

奇异摄动系统使用稳定多速率显式格式的高效仿真

Yibo Shi and Cristian R. Rojas

Abstract— 奇异摄动系统 (SPSs) 在工程应用中很普遍, 由于多时间尺度引起的刚性问题, 数值求解其初值问题 (IVPs) 具有挑战性。经典显式方法需要不切实际的小步长以保持稳定性, 而为 SPSs 开发的隐式方法计算量大且对强非线性系统效率较低。本文介绍了一种稳定多速率显式方案 (SMES), 它在无需小时间步或隐式公式的情况下稳定了经典显式方法。通过采用具有可变时间步长的多速率方法, SMES 允许快速动力学迅速收敛到其平衡流形, 同时慢速动力学以更大的步长演化。分析表明, SMES 实现了数值稳定性, 并且显著减少了计算工作量和控制误差。其有效性通过一个数值示例来说明。

I. 介绍

奇摄动系统 (SPSs) 广泛存在于各种工程领域, 包括电气和机器人系统、化学反应以及生物过程 [1], [2]。这些系统的特征在于由于某些状态变量的导数乘以小参数而导致多时间尺度的存在, 从而导致快速动态和慢速动态之间的分离。不同时间尺度的同时存在使得标准系统分析和控制方法的应用变得复杂, 因为快速动态可以引入数值刚性和快速瞬态 [3], [4]。因此, 需要专门的方法来处理这些小摄动参数所引入的复杂性。

广泛的研究致力于 SPS 的各种方面, 如模型降阶技术、复合控制策略以及简化此类系统分析和控制器设计的渐近方法 [1], [5]。在这些问题中, 数值求解 SPS 的初值问题 (IVPs) 起着至关重要的作用。IVPs 的数值解使得能够探索系统行为、验证理论结果以及开发当解析解难以获得时的控制算法 [6]。

求解 SPS 初值问题的数值方法已被广泛研究。常用的刚性求解器, 如 MATLAB 的常微分方程 15s 和常微分方程 23s, 旨在处理刚性微分方程 [7]。常微分方程 15s 使用 Gear 的方法, 而常微分方程 23s 基于修改过的二阶 Rosenbrock 公式; 两者都是完全隐式方法。这些求解器在模拟 SPS 时通过允许更大的时间步长而不牺牲显著的精度提供了数值稳定性。为了

解决完全隐式方法的计算负担, 针对 SPS 开发了隐显 (IMEX) 方案 [8], [9]。IMEX 方法将系统分解为快速和慢速组件, 对快速动态进行隐式处理而对慢速动态进行显式处理。这种方法利用了隐式方法在处理快动态时的稳定性, 同时保留了显式方法在处理慢动态时的计算效率 [10], [11]。

然而, 上述用于 SPS 的方法完全或部分依赖于隐式数值方法。这是因为由小时间常数引入的快速动态要求在使用比时间常数大得多的时间步长时必须具备数值稳定性 [12]。常见的显式数值方法, 如向前欧拉法和显式的龙格-库塔方法, 通常需要非常小的时间步长来稳定快速动态, 导致计算成本增加和效率降低 [13]。同时, 隐式方法虽然对 SPS 更稳定, 但在每次迭代中涉及求解非线性方程, 这可能计算量大, 并且对于大规模或高度非线性的系统可能会变得低效 [14]。IMEX 方法可以利用显式方法的效率和隐式方法的稳定性; 然而, 它们需要明确区分快速动态和慢速动态, 而这并不总是简单或容易实现的。

当前数值方法在效率、稳定性和简便性方面的局限性凸显了需要专门针对 SPS 的定制技术。具体来说, 需要能够高效模拟这些系统并提供稳定性保证和误差控制的数值方案, 同时不承担隐式方法的计算负担或像 IMEX 方法那样需要时间尺度分离的要求。在这篇论文中, 我们通过提出一种专为 SPS 设计的有效稳定多速率显式方案 (SMES) 来应对这一挑战。

