

反铁磁性和自旋激发在一个二维非厄米特 Hatano-Nelson 通量模型中

Eduard Naichuk,^{1,2} Ilya M. Eremin,³ Jeroen van den Brink,^{1,4} and Flavio S. Nogueira¹

¹*Institute for Theoretical Solid State Physics, IFW Dresden, Helmholtzstr. 20, 01069 Dresden, Germany*

²*Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, 03143 Kyiv, Ukraine*

³*Theoretische Physik III, Ruhr-Universität Bochum, D-44801 Bochum, Germany*

⁴*Institute for Theoretical Physics and Würzburg-Dresden Cluster of Excellence ct.qmat, TU Dresden, 01069 Dresden, Germany*

(10Dated: 2025 年 4 月 11 日)

一维的 Hatano-Nelson 模型具有非互易跃迁，是一个相对简单的非厄米量子力学系统的显著示例，它允许在开放量子系统中研究各种现象而不添加额外的增益和损耗项。在这里，我们建议将其用作构建块来构造二维的相关非厄米哈密顿量。它具有通量模型的特点形式，在每个 plaquette 上具有顺时针-逆时针非互易跃迁。通过添加局域 Hubbard 类型的相互作用，我们分析了长程反铁磁序的形成及其自旋激发。这样的模型是非厄米的，但 \mathcal{PT} 对称的，这导致存在两个区域：一个未打破 \mathcal{PT} 对称性的区域（实值谱）和一个打破了 \mathcal{PT} 对称性的区域，该区域具有例外线和复数能量谱。从一个区域过渡到另一个区域由局域相互作用参数的值控制，并且与金属-绝缘体转变相吻合。我们还分析了自旋波频谱，它对应于增益和损耗具有两种扩散 d 波类型的模式。

I. 介绍

近年来，研究开放量子力学系统演化的最流行途径之一是通过有效非厄米哈密顿量来描述它，这打破了么正性 [1]。这些研究活动的起源在于有关奇偶时间 (\mathcal{PT}) 对称哈密顿量的工作，该工作在厄米父代哈密顿量中添加了平衡耗散（损失）和增益能量项 [2, 3]。 \mathcal{PT} 对称性允许构建进一步的非厄米哈密顿量，对于某些参数空间，这些哈密顿量给出实数特征值，并且从纯实到复数（耗散）能量谱之间的过渡由例外点 [4, 5] 分离。近年来，非厄米系统的领域由于在光学、声学、超冷原子气体和超导量子比特等物理学各个领域的理论预测和实验发现而迅速发展 [1, 6, 7]。特别是，由于实现的可能性不同，例如使用超冷原子 [8–10]，非厄米哈密顿量最近变得相当有前景。非厄米系统的特征物理现象，如例外点的形成、围绕它们的手性传输以及非厄米皮肤效应通常在一个粒子哈密顿量形式主义内得到理解，并且目前的兴趣转向了多体系统，在这些系统中相互作用与非厄米性的交互起到了核心作用。

非厄米性的一个显著例子出现在著名的 Hatano-Nelson (HN) 模型 [11–13] 中，该模型由一个具有不对称（非互易）跃迁的一维 (1D) 晶格组成，这些跃迁导致所有体态在边缘处局域化，从而引发所谓的拓扑非厄米皮肤效应。跃迁的非互易性可以视为源自圆柱几何中的横向伪磁场 [11]。到目前为止，已经研究了该模型在存在相互作用 [14]、无序 [15, 16] 情况下的行为，以及

将其扩展到二维晶格的情况 [17, 18]。受 HN 模型的启发，我们提出了一种在二维空间中实现非厄米性的方法，该方法与厄米磁通 $t-\varphi$ 模型有一定的相似性，在此模型中， φ 是一种交错磁通 [19]。通常情况下，通过考虑跳跃矩阵元具有形式 $t_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} = |t_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2}| e^{i\phi_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2}}$ 来构建通量相位。对于厄米系统，我们需要满足 $\phi_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} = -\phi_{\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1}$ 的条件。如果后者不成立，则我们实现类似于 HN 模型的非互易跳跃。我们的构造从一个一维的 HN 模型开始，该模型有四个站点和周期性边界条件，并且具有最大程度不对称的跳跃，即仅在一个方向上发生跳跃，请参见图 1。这样一个简单的一维模型作为构建块用于二维非厄米系统中，其中每个小格代表了刚刚描述的最大程度不对称 HN 模型。该过程示意性地展示在图 1 中。通过以顺时针和逆时针的方式组合这些方块，我们得到了类似通量模型的非厄米版本。请注意，厄米 $t-\varphi$ 通量模型包含对磁场的规范不变耦合，这可能导致一系列电流产生反铁磁 (AF) 通量晶格 [19]，而我们的模型则以不对称跃迁为特征，并不包括与实际磁场的规范不变耦合。同样值得注意的是，图 1 所示的电流模式类似于冰模型，更具体地说，表现为二维顶点模型，在该图中可以识别为所谓的 F 模型 [20]。在此背景下还值得一提的是与 XXZ 海森堡链 [21] 相关联的顶点模型，它也采用非厄米形式。

