \begin{cases} \lambda & \text{if } \alpha > 0, \\ \lambda - h & \text{if } \alpha = 0, \end{cases}$$

参见图 1 以供说明。由于空间限制，我们在本文中省略了证明，而是现在专注于从离散模滞回样本 $\{\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(k\mathrm{T}) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 以采样率 $\mathrm{T} > 0$ 进行可识别性研究。为此，我们考虑空间

$$\mathscr{C}^{1,1}_{\lambda,\tau_0} = \big\{g \in \mathscr{C}^{0,1}_{\lambda,\tau_0} \;\big|\; g' \in \mathscr{C}^{0,1}(\mathbb{R})\big\}$$

并陈述折叠点 $(\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 的分离性质。

引理 1. 令 $\alpha > 0$ 和 $g \in \mathscr{C}^{1,1}_{\lambda,\tau_0}$ 满足 $\|g''\|_\infty \leq \frac{2h}{\alpha^2}$。那么，对于 $n \in \mathbb{N}_0$ 我们有

$$\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(\kappa_n) \cdot \mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(\kappa_{n+1}) < 0 \implies \kappa_{n+1} - \kappa_n \geq \alpha.$$

证明. 考虑子序列 $(\kappa_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$，其中 $\kappa_{m_1} = \kappa_1$ 和 $\kappa_{m_{n+1}}$ 是下一个具有不同符号的折叠点，即,

$$\kappa_{m_{n+1}} = \min_{k > m_n} \big\{\kappa_k \;\big|\; \mathrm{sgn}(\zeta_k(\kappa_k)) \neq \mathrm{sgn}(\zeta_{m_n}(\kappa_{m_n}))\big\}$$

Algorithm 1 (开放内存编程)

Input: 信号 $\boldsymbol{s} \in \mathbb{C}^M$ 和字典矩阵 $\boldsymbol{V} \in \mathbb{C}^{M \times N}$，误差容限 $\varepsilon > 0$

$\boldsymbol{c}^{(0)} = 0 \in \mathbb{C}^N$,$\mathcal{S}^{(0)} = \emptyset$, $i = 1$
while $\|\boldsymbol{V}^*(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{c}^{(i-1)})\|_\infty > \varepsilon$ **do**
  $j^{(i)} = \arg\max_{1 \le j \le N} |[\boldsymbol{V}^*(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{c}^{(i-1)})]_j|$
  $\mathcal{S}^{(i)} = \mathcal{S}^{(i-1)} \cup \{j^{(i)}\}$
  $\boldsymbol{c}^{(i)} = \arg\min_{\boldsymbol{c}} \left\{ \|\boldsymbol{s} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{c}\|_2 \mid \mathrm{supp}(\boldsymbol{c}) \subseteq \mathcal{S}^{(i)} \right\}$
  $i = i + 1$
end while

Output: $\boldsymbol{c}^{(i_{\text{end}})} \in \mathbb{C}^N$

使得 $\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(\kappa_{m_n}) = \pm\lambda = -\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(\kappa_{m_{n+1}})$。现在，不失一般性地令 $\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(\kappa_{m_1}) = \lambda$。然后，我们得到 $\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(\kappa_{m_2-1}) = \lambda$ 和 $\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(\kappa_{m_2}) = -\lambda$。此外，$g'(\kappa_{m_2-1}) \ge p\,\frac{2\lambda-h}{\alpha}$ 和 $p = |\{\kappa_k \in (\kappa_{m_2-1}-\alpha, \kappa_{m_2-1})\}|$。因此，我们可以估计 $\zeta_{m_2-1}(t)$ 对于 $t > \kappa_{m_2-1}$ 为

$$\begin{aligned}\zeta_{m_2-1}(t) &\ge \zeta_{m_2-1}(\kappa_{m_2-1}) + g'(\kappa_{m_2-1})\,(t-\kappa_{m_2-1}) \\ &\quad - \frac{\|g''\|_\infty}{2}\,(t-\kappa_{m_2-1})^2 - (p+1)\,\frac{2\lambda-h}{\alpha}\,(t-\kappa_{m_2-1}) \\ &\ge \lambda - \frac{h}{\alpha^2}\,(t-\kappa_{m_2-1})^2 - \frac{2\lambda-h}{\alpha}\,(t-\kappa_{m_2-1}).\end{aligned}$$