一个重要观察是, 当扰动参数趋近于零时 [13], SPSs 通常可以与微分代数方程 (DAEs) 相关联。在这个极限下, 快速动态有效地变成了代数约束条件, 系统表现出类似于 DAE 的特性。求解 DAE 的数值方法经常采用可变步长或多速率策略来有效处理耦合的微分和代数组件, 而不必使用过小的时间步 [15]。受到这些技术的启发, SMES 采用了具有可变时间步的多速率方法, 稳定了经典的显式数值方法以处理快速动态。这种方法保持了显式方法的简单性和易于实现的特点, 同时提高了计算效率并提供了数值稳定性保证。

This work was partially supported by the Swedish Research Council under contract number 2023-05170. The authors are with the Division of Decision and Control Systems, KTH Royal Institute of Technology. Emails: yibos@kth.se (Y. S.), crro@kth.se (C. R.).

此外，由于 SMES 基于显式方案，因此与隐式方法相比，它更适合处理强非线性系统。

本文的其余部分组织如下：在第 II 节，我们提供了关于 SPS 的相关背景。在第 III 节，我们使用前向欧拉方法展示了经典显式方法在 SPS 上的局限性。在第 IV 节，我们介绍了基于前向欧拉方法的 SMES，并概述了其理论基础和实现细节。在第 V 和 VI 节，我们对所提出的方法进行了稳定性和误差分析。在第 VII 节，我们通过数值示例展示了我们的方法在 SPS 上的有效性。最后，第 VIII 节总结了本文。

符号约定。如果 f 和 g 是在包含 0 邻域的 \mathbb{R}_0^+ 的子集上定义的实值函数，我们写 $f = O(g)$ 表示存在正常数 K 和 δ 使得

$$|f(h)| \leq K|g(h)|, \quad \text{whenever } 0 < h < \delta.$$

如果 $f(h) = O(h^p)$ 我们说“ f 是 h^p 阶的”。

II. 初步的

SPSs 是具有多个时间尺度的动力系统。这些系统通常用状态空间形式 [16] 描述

$$\dot{X} = F(X, u, \varepsilon, t), \quad X(t_0) = X^0, \quad (1)$$

其中 $X \in \mathbb{R}^{n+m}$ 是状态向量， u 是输入向量， F 是一个足够光滑的函数，而 ε 是一个小的奇摄动参数 ($0 < \varepsilon \ll 1$)。对 (1) 的分析通常基于时间尺度分离形式 [1]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, z, u, \varepsilon, t), & x(t_0) &= x^0, \\ \varepsilon \dot{z} &= g(x, z, u, \varepsilon, t), & z(t_0) &= z^0, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $z \in \mathbb{R}^m$ 是分离的慢变量和快变量。本文假设系统在 (1) 或 (2) 中是渐近稳定的。

为了方便起见，我们将主要考虑标准形式中的 SPS。当 $\varepsilon = 0$ 时，(2) 的状态空间维度从 $n + m$ 减少到 n ，因为 z 的微分方程退化为代数方程

$$0 = g(\bar{x}, \bar{z}, \bar{u}, 0, t), \quad (3)$$

其中横杠用于表示变量属于一个带有 $\varepsilon = 0$ 的系统。式 (2) 被认为处于标准形式当且仅当下列关于 (3) 的假设成立：

假设 1. [5] 在一个感兴趣的域中，(3) 有 $k \geq 1$ 个不同的实根

$$\bar{z} = \bar{\varphi}_i(\bar{x}, \bar{u}, t), \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (4)$$

这一假设确保了全系统在每个根对应的 (2) 中有一个明确定义的 n 维简化模型，描述为微分代数方程 (DAE)

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= f(\bar{x}, \bar{z}, \bar{u}, t), & x(t_0) &= x^0, \\ \bar{z} &= \bar{\varphi}_i(\bar{x}, \bar{u}, t). \end{aligned} \quad (5)$$