将 HN 模型推广到二维形式的类似通量模型之后，考虑通过添加原位库仑排斥来研究系统中相互作用的

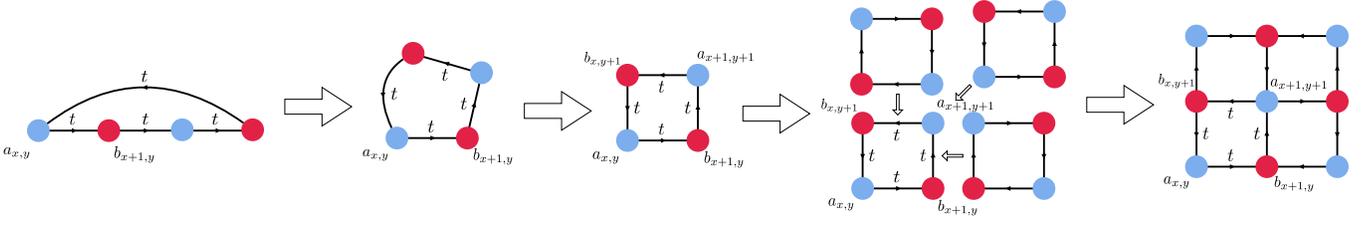


图 1. 使用具有周期性边界条件的完全不对称一维 Hatano-Nelson 模型通过构建包含四个站点的面元来创建 HN 模型的二维版本的示意图。

影响是很诱人的。已知在半填充状态下，系统倾向于反铁磁 Mott 绝缘相，然后随着有限掺杂而演化为金属自旋密度波 (SDW) 状态。在这里，我们分析了所提出的非厄米模型中的长程 AF 态的形成及其纵向和横向自旋激发，通过计算相应的动态自旋磁化率来实现。论文结构如下。在第 II 节中，我们定义了我们的哈密顿量，并使用 Hubbard-Stratonovich 变换研究了不同相互作用区域的谱行为。在第 III 节中，我们计算了横向和纵向分量的动力自旋磁化率，并分析了系统是否存在自旋波。发现自旋波能量谱是纯扩散的 d -波模式，代表增益和损耗。在第 IV 节中，我们总结了主要结果并讨论了进一步研究的前景。

II. 模型

所提出的二维 HN 模型的推广形式为通量模型，其哈密顿量如下：

$$H = -t \sum_{\langle r, r' \rangle, \sigma} a_{r, \sigma}^\dagger b_{r', \sigma} - \mu \sum_{r, \sigma} f_{r, \sigma}^\dagger f_{r, \sigma} + U \sum_r \left(f_{r, \uparrow}^\dagger f_{r, \uparrow} - \frac{1}{2} \right) \left(f_{r, \downarrow}^\dagger f_{r, \downarrow} - \frac{1}{2} \right), \quad (1)$$

其中，

$$f_{r, \sigma} = \begin{cases} a_{r, \sigma}, & \mathbf{r} \in A \\ b_{r, \sigma}, & \mathbf{r} \in B \end{cases}. \quad (2)$$

该模型由三个参数描述，即跃迁积分 t 、化学势 μ 和 onsite Hubbard 排斥 U 。运算符 $a_{r, \sigma}^\dagger$ 和 $b_{r, \sigma}$ 分别是自旋为 $\sigma = \uparrow, \downarrow$ 且格点指标为 \mathbf{r} 的费米子在子晶格 A 和 B 上的产生和湮灭算符，跃迁过程如图 1 所示。尽管哈密顿量方程 (1) 是非厄米特的，它是 \mathcal{PT} 对称的。在一个格点上， \mathcal{P} 和 \mathcal{T} 的操作如下，

$$\mathcal{P} f_{r, \sigma} \mathcal{P} = f_{N+\mathbf{n}-r, \sigma}, \quad \mathcal{T} i \mathcal{T} = -i, \quad (3)$$