由此我们得出结论，

$$\begin{aligned}\kappa_{m_2} &\ge \inf\Big\{ t > \kappa_{m_2-1} \;\Big|\; \lambda - \frac{h}{\alpha^2}\,(t-\kappa_{m_2-1})^2 \\ &\qquad - \frac{2\lambda-h}{\alpha}\,(t-\kappa_{m_2-1}) = -\lambda \Big\} \\ &= \kappa_{m_2-1} + \alpha.\end{aligned}$$

我们现在假设对于某些 $n \ge 2$ 我们有 $\kappa_{m_n} \ge \kappa_{m_n-1} + \alpha$。不失一般性地设 $\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(\kappa_{m_n}) = \lambda$。由于 $\kappa_{m_{n+1}-1} \ge \kappa_{m_n} > \kappa_{m_n-1} + \alpha$，我们可以像之前一样进行同样的论证以获得

$$\begin{aligned}\kappa_{m_{n+1}} &\ge \inf\Big\{ t > \kappa_{m_{n+1}-1} \;\Big|\; \lambda - \frac{h}{\alpha^2}\,(t-\kappa_{m_{n+1}-1})^2 \\ &\qquad - \frac{2\lambda-h}{\alpha}\,(t-\kappa_{m_{n+1}-1}) = -\lambda \Big\} \\ &= \kappa_{m_{n+1}-1} + \alpha,\end{aligned}$$

这完成了证明。 □

在对 g 的二阶导数施加上述条件后，我们可以描述 $\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(t)$ 在 $t > |\tau_0|$ 较大时的行为。

引理 2. 如果 $g \in \mathscr{C}^{1,1}_{\lambda-h,\tau_0}$ 满足 $\|g''\|_\infty \le \frac{2h}{\alpha^2}$ 和 $0 \le h < \lambda$，我们有 $\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(t) = g(t)$ 对所有 $t \ge |\tau_0| + 2\alpha$ 成立。

证明. 令 κ_n 为不大于 $|\tau_0|$ 的最大折叠点。我们现在遍历不同的可能情况。

<u>情况 1:</u> 如果 $\kappa_n + \alpha \le |\tau_0|$，存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\begin{aligned}|\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(|\tau_0|)| &= |k\,(2\lambda-h) + g(|\tau_0|)| \\ &\ge |k|\,(2\lambda-h) - |g(|\tau_0|)| \\ &> |k|\,(2\lambda-h) - \lambda + h.\end{aligned}$$

如 $|\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(|\tau_0|)| \le \lambda$，我们得到 $k = 0$，这意味着 $\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(|\tau_0|) = g(|\tau_0|)$ 并且因此对于所有 $t \ge |\tau_0|$ 均有 $\zeta_n(t) = g(t)$。将此插入到 κ_{n+1} 的定义中，得到

$$\kappa_{n+1} = \inf\{t > |\tau_0| \mid |g(t)| \ge \lambda\} = \infty,$$

，从而得出对于所有 $t \ge |\tau_0|$ 均有 $\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(t) = g(t)$ 成立。正如 $\kappa_n \le |\tau_0|$ 所示，这是 $\alpha = 0$ 的唯一情况。现在设 $\alpha > 0$。

<u>情况 2:</u> 如果 $\kappa_n + \alpha > |\tau_0|$，但 $\kappa_n + \alpha \le \kappa_{n+1}$，我们得到，对于某个 $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}|\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(\kappa_n + \alpha)| &= |k\,(2\lambda-h) + g(\kappa_n + \alpha)| \\ &> |k|\,(2\lambda-h) - \lambda + h\end{aligned}$$

使得 $\kappa_{n+1} = \infty$ 和 $\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(t) = g(t)$ 对于所有 $t \ge \kappa_n + \alpha$。由于 $\kappa_n \le |\tau_0|$，这也适用于所有 $t \ge |\tau_0| + \alpha$。

<u>情况 3:</u> 如果 $\kappa_n + \alpha > \max\{|\tau_0|, \kappa_{n+1}\}$，但 $\kappa_{n+1} + \alpha \le \kappa_{n+2}$，我们得到，对于某个 $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}|\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(\kappa_{n+1} + \alpha)| &= |k\,(2\lambda-h) + g(\kappa_{n+1} + \alpha)| \\ &> |k|\,(2\lambda-h) - \lambda + h\end{aligned}$$

