

导数到形式的扩展

MANUJITH K. MICHEL AND CHITRAREKHA SAHU

摘要. 将域 F 的导数扩展到 F -代数 B 的问题在交换代数和环理论中被广泛研究。例如, 每个导子 F 扩展到 B 如果 B 是一个可分代数扩张或一个中心单代数在 F 上。我们统一和推广这些结果通过展示一个导子 d 的 F 具有常数域 C 扩展到有限维代数 B 如果 B 是一个某些 C -代数的形式, 它有一个平滑自同构方案 G 。此外, 我们证明了扩展 d 对 F 的推导的 B 的推导集合与满足 Y, δ 是一个微分 G_F -torsor 的推导集合 δ 之间存在一一对应关系, 其中 Y 是与 B 对应的 G_F -torsor。

1. 介绍

令 R 是一个环。加性映射 $\delta : R \rightarrow R$ 被称为 R 的推导, 如果它满足莱布尼兹法则, 即对于所有 $a, b \in R$ 有 $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ 。一个元素 $r \in R$ 被称为在导数 δ 下是 R 的 constant, 如果 $\delta(r) = 0$ 。在本文中, 我们固定一个域 F 和一个导数 $' : F \rightarrow F, x \mapsto x'$, 并且用 C 表示该导数下 F 的常数集。可以很容易地看出 C 是 F 的子域。令 $\bar{F}$ 表示 F 的可分闭包。从 [Mag94], 导数 $x \mapsto x'$ 可以唯一地延拓到 $\bar{F}$ 并再次表示为 $' : \bar{F} \rightarrow \bar{F}$ 。对于矩阵 $M = (m_{ij}) \in M_n(\bar{F})$, 令 M' 表示矩阵 (m'_{ij}) 。

对于一个有限维的 C -代数 A , A 的自同构概形由函子 $\text{Aut}_A : S \mapsto \text{Aut}_A(S) := \text{Aut}(A \otimes_C S/S)$ 给出, 对于每个交换的 C -代数 S , 其中 $\text{Aut}(A \otimes_C S/S)$ 是 $A \otimes_C S$ 的所有 S -线性自同构群。已知函子 Aut_A 是定义在 C [Ser79] 上的代数群概形。

一个形式的 C -代数 A 在 F 上是一个 F -代数 B , 使得 $A \otimes_C \bar{F} \cong B \otimes_C \bar{F}$ 作为 $\bar{F}$ -代数。可以观察到, 可分离扩张和次数为 n 的有限维中心单代数是 F 上的 $\prod^n C$ 和 $M_n(C)$ 的形式。此外, $\prod^n C$ 和 $M_n(C)$ 的自同构方案是光滑的。众所周知, F 的导出可以扩展到 F 的可分域扩张和 F [Ami82] 上的有限维中心单代数。在这篇论文中, 我们将通过展示 F 的导数可以扩展到给定的 C -代数 A 在 F 上的任何形式, 使得 Aut_A 是光滑的, 来推广这些结果。令 A 为一个 C -代数, 其自同构概形 $G := \text{Aut}_A$ 是光滑的。我们固定一个基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$, 作为 A 在 C 上的基, 并将 G 等同于 GL_n 的闭子概形, 同时将其李代数 $\mathfrak{g}$ 等同于 $M_n(C)$ 的一个子代数。第一个伽罗瓦上同调 $H^1(\text{Gal}(\bar{F}/F), G(\bar{F}))$, 其中 $\text{Gal}(\bar{F}/F)$ 是 $\bar{F}$ 在 F 上的伽罗瓦群, 与 A 在 F 上的形式的同构类集之间存在一一对应关系。令 $f \in H^1(\text{Gal}(\bar{F}/F), G(\bar{F}))$, 则存在 $P_f \in \text{GL}_n(\bar{F})$, 使得

$$f : \text{Gal}(\bar{F}/F) \rightarrow G(\bar{F})$$

由下式给出,

$$(1.1) \quad \sigma \mapsto f_\sigma := P_f^{-1} \sigma(P_f)$$

对于每一个 $\sigma \in \text{Gal}(\bar{F}/F)$ 。我们将证明形式为 A_f 的导子集, 扩展了 F 的导子, 可以与集合 $[P_f^{-1} \mathfrak{g}_{\bar{F}} P_f + (P_f^{-1})' P_f] \cap M_n(F)$ 等同, 其中 $\mathfrak{g}_{\bar{F}}$ 是通过基变换获得的群概形 $G_{\bar{F}}$ 的李代数。对于上述 P_f , 集合 $[P_f^{-1} \mathfrak{g}_{\bar{F}} P_f + (P_f^{-1})' P_f] \cap M_n(F)$ 非空 [JL07], 因此存在一种形式为 A_f 的推导扩展了 F 的推导。

Indian Institute of Science Education and Research Mohali, Punjab 140306, India
E-mail addresses: manujithkmichel@gmail.com, chitrarekhasahu97@gmail.com.