其中 $\mathbf{N} = (N, N)$ ， N 是格点的数量且 $\mathbf{n} = (1, 1)$ 。

首先研究非相互作用模型的性质是有指导意义的，其中 $U = 0$ 。获得能量谱最简单的方法是考虑图 1 中晶格中出现的两种类型的顶点。双分量晶格由图 2 中所示的蓝色和红色顶点生成。因此，图像上 \mathcal{PT} 对称性通过交换两个顶点 (\mathcal{P}) 和反转箭头的方向 (\mathcal{T}) 实现。两种类型的顶点由算子表示，

$$V_{r, \sigma}^A = a_{r, \sigma}^\dagger (b_{r+\hat{y}, \sigma} + b_{r-\hat{y}, \sigma}) + (b_{r+\hat{x}, \sigma}^\dagger + b_{r-\hat{x}, \sigma}^\dagger) a_{r, \sigma}, \quad (4)$$

$$V_{r, \sigma}^B = b_{r, \sigma}^\dagger (a_{r+\hat{x}, \sigma} + a_{r-\hat{x}, \sigma}) + (a_{r+\hat{y}, \sigma}^\dagger + a_{r-\hat{y}, \sigma}^\dagger) b_{r, \sigma}. \quad (5)$$

因此，很容易看出，

$$H_{U=0} = -\frac{t}{2} \sum_{r, \sigma} (V_{r, \sigma}^A + V_{r, \sigma}^B) - \mu \left(\sum_{r \in A, \sigma} a_{r, \sigma}^\dagger a_{r, \sigma} + \sum_{r \in B, \sigma} b_{r, \sigma}^\dagger b_{r, \sigma} \right), \quad (6)$$

从而能量色散由 $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}^\pm = -\mu \pm \varepsilon_{\mathbf{k}}$ 给出，其中

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = t \sqrt{\cos k_x \cos k_y}. \quad (7)$$

对于 $\mu = 0$ (半填充) 能量谱分裂成实部和虚部，由条件 $\cos k_x \cos k_y = 0$ 决定的例外线分开。特别地，在子晶格布里渊区内 (sBZ)，谱在不同的区间 $k_x \in (-\pi/2, \pi/2)$ 和 $k_y \in (-\pi/2, \pi/2)$ 中是实数，并且能量的实部和虚部之间没有间隙。值得注意的是，这里的例外线与费米面重合，如图 3 的 (a) 和 (b) 所示。对于有限的 $\mu \leq t$ ，只有一个能带穿过费米水平，这由 $\mu = \text{Re } \varepsilon_{\mathbf{k}}$ 决定，并且它不与例外线重合。对于 $\mu > t$ ，系统是一个带绝缘体。

以下，我们考虑半填充的最有趣情况， $\mu = 0$ ，并研究长程 (π, π) 反铁磁序的可能形成，该形成由 Hubbard onsite 排斥介导。由于模型的亚格子结构，波矢

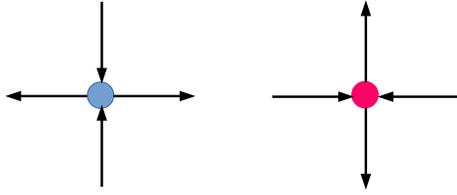


图 2. 在二维晶格构造中出现的两种类型的顶点。箭头的方向表示入射和出射费米子。从这一点来看，无法直接连接同一类型的顶点。

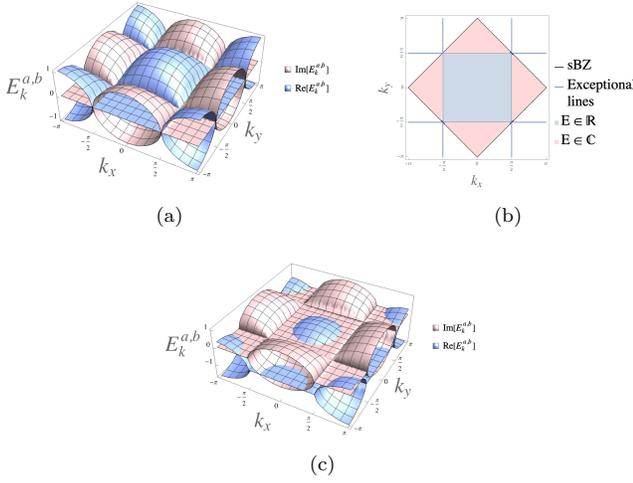


图 3. 非相互作用二维 HN 通量模型在第一布里渊区的计算能量色散，对于 $\mu = 0$ (a), $\mu = 0.7t$ (c)。面板 (b) 显示费米面 $\mu = 0$ ，它们也是异常线 $\cos k_x \cos k_y = 0$ 。