使得 $\kappa_{n+2} = \infty$ 和 $\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(t) = g(t)$ 对于所有的 $t \ge \kappa_{n+1} + \alpha$。由于 $\kappa_{n+1} \le |\tau_0| + \alpha$，这也适用于所有 $t \ge |\tau_0| + 2\alpha$。

<u>情况 4:</u> 令 $\kappa_n + \alpha > \max\{|\tau_0|, \kappa_{n+1}\}$，$\kappa_{n+1} + \alpha > \kappa_{n+2}$。如上，不失一般性地设 $\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(\kappa_n) = \lambda$。引理 1 暗示了 $\lambda = \mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(\kappa_{n+1}) = \mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(\kappa_{n+2})$ 和

$\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(\kappa_{n+2}+\alpha) \le \zeta_{n+2}(\kappa_{n+2}+\alpha)$。这给我们得出

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(\kappa_{n+2}+\alpha) &\le \lambda + \zeta_{n+2}(\kappa_{n+2}+\alpha) - \zeta_{n+2}(\kappa_n)\\ &\le \lambda + g(\kappa_{n+2}+\alpha) - g(\kappa_n) - 3(2\lambda - h)\\ &< \lambda + 2(\lambda - h) - 3(2\lambda-h) = -3\lambda + h < -2\lambda\end{aligned}$$

与 $\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(t) \in [-\lambda, \lambda]$ 矛盾。 □

我们现在可以推导出采样率 T 的一个条件，以唯一确定带宽为 $\Omega > 0$ 的 $g \in \mathsf{PW}_\Omega$ 的模迟滞样本。在 [3, Lemma 1] 中，表明任意函数 $g \in \mathsf{PW}_\Omega$ 只要当 $0 < \mathrm{T}_\varepsilon \le \frac{\pi}{\Omega+\varepsilon}$ 对于任意大于零的 $\varepsilon > 0$ 和任何有限集 $J \subset \mathbb{Z}$ 由样本 $\{g(k\mathrm{T}_\varepsilon) \mid k \in \mathbb{Z} \setminus J\}$ 唯一确定。我们可以应用这一点来证明如果 $\mathrm{T} < \frac{\pi}{\Omega}$,$g$ 也由样本 $\{\mathcal{A}g(k\mathrm{T}) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 唯一确定对于一个一般的算子 $\mathcal{A} : \mathsf{PW}_\Omega \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ 具有

$$\mathcal{A}g(t) = g(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \setminus M$$

对于某个有界集 $M \subset \mathbb{R}$。

引理 3. 任何 $g \in \mathsf{PW}_\Omega$ 都由 $\{\mathcal{A}g(k\mathrm{T}) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 确定，如果过采样条件 $\mathrm{T} < \frac{\pi}{\Omega}$ 得到满足。

证明. 由于 $\mathrm{T} < \frac{\pi}{\Omega}$，存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $\mathrm{T} \le \frac{\pi}{\Omega+\varepsilon}$。现在定义 $J = M \cap \mathbb{Z}$，它是有限的，因为 $M \subset \mathbb{R}$ 是有界的。由于假设 $\{\mathcal{A}g(k\mathrm{T}) \mid k \in \mathbb{Z} \setminus J\} = \{g(k\mathrm{T}) \mid k \in \mathbb{Z} \setminus J\}$ 关于 $\mathcal{A}$，该陈述由 [3, Lemma 1] 得出。 □

由于模滞后算子 $\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha}$ 在限制我们只考虑具有 $\|g''\|_\infty \le \frac{2h}{\alpha^2}$ 和 $0 \le h < \lambda$ 的函数 $g \in \mathsf{PW}_\Omega \cap \mathscr{C}^{1,1}_{\lambda-h,\tau_0}$ 时满足上述关于 $\mathcal{A}$ 的条件，根据引理 2，我们得到了以下关于 $\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha}$ 的可识别性结果。