G_F -束是一个有限型的仿射概形 Y ，定义在 F 上，带有概形间的态射 $\rho: G_F \times_F Y \rightarrow Y$ ，使得对于每个 F -代数 R ， $\rho_R: G_F(R) \times_F Y(R) \rightarrow Y(R)$ 定义了 $G_F(R)$ 对 $Y(R)$ 的一个左群作用，并且态射 $(\rho, p_2): G_F \times_F Y \rightarrow Y \times_F Y$ 是概形间的同构，其中 p_2 是到 Y 上的投影。如果此外，存在一个从 $F[Y]$ 推导出的 δ ，它扩展了 F 的推导，使得该图表

$$\begin{array}{ccc} F[Y] & \xrightarrow{\rho_*} & C[G] \otimes_F F[Y] \\ \delta \downarrow & & \downarrow \text{id} \otimes \delta \\ F[Y] & \xrightarrow{\rho_*} & C[G] \otimes_F F[Y] \end{array}$$

若交换则该对 (Y, δ) 称为一个微分 G_F -束。映射 $\rho_*: F[Y] \rightarrow F[G] \otimes_F F[Y] \cong C[G] \otimes_C F[Y]$ 是由 ρ 诱导出的坐标环上的同态。我们看到对于一个 G_F -扭子 Y ， (Y, δ) 是一个微分 G_F -扭子当且仅当 $F[Y] \otimes_F \bar{F}$ 的导数

$$h \otimes x \mapsto \delta(h) \otimes x + h \otimes x', \quad h \in F[Y], x \in \bar{F}$$

与 $G(\bar{F})$ 在 $F[Y] \otimes_F \bar{F}$ 上的作用交换。关于微分挠元的更多细节可以在 [BHHW18] 中找到。集合 $H^1(\text{Gal}(\bar{F}/F), G(\bar{F}))$ 与集合 G_F -挠元在 F 上的同构类之间存在双射。从 [JL07, Section 5] 中，我们可以看到，对于固定的上调 $f \in H^1(\text{Gal}(\bar{F}/F), G(\bar{F}))$ ，如果 Y_f 是相应的 G_F -扭子，则导数集 $\{\delta: (Y_f, \delta) \text{ 是一个微分 } G_F\text{-扭子}\}$ 由集合 $[P_f^{-1} \mathfrak{g}_{\bar{F}} P_f + (P_f^{-1})' P_f] \cap M_n(F)$ 表征，其中 P_f 与方程 (1.1) 中的相同。因此，根据上述所有发现，我们得出结论：形式为 A_f 的 A 在 F 上的导出扩展了 F 的导出，这些导出被分类为 δ 对 $F[Y_f]$ 的导出，使得 (Y_f, δ) 是一个微分 G_F -扭子。这一最后结论是定理 5.1 在 [TW24] 中的一个推广，其证明使用了 Picard-Vessiot 理论，并假设 C 是代数闭的。

致谢

作者感谢他们的导师，Varadharaj R Srinivasan 博士，进行了富有洞察力的讨论。第一作者由科学与工业研究委员会 (CSIR) 资助，第二作者由大学拨款委员会 (UGC) 资助。

2. 导数的扩展

令 C 为一个域，并且 A 是一个具有光滑自同构方案 G 的 C -代数。回忆一下，对于任何 C -代数 S ， $G(S) := \text{Aut}(A \otimes_C S/S)$ 。现在我们将观察到 A 的 C -线性导子可以与群概形 G 的李代数识别。令 $A[x]$ 是一个在 A 上的 x 多项式环，使得 x 与 A 的元素交换，并且令 ϵ 是 x 在 $\frac{A[x]}{\langle x^2 \rangle}$ 中的像。我们知道映射 $\delta: A \rightarrow A$ 是一个 C -线性导子 A 当且仅当映射

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow A[\epsilon] \\ a &\mapsto a + \delta(a)\epsilon \quad \text{for all } a \in A, \end{aligned}$$

是一个 C -代数同态 [Mag94]。令 $\eta: A[\epsilon] \rightarrow A$ 是由 $\eta(a + b\epsilon) = a$ 定义的 C -线性映射，对于每一个 $a, b \in A$ 。如果 $\mathfrak{g}$ 表示 G 的李代数，则使用 [Wat12, Section 12.2]，

$$\mathfrak{g} = \{\phi \in G(C[\epsilon]) : \phi_C = e_C \in G(C)\},$$

其中 e_C 是 $G(C) = \text{Aut}(A/C)$ 的单位元，对于每一个 $\phi \in G(C[\epsilon])$ ， ϕ_C 是复合映射，

$$A \hookrightarrow A[\epsilon] \xrightarrow{\phi} A[\epsilon] \xrightarrow{\eta} A.$$