$\mathbf{Q}_{\text{AF}} = (\pi, \pi)$ 是一个互反矢量，即 $\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}_{\text{AF}}} = \varepsilon_{\mathbf{k}}$ 。经过 Hubbard-Stratonovich 变换后，公式 (1) 写为

$$H_{\text{MF}} = -t \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle, \sigma} a_{\mathbf{r}, \sigma}^\dagger b_{\mathbf{r}', \sigma} - \mu \sum_{\mathbf{r}, \sigma} f_{\mathbf{r}, \sigma}^\dagger f_{\mathbf{r}, \sigma} + \frac{U}{2} \sum_{\mathbf{r}} m_{\mathbf{r}}^2 - U \sum_{\mathbf{r}} m_{\mathbf{r}} \left(f_{\mathbf{r}, \uparrow}^\dagger f_{\mathbf{r}, \uparrow} - f_{\mathbf{r}, \downarrow}^\dagger f_{\mathbf{r}, \downarrow} \right), \quad (8)$$

其中 $m_{\mathbf{r}}$ 是辅助场。在平均场水平上，我们定义

$$m_{\mathbf{r}} = \begin{cases} m, & \mathbf{r} \in A \\ -m, & \mathbf{r} \in B \end{cases} \quad (9)$$

来描述反铁磁亚晶格磁化。进行傅里叶变换后，平均场哈密顿量 (8) 被对角化以揭示能量谱，

$$E_{\mathbf{k}}^\pm = -\mu \pm \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + W^2}. \quad (10)$$

其中 $W = U|m|$ 和 $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ 如上在方程 (7) 中所定义。

对于 $W < t$ 系统是一个 AF 金属，其能量为复数和实数值取决于动量的值，见图 4-(a,b)。费米面再次与分离实数和复数值能量的例外线重合。对于 $W \geq t$ ，系统从一个 AF 半金属（在 $W = t$ 处，狄拉克点位于 $(\pm\pi, 0)$ 和 $(0, \pm\pi)$ ）转变为一个绝缘体，在 $W > t$ 具有实值能量图 4-(c)，其中整个 BZ 中的 \mathcal{PT} 对称性得以恢复。

有趣的是，变量变化， $k_x = k'_x + k'_y$ 和 $k_y = k'_x - k'_y$ ，将能量色散 (10) 转换为，

$$E_{\mathbf{k}'}^\pm = -\mu \pm t \sqrt{\cos^2 k'_x + \cos^2 k'_y + \frac{W^2}{t^2} - 1}, \quad (11)$$

因此对于 $W = t$ ，上述表达式与方形晶格 [22, 23] 的 π -通量相位的谱一致。此外，对于 $W = t$ ，能量谱 $E_{\mathbf{k}}^\pm$ 在 sBZ 区域四个角落的点 $(\pm\pi, 0)$ 、 $(0, \pm\pi)$ 附近是线性的 $E_{\mathbf{p}}^\pm = -\mu \pm v_F |\mathbf{p}|$ ，其中向量 $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ 是从这四点开始计算的，费米速度等于 $v_F = t/\sqrt{2}$ 。

尽管在 $W = t$ 情况下谱是无隙的，但还有另一种方式可以生成间隙。类似于石墨烯 [24, 25]，我们可以假设二维系统实际上是嵌入三维空间中的，并考虑到长程库仑相互作用，其势为 $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = e^2/(\varepsilon|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ 。在这种情况下，动态地生成了间隙。这可以通过截断带有库仑相互作用作为顶点的施温格-杜森方程得出，从而导致自洽方程，

$$\Sigma(\mathbf{q}) = \frac{\alpha}{4\pi} \int d^2k \frac{\Sigma(\mathbf{k})}{\sqrt{k^2 + \Sigma^2(\mathbf{k})} |\mathbf{k} + \mathbf{q}|}, \quad (12)$$

其中 $\alpha = e^2/(\varepsilon v_F)$ 是系统的“精细结构常数”，而 $\Sigma(\mathbf{k})$ 是自能。经过一些简化，我们可以找到方程 (12) 的如下近似解

$$\Sigma(0) = c\Lambda \exp\left[-\frac{\text{const}}{\sqrt{2\alpha - 1}}\right], \quad (13)$$