推论 1. 令 $0 \le h < \lambda$。然后，任何 $g \in \mathsf{PW}_\Omega \cap \mathscr{C}^{1,1}_{\lambda-h,\tau_0}$，其 $\|g''\|_\infty \le \frac{2h}{\alpha^2}$ 均由模滞后采样 $\{\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(k\mathrm{T}) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 唯一确定，如果 $\mathrm{T} < \frac{\pi}{\Omega}$。 □

III. 通过 OMP 重构

对于我们的重建方法，我们假设给出了 $2K+1$ 个迟滞采样样本的 $g \in \mathsf{PW}_\Omega \cap \mathscr{C}^{0,1}_{\lambda,\tau_0}$，

$$\{\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(k\mathrm{T}) \mid k = -K, \ldots, K\}$$

其中采样率为 $0 < \mathrm{T} < \frac{\pi}{\Omega}$，$K \in \mathbb{N}$ 足够大使得对于所有 $|t| \ge K\mathrm{T}$ 都有 $|g(t)| < \lambda$。让我们首先考虑位于

Algorithm 2 (SAOMP)

Input: 信号 $\boldsymbol{s} \in \mathbb{C}^M$ 和字典矩阵 $\boldsymbol{V} \in \mathbb{C}^{M\times N}$，误差容限 $\varepsilon > 0$，初始阈值 $\nu \in [0,1]$，剪枝阈值 $\mu \in [0,1]$，最大迭代次数 $i_{\max} \in \mathbb{N}$

$\boldsymbol{c}^{(0)} = 0 \in \mathbb{C}^N$,$\mathcal{S}^{(0)} = \emptyset$,$\delta = \nu$,$i = 1$
while $i \le i_{\max}$ **and** $\|\boldsymbol{V}^*(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{c}^{(i-1)})\|_\infty > \varepsilon$ **do**
  $\boldsymbol{r}^{(i)} = \boldsymbol{V}^*(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{c}^{(i-1)})$
  $\mathcal{S}^{(i)} = \mathcal{S}^{(i-1)} \cup \{j \in \{1,\ldots,N\} \mid |\boldsymbol{r}_j^{(i)}| \ge \delta\,\|\boldsymbol{r}^{(i)}\|_\infty\}$
  $\boldsymbol{c}^{(i)} = \arg\min_{\boldsymbol{c}}\{\|\boldsymbol{s} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{c}\|_2 \mid \operatorname{supp}(\boldsymbol{c}) \subseteq \mathcal{S}^{(i)}\}$
  $\mathcal{S}^{(i)} = \{j \in \{1,\ldots,N\} \mid |\boldsymbol{c}_j^{(i)}| \ge \mu\,\|\boldsymbol{c}^{(i)}\|_\infty\}$
  对于 $j \notin \mathcal{S}^{(i)}$:$\boldsymbol{c}_j^{(i)} = 0$
  $\delta = \delta + \frac{1-\nu}{i_{\max}}$, $i = i + 1$
end while

Output: $\boldsymbol{c}^{(i_{\mathrm{end}})} \in \mathbb{C}^N$

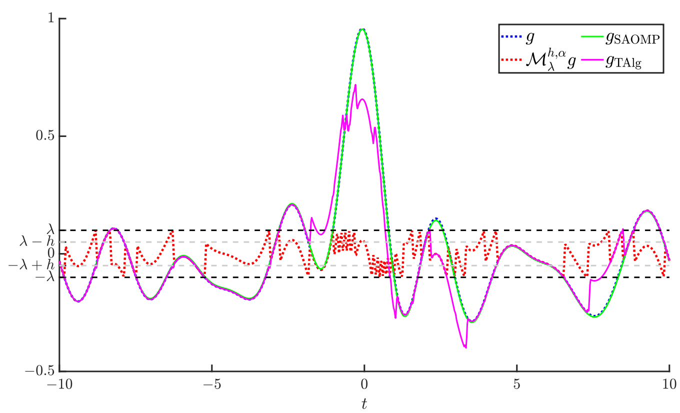

图 2. SAOMP 和 TAlg 重构的示例，针对随机 $g \in \mathsf{PW}_\Omega$ 基于模迟滞样本 $\mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g(n\mathrm{T})$ 进行，涉及 $\Omega = 6.3\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ 以及 $\lambda = 0.1$,$h = 0.05$,$\alpha = 50\mathrm{ms}$ 和 $\mathrm{T} = 20.8\mathrm{ms}$。