令 $\phi \in \mathfrak{g}$ ， $a \in A$ 和 $\phi(a) = a_0 + a_1\epsilon$ 对于某个 $a_0, a_1 \in A$ ，则 $a = \phi_C(a) = a_0$ 。因此， $\phi(a + b\epsilon) = \phi(a) + \phi(b)\epsilon = a + a_1\epsilon + b\epsilon$ 。可以轻易验证由 $\delta_\phi(a) = a_1$ 定义的映射 $\delta_\phi: A \rightarrow A$ 是 A 上的一个 C -线性导子。

引理 2.1. 映射 $\phi \mapsto \delta_\phi$ 是从 $\mathfrak{g}$ 到所有 C -线性导数 A 的一个双射。

证明. 令 $\phi \in \mathfrak{g}$, 则 ϕ 是 $A[\epsilon]$ 上的一个 C -代数自同构. 令 $a \in A$, 则存在某个 $a_0, a_1 \in A$ 使得 $\phi(a) = a_0 + a_1\epsilon$. 由于 $a = \phi_C(a) = \eta \circ \phi(a)$, 我们得到 $a = a_0$. 这表明映射 $a \mapsto a + a_1\epsilon$ 给出了从 A 到 $A[\epsilon]$ 的一个 C -代数同态, 进而给出了 A 的一个导子 $\delta_\phi : a \mapsto a_1$. 反之, 如果 δ 是 A 的一个导子, 则映射 $a \mapsto a + \delta(a)\epsilon$ 的 $C[\epsilon]$ -线性扩张 ϕ_δ 是 $A[\epsilon]$ 上的一个 C -代数自同构, 使得 $\eta \circ \phi_\delta$ 在 A 上的限制是恒等映射, 即 $\phi_\delta \in \mathfrak{g}$. 显然, 映射 $\phi \mapsto \delta_\phi$ 和 $\delta \mapsto \phi_\delta$ 是互逆的. $\square$

从上述引理 (2.1), 我们可以识别 C -线性导数与 A 的 $\mathfrak{g}$. 设 F 是一个微分域, 常数集为 C , δ_0 是由 $\delta_0(a \otimes f) = a \otimes x'$ 定义的 $A \otimes_C \bar{F}$ 的导数, 对于每一个 $a \in A$ 和 $x \in \bar{F}$. 令 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 为 A 在 C 上的基, $f \in H^1(\text{Gal}(\bar{F}/F), G(\bar{F}))$ 和 $P_f \in \text{GL}_n(\bar{F})$ 如方程 (1.1) 中所示. 形式 A_f 对应于 f 是由扭曲作用

$$\begin{aligned} * : \text{Gal}(\bar{F}/F) \times (A \otimes_C \bar{F}) &\rightarrow A \otimes_C \bar{F} \\ (\sigma, a \otimes x) &\mapsto f_\sigma(a \otimes \sigma x) \end{aligned}$$

的不变量给出的, 对于每一个 $\sigma \in \text{Gal}(\bar{F}/F)$, $a \in A$ 和 $x \in \bar{F}$. 记 $[e_1 \otimes 1, \dots, e_n \otimes 1]$ 的转置为 V , 则 $P_f^{-1}V$ 的分量在扭曲作用下不变, 并构成 A_f 的一组基.

备注 2.2. 观察到从引理 (2.1) 我们可以将 $\mathfrak{g}_{\bar{F}}$ 识别为所有 $M \in M_n(\bar{F})$ 的集合, 使得由 $\delta_M(V) = MV$ 给出的 $\bar{F}$ -线性映射是一个导子. $A \otimes_C \bar{F}$.

命题 2.3. 令 $f \in H^1(\text{Gal}(\bar{F}/F), G(\bar{F}))$, 则存在一个从所有形如 A_f 的导数集到扩展 F 导数的集合的一一映射

$$\{P_f^{-1}MP_f + (P_f^{-1})'P_f : M \in \mathfrak{g}_{\bar{F}}\} \cap M_n(F).$$

证明. 我们将证明映射 $\delta : A_f \rightarrow A_f$ 扩展了由 $\delta(P_f^{-1}V) = N(P_f^{-1}V)$ 给出的 F 的导数, 其中 $N \in M_n(F)$ 是 A_f 的一个导数当且仅当 $N \in \{P_f^{-1}MP_f + (P_f^{-1})'P_f : M \in \mathfrak{g}_{\bar{F}}\} \cap M_n(F)$. 令 $N = P_f^{-1}MP_f + (P_f^{-1})'P_f \in M_n(F)$ 对于某些 $M \in \mathfrak{g}_{\bar{F}}$, 那么 $\delta_M(V) = MV$ 提供了一个 $\bar{F}$ -线性导数的 $A \otimes_C \bar{F}$ 和 $\delta := \delta_0 + \delta_M$ 是一个扩展了 F 的导数的 $A \otimes_C \bar{F}$ 的导数. 我们有,

$$\delta(P_f^{-1}V) = (\delta_0 + \delta_M)(P_f^{-1}V) = (P_f^{-1})'V + P_f^{-1}MV = (P_f^{-1}MP_f + (P_f^{-1})'P_f)(P_f^{-1}V) = N(P_f^{-1}V).$$

由于 A_f 是 $P_f^{-1}V$ 条目的 F -跨度, 并且 $N \in M_n(F)$, δ 限制为 A_f 的导出.