其中 c 是一个常数， Λ 是紫外截止值。从这一点可以看出，常数 α 有一个临界值 $\alpha_c = 1/2$ ，在这个临界值之上能量谱出现了一个间隙。

III. 动态自旋磁化率

为了研究长程 (π, π) AF 序的稳定性以及 AF 态的性质，我们继续通过分析磁有序态的纵向和横向（自

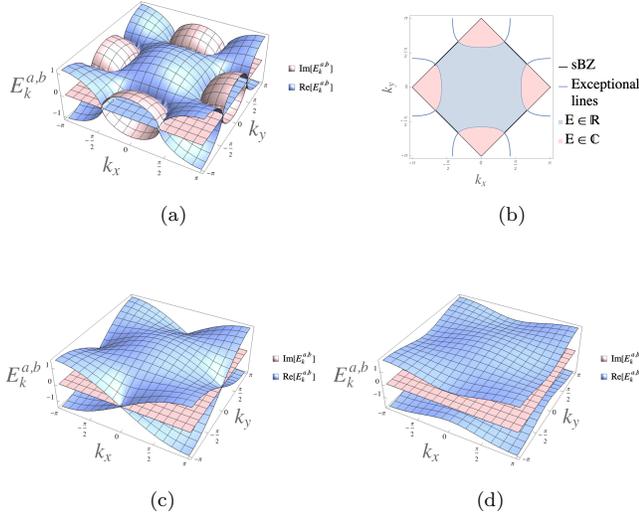


图 4. 计算的 AF 金属在 $W = 0.5t$ 处的能谱 $\mu = 0$ (a), AF 半金属在 $W = t$ 处 (c) 和 AF 绝缘体在 $W = 1.5t$ 处 (d)。图 (b) 显示了 $W = 0.5t$ 的费米面 (例外线)。

旋波) 涨落来进行进一步的研究。横向 $+-$ 和纵向 zz 分量的基本动态自旋可压缩性由下式给出

$$\chi_0^{lm}(\mathbf{q}, \mathbf{q}', \Omega) = \int dt e^{i\Omega t} \langle T_t S_{\mathbf{q}}^l(t) S_{-\mathbf{q}'}^m(0) \rangle, \quad (14)$$

其中 $lm = +- , zz$, $S^\pm = S^x \pm iS^y$ 对应于通常的自旋梯子算符。

由于我们的非厄米模型从一开始就包含两个子晶格, 所以在 AF 态中不会出现额外的回折项。因此, 在随机相位近似 (RPA) 内, 磁化率的各分量可以表示为,

$$\chi_{\text{RPA}}^{lm}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \Omega) = \frac{\chi_0^{lm}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \Omega)}{1 - U \chi_0^{lm}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \Omega)}, \quad (15)$$

其中裸分量被找到为

$$\begin{aligned} \chi_0^{+-}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \Omega) &= \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}, c} ' \left(1 - \frac{W^2 - t^2/2(\cos k_x \cos(k_y + q_y) + \cos(k_x + q_x) \cos k_y)}{\sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + W^2} \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^2 + W^2}} \right) \frac{f(E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^c) - f(E_{\mathbf{k}}^c)}{\Omega + i0^+ - E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^c + E_{\mathbf{k}}^c} \\ &+ \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}, c \neq c'} ' \left(1 + \frac{W^2 - t^2/2(\cos k_x \cos(k_y + q_y) + \cos(k_x + q_x) \cos k_y)}{\sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + W^2} \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^2 + W^2}} \right) \frac{f(E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{c'}) - f(E_{\mathbf{k}}^c)}{\Omega + i0^+ - E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{c'} + E_{\mathbf{k}}^c} \end{aligned} \quad (16)$$

和

$$\begin{aligned} \chi_0^{zz}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \Omega) &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, c} ' \left(1 + \frac{W^2 + t^2/2(\cos k_x \cos(k_y + q_y) + \cos(k_x + q_x) \cos k_y)}{\sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + W^2} \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^2 + W^2}} \right) \frac{f(E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^c) - f(E_{\mathbf{k}}^c)}{\Omega + i0^+ - E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^c + E_{\mathbf{k}}^c} \\ &+ \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, c \neq c'} ' \left(1 - \frac{W^2 + t^2/2(\cos k_x \cos(k_y + q_y) + \cos(k_x + q_x) \cos k_y)}{\sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + W^2} \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^2 + W^2}} \right) \frac{f(E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{c'}) - f(E_{\mathbf{k}}^c)}{\Omega + i0^+ - E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{c'} + E_{\mathbf{k}}^c} \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $c = \pm$ 是能带指标, $f(\varepsilon)$ 是费米-狄拉克分布, 撇号指的是对 (减小的) sBZ 的求和。

就像在厄米单带 Hubbard 模型 [26] 中一样, 自旋旋转不变性被破坏了, $\chi_{\text{RPA}}^{zz} \neq 2\chi_{\text{RPA}}^{+-}$ 。而在排序波矢量处的 χ_{RPA}^{zz} 有能隙, 一直到反铁磁间隙能量的两倍, χ_{RPA}^{+-} 决定了自旋波的谱。特别是对于 $\Omega = 0$ 和 $\mathbf{q} = \mathbf{Q}_{\text{AF}} = (\pi, \pi)$, 横向分量的 RPA 表达式有一个极点

$$1 - U \chi_0^{+-}(\mathbf{Q}_{\text{AF}}, \mathbf{Q}_{\text{AF}}, 0) = 0, \quad (18)$$