固定点 $-K\mathrm{T} < \kappa < K\mathrm{T}$ 的折叠函数 $\varepsilon_\alpha(\cdot - \kappa)$，并为 $n = 0, \ldots, N$ 设置 $\varepsilon_\alpha^{(\kappa)}[n] = \varepsilon_\alpha((n-K)\mathrm{T} - \kappa)$，带有 $N = 2K$。令 $\Delta : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^N$ 表示由 $\Delta z[k] = z[k+1] - z[k]$ 定义的向前差分算子。然后，最多有 $L = \lceil \frac{\alpha}{\mathrm{T}} \rceil + 1$ 项是非零的 $\Delta\varepsilon_\alpha^{(\kappa)}$，因此对于合适的 $\tilde{\kappa}_1, \ldots, \tilde{\kappa}_L \in \mathrm{T}\mathbb{Z}$，有 $\Delta\varepsilon_\alpha^{(\kappa)}[n] = \Delta\varepsilon_0^{(\tilde{\kappa}_1)}[n] + \ldots + \Delta\varepsilon_0^{(\tilde{\kappa}_L)}[n]$。直观地说，一个线性折叠被分割成最多 L 个瞬时折叠。基于这一观察，我们可以调整在 [16] 中提出的恢复方法。

为此，设定 $g[n] = g((n-K)\mathrm{T})$，对于 $n = 0, \ldots, N$ 和 $g_\lambda[n] = \mathscr{M}_\lambda^{h,\alpha} g((n-K)\mathrm{T})$。然后，存在 $L_\lambda \in \mathbb{N}$，$\kappa_1, \ldots, \kappa_{L_\lambda} \in [-K, K]\mathrm{T}$ 和 $\sigma_1, \ldots, \sigma_{L_\lambda} \in \{\pm 1\}$，使得 $g_\lambda[n] = g[n] - s_\lambda[n]$ 满足 $s_\lambda[n] = (2\lambda - h)\sum_{l=1}^{L_\lambda} \sigma_l\, \varepsilon_\alpha^{(\kappa_l)}[n]$。我们将 Δ 应用于获得 $\underline{g}_\lambda[n] = \Delta g_\lambda[n]$

对于 $n=0,\dots,N-1$，并在此基础上计算其离散傅里叶变换（DFT）$\hat{\underline{g}}_\lambda[m]=\sum_{n=0}^{N-1}\underline{g}_\lambda[n]\exp(-\frac{2\pi imn}{N})$ 对于 $m=0,\dots,N-1$。根据上述观察，信号 $\widehat{\underline{s}}_\lambda$ 可以写为

$$\widehat{\underline{s}}_\lambda[m]=\sum\nolimits_{\ell\in\mathbb{L}_\lambda}c_\ell\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\underline{\omega}_0 m}{\mathrm{T}}t_\ell\right)$$

其中包含 $\underline{\omega}_0=\frac{2\pi}{N}$,$\mathbb{L}_\lambda\subseteq\{0,\dots,N\}$ 和 $t_\ell\in(\mathrm{T}\mathbb{Z})\cap[0,N\mathrm{T}]$，其中 $|\mathbb{L}_\lambda|\le L_\lambda(\lceil\frac{\alpha}{\mathrm{T}}\rceil+1)$。现在，$g$ 的带限性给出了

$$\hat{\underline{g}}_\lambda[m]=-\hat{\underline{s}}_\lambda[m]\quad\text{for } m\in\mathbb{E}^{\mathsf{c}}_{N_\Omega,N}$$