反之, 如果 δ 是 A_f 的导出并扩展了 F 的导出, 则对于某些 $N \in M_n(F)$ 有 $\delta(P_f^{-1}V) = N(P_f^{-1}V)$. C -线性映射

$$b \otimes x \mapsto \delta(b) \otimes x + b \otimes x', \quad b \in A_f, x \in \bar{F},$$

是 $A_f \otimes_F \bar{F}$ 的一个导数, 将 δ 扩展到 $A_f \otimes_F \bar{F}$. 由于 $A_f \otimes_F \bar{F} \cong A \otimes_C \bar{F}$, 我们得到了 $A \otimes_C \bar{F}$ 的导数. 我们将这个导数在 $A \otimes \bar{F}$ 上表示为相同的 δ . 令 $M \in M_n(\bar{F})$ 满足 $\delta(V) = MV$. 然后 $(\delta - \delta_0)(V) = MV$ 是一个 $\bar{F}$ -线性导数 $A \otimes_C \bar{F}$, 因此 $M \in \mathfrak{g}_{\bar{F}}$. 另外,

$$\delta(P_f^{-1}V) = (P_f^{-1})'V + P_f^{-1}MV = ((P_f^{-1})'P_f + P_f^{-1}MP_f)(P_f^{-1}V).$$

因为 $\delta(P_f^{-1}V) = N(P_f^{-1}V)$ 和 $P_f^{-1}V$ 的元素构成了 A_f 在 F 上的基, 我们得到 $N = (P_f^{-1})'P_f + P_f^{-1}MP_f$. $\square$

推论 2.3.1. 设 B 是 A 在 F 上的一种形式, 那么存在一个导数扩展 F 的导数 B .

证明. 我们知道 B 是某种形式的 $B = A_f$ 对于某些 $f \in H^1(\text{Gal}(\bar{F}/F), G(\bar{F}))$. 由于集合 $\{(P_f^{-1})'P_f + P_f^{-1}MP_f : M \in \mathfrak{g}_{\bar{F}}\} \cap M_n(F)$ 非空 [JL07, Section 5], 结果从命题 (2.3) 得出. $\square$

令 $f \in H^1(\text{Gal}(\bar{F}/F), G(\bar{F}))$ 和 Y_f 是与 f 对应的 G_F -扭子。回忆集合导数 $\{\delta : (Y_f, \delta) \text{ 是一个微分 } G_F\text{-扭子}\}$ 被集合 $[P_f^{-1}\mathfrak{g}_{\bar{F}}P_f + (P_f^{-1})'P_f] \cap M_n(F)$ 特征化。结合命题 (2.3)，我们将有以下双射。

推论 2.3.2. 设 $f \in H^1(\text{Gal}(\bar{F}/F), G(\bar{F}))$, A_f 是相应的形式, Y_f 是相应的 G_F -扭子, 则所有扩展 F 的导数的集合与集合 $\{\delta : (Y_f, \delta) \text{ 建立一一对应关系, } A_f \text{ 是一个微分 } G_F\text{-扭子}\}$ 。

References

- [Ami82] SA Amitsur. Extension of derivations to central simple algebras. *Communications in Algebra*, 10(8):797–803, 1982.
- [BHHW18] Annette Bachmayr, David Harbater, Julia Hartmann, and Michael Wibmer. Differential embedding problems over complex function fields. *Documenta Mathematica*, 23:241–291, 2018.
- [JL07] Lourdes Juan and Arne Ledet. Equivariant vector fields on non-trivial son-torsors and differential galois theory. *Journal of Algebra*, 316(2):735–745, 2007.
- [Mag94] Andy R Magid. *Lectures on differential Galois theory*, volume 7. American Mathematical Society Providence, RI, 1994.
- [Ser79] Jean-Pierre Serre. *Galois cohomology*. Springer, 1979.
- [TW24] Man Cheung Tsui and Yidi Wang. Cohomology for picard-vessiot theory. *Journal of Algebra*, 658:49–72, 2024.
- [Wat12] William C Waterhouse. *Introduction to affine group schemes*, volume 66. Springer Science & Business Media, 2012.