这对应于无能隙的戈德斯通模式, 并等同于确定平均

场反铁磁序的平均场方程。

$$\frac{1}{U} = -\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} ' \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + W^2}} [f(E_{\mathbf{k}}^+) - f(E_{\mathbf{k}}^-)]. \quad (19)$$

方程 (19) 的解自洽地确定了给定的 U 下的参数 W , 并且它是温度的函数。此外, 注意方程 (19) 仅对 $W > t$ 的实值能量谱定义良好, 即对于反铁磁绝缘体和反铁磁半金属。

以下我们继续处理 \mathcal{PT} -对称性的情况。在图 5 中, 我们展示了沿布里渊区高对称点的 RPA 自旋磁化率

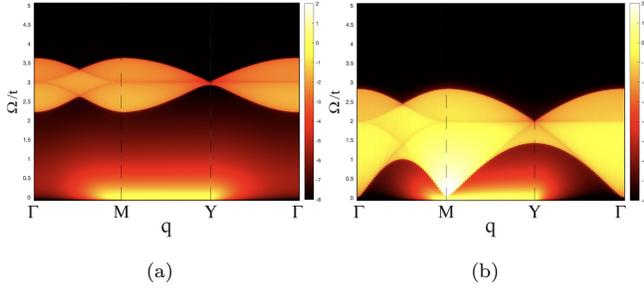


图 5. 计算沿 BZ 的对称路径 $(0,0) \rightarrow (\pi,\pi) \rightarrow (0,\pi) \rightarrow (0,0)$ 的 RPA 自旋激发谱的横向分量, 对于 (a) 反铁绝缘体 $W = 1.5t, \mu = 0, U = 1.47028t$ 以及 (b) 反铁半导体 $W = 1.001t, \mu = 0, U = 0.79545t$. 这里, 我们对给定的 W 自洽地计算了 U . $\text{Im}\chi_{\text{RPA}}^{+-}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \Omega)$ 在对数尺度上的强度。

虚部, 分别使用了 AF 绝缘体 (a) $W = 1.5t$ 和 AF

$$c_2 = \frac{1}{128V} \sum_{\mathbf{k}}' \frac{1}{(\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + W^2)^{9/2}} [t^4 \sin^2 k_x \sin^2 k_y (48W^4 - 64W^2 \varepsilon_{\mathbf{k}}^2 - 7\varepsilon_{\mathbf{k}}^4) - 6t^4 (\cos^2 k_x \sin^2 k_y + \sin^2 k_x \cos^2 k_y) (6W^4 + 7W^2 \varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + \varepsilon_{\mathbf{k}}^4) - 4\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 (4W^6 + 9W^4 \varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + 6W^2 \varepsilon_{\mathbf{k}}^4 + \varepsilon_{\mathbf{k}}^6)], \quad (22)$$

以及 $\delta\mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{Q}_{\text{AF}}$. 方程 (20) 在点 $\Omega(\mathbf{q}) = \pm i\sqrt{c_2/c_1}\delta q_x \delta q_y$ 处有极点, 这些极点是纯虚数的, 与特征实频谱线性的普通反铁磁激发形式形成对比。另一方面, 形式为 $\Omega(q) = \pm c_s |\mathbf{q}| - iDq^2$ 且 $c_s, D > 0$ 的虚色散关系描述了包括来自热扩散 [27] 的耗散的 AF 自旋波。在我们的情况下, 实部消失, 负号对应于纯扩散模式的 d -波类型。然而, 正号导致相反的阻尼效应, 因此两个符号一起可以解释为与增益和损耗相关联, 在非厄米系统的行为中固有存在。通常情况下, 普通类型的扩散模式自然出现在顺磁状态 [27] 中。未覆盖的收益和损失过程仅在 W 值的小区间内是有限的, 并且随着 W 的增加迅速接近零。此外, 系数 c_1 和 c_2 仅在未破坏的 \mathcal{PT} 对称性区域中明确定义 ($W > t$)。这意味着在这种情况下, 收益和损失机制即使在 \mathcal{PT} 对称性未被破坏的区域内也会发生。

自旋波在半金属的情况下也几乎保持平坦, 并不干扰粒子-空穴连续体, 在这种情况下, 该连续体也是无能隙的。我们得出结论, 由于近乎平坦的自旋波激发谱, 长程 (π, π) 反铁磁序受到高度挫败。请注意, 系