其指标为 $\mathbb{E}^{\mathsf{c}}_{N_\Omega,N}=\{N_\Omega+1,\dots,N-N_\Omega-1\}$，有效带宽为 $N_\Omega=\lceil\frac{\Omega(N+1)\mathrm{T}}{2\pi}\rceil$。定义向量 $\boldsymbol{s}\in\mathbb{C}^M$ 对于 $M=N-2N_\Omega-1$ 通过 $\boldsymbol{s}_{m-N_\Omega}=\hat{\underline{g}}_\lambda[m]$ 对于 $m\in\mathbb{E}^{\mathsf{c}}_{N_\Omega,N}$，我们可以通过求解最小化问题找到 $\boldsymbol{c}=(c_n)_{n=0}^{N-1}\in\mathbb{C}^N$ 与 $c_n=0$ 对于 $n\notin\mathbb{L}_\lambda$

$$\text{minimize } \|\boldsymbol{c}\|_0\quad\text{subject to}\quad\boldsymbol{V}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{s},\tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{V}\in\mathbb{C}^{M\times N}$ 是一个范德蒙矩阵，其元素为 $\boldsymbol{V}_{m-N_\Omega,n+1}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\underline{\omega}_0 mn}$ 对于 $m\in\mathbb{E}^{\mathsf{c}}_{N_\Omega,N}$, $n=0,\dots,N-1$。如在 [16] 中解释的，可以通过正交匹配追踪（OMP）算法 [17] 高效地解决 (1)，参见算法 1。应用差分算子 $\mathsf{S}:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^{N+1}$，定义如 $\mathsf{S}z[k]=\sum_{j<k}z[j]$，并从 $\boldsymbol{g}_\lambda=(g_\lambda[n])_{n=0}^N$ 中减去 $\mathsf{S}\boldsymbol{c}$ 最终恢复样本 $\boldsymbol{g}=(g[n])_{n=0}^N$。

在 [11] 中，显示了使用 OMP 求解 (1) 的恢复保证，如果 $\boldsymbol{c}\in\mathbb{C}^N$ 的最大非零项索引满足 $\max\{n\mid\boldsymbol{c}_n\neq0\}\le M-1$。通过引理 2 我们知道，如果 $g\in\mathscr{C}^{1,1}_{\lambda-h,\tau_0}$ 满足 $\|g''\|_\infty\le\frac{2h}{\alpha^2}$ 和

$$\left\lceil\frac{|\tau_0|+2\alpha}{\mathrm{T}}\right\rceil+K\le N-2N_\Omega-2.$$

为了加速恢复，我们用所谓的分阶段算术正交匹配追踪（SAOMP）算法替换了 OMP，该算法在 [18] 中提出。它具有额外的参数 ν 来在一个迭代中找到多个折叠点和参数 μ 来移除错误选择的项，请参见算法 2。请注意，当选择 $\nu=1$、$\mu=0$ 和 $i_{\max}=N$ 时，SAOMP 与 OMP 一致。

IV. 数值实验

在我们的数值实验中，我们随机选择一个函数 $g\in\mathsf{PW}_\Omega$ 并使用 $\Omega=6.3$ 近似其模滞输出 $\mathscr{M}^{h,\alpha}_\lambda g$ 的数值。因此，我们使用我们的 SAOMP 方法从其样本 $\mathscr{M}^{h,\alpha}_\lambda g(n\mathrm{T})$ 重构 g，并将我们的结果与在 [14] 中提出的阈值算法（TAlg）进行比较。一个示例如图 2 所示，其中我们选择了 $\lambda=0.1$、$h=0.05$、$\alpha=0.05$ 和 $\mathrm{T}=0.0208$。

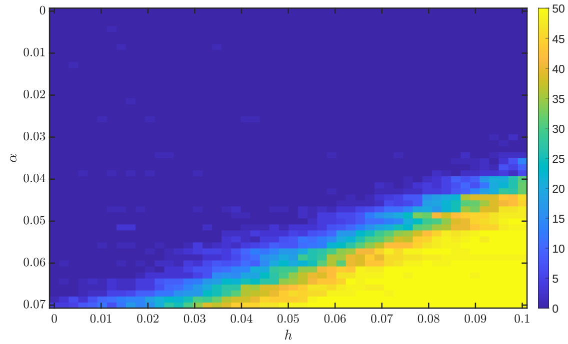

图 3. $\mathscr{M}^{h,\alpha}_\lambda g(n\mathrm{T})$ 使用 $\lambda=0.1$,$\mathrm{T}=20.8$ms 和不同值的 α 及 h 进行 SAOMP 重构的成功率，展示了 MSE 大于 0.001 的频率，针对 50 随机函数 $g\in\mathsf{PW}_\Omega$ 具有 $\Omega=6.3\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$。

当恢复使用 TAlg 时，对于非常接近零的 $\alpha\ll1$ 表现更好，但对于较大的 α，TAlg 失效，而 SAOMP 仍然可以恢复，请参见图 2。为了进行更详细的分析，我们研究了 α 和 h 对我们 SAOMP 方法重建成功的影响。为此，我们设置 $\lambda=0.1$ 并使 α 在 0 和 0.07 之间变化，并使 h 在 0 和 0.1 之间变化。然后我们计算了对 50 个随机选择的函数进行 SAOMP 重构后的均方误差（MSE）。结果如图 3 所示，其中颜色表示有多少函数的 SAOMP 的 MSE 大于 0.001。

我们观察到 SAOMP 对于一大范围的参数给出了满意的重构结果。然而，我们的方法在折叠数很大的情况下显示出不稳定，特别是当 α 远大于 T 时。在这种情况下，修改后的字典矩阵 $\boldsymbol{V}$ 可以减少系数向量 $\boldsymbol{c}$ 中的非零元素数量，并允许获得更好的重构结果。然而，这种方法超出了本文的范围，需要在未来进行更深入的研究。

参考文献

[1] C. E. Shannon, “A mathematical theory of communication,” *The Bell System Technical Journal*, vol. 27, no. 3, pp. 379–423, 1948.

[2] A. Bhandari, F. Krahmer, and R. Raskar, “On unlimited sampling,” in *IEEE International Conference on Sampling Theory and Applications (SampTA)*, 2017, pp. 31–35.

[3] ——, “On unlimited sampling and reconstruction,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 69, pp. 3827–3839, 2020.

[4] A. Bhandari, F. Krahmer, and T. Poskitt, “Unlimited sampling from theory to practice: Fourier-Prony recovery and prototype ADC,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 70, pp. 1131–1141, 2021.

[5] S. Rudresh, A. Adiga, B. A. Shenoy, and C. S. Seelamantula, “Wavelet-based reconstruction for unlimited sampling,” in *2018 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 2018, pp. 4584–4588.

[6] E. Romanov and O. Ordentlich, “Above the nyquist rate, modulo folding does not hurt,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 26, no. 8, pp. 1167–1171, 2019.

[7] E. Azar, S. Mulleti, and Y. C. Eldar, “Residual recovery algorithm for modulo sampling,” in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 2022, pp. 5722–5726.

[8] R. Guo and A. Bhandari, “ITER-SIS: Robust unlimited sampling via iterative signal sieving,” in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 2023, pp. 1–5.

[9] A. Bhandari and F. Krahmer, “HDR imaging from quantization noise,” in *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, 2020, pp. 101–105.

[10] M. Beckmann, A. Bhandari, and F. Krahmer, “The modulo Radon transform: Theory, algorithms and applications,” *SIAM Journal on Imaging Sciences*, vol. 15, no. 2, pp. 455–490, 2022.

[11] M. Beckmann, A. Bhandari, and M. Iske, “Fourier-domain inversion for the modulo Radon transform,” *IEEE Transactions on Computational Imaging*, vol. 10, pp. 653–665, 2024.

[12] T. Feuillen, B. Shankar, and A. Bhandari, “Unlimited sampling radar: Life below the quantization noise,” in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 2023, pp. 1–5.

[13] E. Azar, S. Mulleti, and Y. C. Eldar, “Unlimited sampling beyond modulo,” *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 74, p. 101715, 2025.

[14] D. Florescu, F. Krahmer, and A. Bhandari, “The surprising benefits of hysteresis in unlimited sampling: Theory, algorithms and experiments,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 70, pp. 616–630, 2022.

[15] D. Florescu and A. Bhandari, “Unlimited sampling via generalized thresholding,” in *IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, 2022, pp. 1606–1611.

[16] M. Beckmann and A. Bhandari, “MR. TOMP: Inversion of the modulo Radon transform (MRT) via orthogonal matching pursuit (OMP),” in *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, 2022, pp. 3748–3752.

[17] S. Mallat and Z. Zhang, “Matching pursuits with time-frequency dictionaries,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 12, pp. 3397–3415, 1993.

[18] Y. Zhang and G. Sun, “Stagewise arithmetic orthogonal matching pursuit,” *International Journal of Wireless Information Networks*, vol. 25, pp. 221–228, 2018.