半金属 (b) $W = t$. 情况类似于厄米特情形, 集体自旋激发是 \mathcal{PT} -对称的。人们立刻可以看到, 集体模式 (自旋波) 是无耗散、无能隙的, 并且与围绕 $3t$ 为中心的粒子-空穴连续谱能带明显分离。此外, 沿 M-X 以及 M-Y 方向, 自旋波几乎是平坦的, 这表明了潜在的不稳定性的存在, 即 (π, π) 平均场 AF 阶对波动而言是不稳定的。为了进行分析, 我们将方程 (15) 的分母在 $\mathbf{q} = \mathbf{Q}_{\text{AF}}, \Omega = 0$ 处展开至二次项

$$\chi_{\text{RPA}}^{+-}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \Omega) \cong -\frac{\chi_0^{+-}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \Omega)}{c_1 \Omega^2 + c_2 (\delta q_x)^2 (\delta q_y)^2}, \quad (20)$$

其中

$$c_1 = \frac{1}{4V} \sum_{\mathbf{k}}' \frac{1}{(\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + W^2)^{3/2}}, \quad (21)$$

统向条纹型序 $(\pi, 0)$ (或 $(0, \pi)$) 潜在不稳定的迹象可以从紧束缚色散在 $\mathbf{Q}_X = (\pi, 0), \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}_X} = i\varepsilon_{\mathbf{k}}$ 处的性质看出, 这可以被认为是非厄米配对。

IV. 结论

为了总结, 我们制定了非厄米通量模型, 在该模型中, 平方晶格上的每个小方块都包含一个带自旋且最大程度不对称的 Hatano-Nelson 模型。因此, 该模型的特点是在平方晶格内的小方块上具有顺时针和逆时针方向不同的跳跃率, 并类似于在 $U(1)$ 自旋液体相中的反铁磁 $SU(N)$ 海森堡模型的大 N 极限 [22] 中讨论的通量相。在半填充状态下, 非相互作用模型描述了一种由费米面表征的金属, 其中异常线同时分隔了能谱的实际和复数值分支。引入原位库仑排斥后, 我们分析了在半填充条件下具有 (π, π) 排序波矢量的长程反铁磁相的形成。我们发现对于反铁磁绝缘体和半金属, 反铁磁有序恢复了 \mathcal{PT} 对称性, 并且能谱为实数值。横向自旋激发 (自旋波) 在布里渊区的 M -

Y 和 $M - X$ 方向上是无能隙且几乎平坦的，表明可能存在从 (π, π) 反铁磁有序向 $(\pi, 0)$ 或 $(0, \pi)$ 态的挫败。这种不稳定性被证明与 d 波类型的扩散模式的出现有关。然而，在这种情况下，扩散不仅包括耗散贡献（损失），还包括增强模式（增益），这是模型非厄米性的结果。此外，这种行为发生在未破坏 \mathcal{PT} 对称性的区域中。通常，非厄米 \mathcal{PT} 对称系统的非常规行为总是与破坏了 \mathcal{PT} 对称性的区域相关联。这里我们处理的是一个全新的情况，在未打破的 \mathcal{PT} 对称性区域内，增益和损失现象仍然存在，这从动态磁化率的行为中可以得到证实。这表明即使在未被打破的 \mathcal{PT} 对称性区域内，

也可以预期与系统与环境相互作用相关的现象。

从实验的角度来看，我们可以期望，在未破缺的 \mathcal{PT} 对称性区域内，类似于我们的系统中也会出现耗散行为。

ACKNOWLEDGMENTS

我们感谢德国研究基金会 (DFG, Deutsche Forschungsgemeinschaft) 通过 SFB 1143 项目 A5 和维尔茨堡-德累斯顿量子物质中的复杂性和拓扑学卓越集群 (ct.qmat, EXC 2147, 项目编号 390858490) 提供的资金支持。

-
- [1] Y. Ashida, Z. Gong, and M. Ueda, Non-hermitian physics, *Advances in Physics* **69**, 249 (2020), <https://doi.org/10.1080/00018732.2021.1876991>.
- [2] C. M. Bender and S. Boettcher, Real spectra in non-hermitian hamiltonians having \mathcal{PT} symmetry, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5243 (1998).
- [3] C. M. Bender, Introduction to \mathcal{PT} -symmetric quantum theory, *Contemporary Physics* **46**, 277 (2005), <https://doi.org/10.1080/00107500072632>.
- [4] R. El-Ganainy, K. G. Makris, M. Khajavikhan, Z. H. Musslimani, S. Rotter, and D. N. Christodoulides, Non-hermitian physics and pt symmetry, *Nature Physics* **14**, 11 – 19 (2018).
- [5] K. Kawabata, K. Shiozaki, M. Ueda, and M. Sato, Symmetry and topology in non-hermitian physics, *Physical Review X* **9**, 10.1103/physrevx.9.041015 (2019).
- [6] K. Ding, C. Fang, and G. Ma, Non-hermitian topology and exceptional-point geometries, *Nature Reviews Physics* **4**, 745 – 760 (2022).
- [7] N. Okuma and M. Sato, Non-hermitian topological phenomena: A review, *Annual Review of Condensed Matter Physics* **14**, 83 – 107 (2023).
- [8] A. Stegmaier, S. Imhof, T. Helbig, T. Hofmann, C. H. Lee, M. Kremer, A. Fritzsche, T. Feichtner, S. Klemmt, S. Höfling, I. Boettcher, I. C. Fulga, L. Ma, O. G. Schmidt, M. Greiter, T. Kiessling, A. Szameit, and R. Thomale, Topological defect engineering and \mathcal{PT} symmetry in non-hermitian electrical circuits, *Phys. Rev. Lett.* **126**, 215302 (2021).
- [9] A. Wang, Z. Meng, and C. Q. Chen, Non-hermitian topology in static mechanical metamaterials, *Science Advances* **9**, eadf7299 (2023), <https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/sciadv.adf7299>.
- [10] Q. Liang, D. Xie, Z. Dong, H. Li, H. Li, B. Gadway, W. Yi, and B. Yan, Dynamic signatures of non-hermitian skin effect and topology in ultracold atoms, *Phys. Rev. Lett.* **129**, 070401 (2022).
- [11] N. Hatano and D. R. Nelson, Localization transitions in non-hermitian quantum mechanics, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 570 (1996).
- [12] N. Hatano and D. R. Nelson, Vortex pinning and non-hermitian quantum mechanics, *Phys. Rev. B* **56**, 8651 (1997).
- [13] N. Hatano and D. R. Nelson, Non-hermitian delocalization and eigenfunctions, *Phys. Rev. B* **58**, 8384 (1998).
- [14] S.-B. Zhang, M. M. Denner, T. Bzdušek, M. A. Sentef, and T. Neupert, Symmetry breaking and spectral structure of the interacting hatano-nelson model, *Physical Review B* **106**, 10.1103/physrevb.106.1121102 (2022).
- [15] T. Orito and K.-I. Imura, Entanglement dynamics in the many-body hatano-nelson model, *Physical Review B* **108**, 10.1103/physrevb.108.214308 (2023).
- [16] J. Mák, M. J. Bhaseen, and A. Pal, Statics and dynamics of non-hermitian many-body localization, *Communications Physics* **7**, 10.1038/s42005-024-01576-y (2024).
- [17] E. Edvardsson and E. Ardonne, Sensitivity of non-hermitian systems, *Physical Review B* **106**, 10.1103/physrevb.106.115107 (2022).
- [18] C. Hou, G. Wu, L. Li, A. Basit, Y. Wei, S. Chen, P. Grelu, and Z. Ni, Non-hermitian skin effects in two- and three-dimensional intertwined tight-binding lattices, *Physical Review B* **109**, 10.1103/physrevb.109.205135

- (2024).
- [19] A. B. Harris, T. C. Lubensky, and E. J. Mele, Flux phases in two-dimensional tight-binding models, *Phys. Rev. B* **40**, 2631 (1989).
- [20] R. J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics* (Elsevier, 2016).
- [21] B. M. McCoy and T. T. Wu, Hydrogen-bonded crystals and the anisotropic heisenberg chain, *Il Nuovo Cimento B (1965-1970)* **56**, 311 (1968).
- [22] I. Affleck and J. B. Marston, Large-n limit of the heisenberg-hubbard model: Implications for high- T_c superconductors, *Phys. Rev. B* **37**, 3774 (1988).
- [23] E. H. Lieb, Flux phase of the half-filled band, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2158 (1994).
- [24] D. V. Khveshchenko, Ghost excitonic insulator transition in layered graphite, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 246802 (2001).
- [25] E. V. Gorbar, V. P. Gusynin, V. A. Miransky, and I. A. Shovkovy, Magnetic field driven metal-insulator phase transition in planar systems, *Phys. Rev. B* **66**, 045108 (2002).
- [26] A. V. Chubukov and D. M. Frenkel, Renormalized perturbation theory of magnetic instabilities in the two-dimensional hubbard model at small doping, *Phys. Rev. B* **46**, 11884 (1992).
- [27] B. I. Halperin and P. C. Hohenberg, Hydrodynamic theory of spin waves, *Phys. Rev.* **188**, 898 (1969).