式 (5) 也被称为 (2) 的准稳态形式，因为 z 中的快动态，其速率 $\dot{z} = g/\varepsilon$ 在 ε 很小时可以变得很大，可能会快速收敛到平衡流形 $\mathcal{M}_0: \bar{z} = \bar{\varphi}_i(\bar{x}, \bar{u}, t)$ 。

通常，简化模型表示在大多数应用中占主导地位的慢（平均）现象 [1]。此外，简化模型不对所使用的数值方法施加严格的稳定性要求。然而，由于准稳态 $[\bar{x}, \bar{z}]$ 不像 (2) 那样可以从 $[x^0, z^0]$ 自由开始，当 $[x^0, z^0] \notin \mathcal{M}_0$ 时，简化模型和全模型的响应之间会出现差异，这导致了快速瞬态。因此，为了准确捕捉全状态的动力学特性，有必要研究应用于全模型的数值方法在 (2) 中的情况。

备注 1. 在本文中，我们考虑更为一般的情况，即系统可能不在标准形式下，或者没有如 (2) 所示的快慢动态明确分离，这种情况并不总是容易确定。尽管如此，为了简化后续分析，我们考虑满足**假设 1**的奇摄动系统的标准形式。

III. 向前欧拉方法

在本节中，我们分析了前向欧拉方法 (FEM) [17] 作为求解 SPSs 的经典显式方法的一个示例，以展示它们的低效性。将经典 FEM 应用于具有步长 Δ 的 IVP(1) 中得到离散时间 (DT) 模型

$$X_{k+1} = X_k + \Delta F(X_k, u_k, \varepsilon), \quad X_0 = X^0. \quad (6)$$

为了说明小参数 ε 对 FEM 数值稳定性的效果，我们考虑以下线性时不变自治模型作为“测试方程” [1]:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{11}x(t) + A_{12}z(t), & x(t_0) &= x^0, \\ \varepsilon \dot{z}(t) &= A_{21}x(t) + A_{22}z(t), & z(t_0) &= z^0, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ， $z(t) \in \mathbb{R}^m$ ，以及时间变量 t 被明确写出以方便后续分析。如果 A_{22} 是非奇异的，则存在一个矩阵 $L(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 满足

$$L(\varepsilon) = A_{22}^{-1}A_{21} + \varepsilon A_{22}^{-2}A_{21}A_0 + O(\varepsilon^2),$$

其中 $A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ 。这个矩阵 $L(\varepsilon)$ 导致变量的变化

$$\eta(t) = z(t) + L(\varepsilon)x(t). \quad (8)$$

系统在 (7) 可以重写为块三角形形式 [5]，以便分离慢速和快速动力学，如下所示：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\eta}(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

与上述相关

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}L(\varepsilon) & A_{12} \\ 0 & \varepsilon^{-1}A_{22} + L(\varepsilon)A_{12} \end{bmatrix}.$$

系统在 (7) 中已被部分解耦为一个涉及 $x(t)$ 的慢子系统和一个涉及 $\eta(t)$ 的快子系统。相应地，矩阵 A 的特征值 λ 可以分为慢子系统的 λ_{slow} 和快子系统的 λ_{fast} ，其中

$$\begin{aligned} \det(\lambda_{\text{slow}}I - A_{11} - A_{12}L(\varepsilon)) &= 0, \\ \det(\lambda_{\text{fast}}I - \varepsilon^{-1}A_{22} + L(\varepsilon)A_{12}) &= 0, \end{aligned}$$

可以观察到 $\lambda_{\text{slow}} = O(1)$ 和 $\lambda_{\text{fast}} = O(1/\varepsilon)$ 。将 FEM 应用于块三角形形式的系统会导致以下 DT 模型：

$$\begin{bmatrix} x(t + \Delta) \\ \eta(t + \Delta) \end{bmatrix} \approx (I + \Delta A) \begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}.$$

为了 FEM 的数值稳定性，必要且充分的是对于 A 的每一个特征值 λ 都有 $|1 + \Delta\lambda| < 1$ 。此外，由于系统是渐近稳定的（即，对于每个 λ 都有 $\text{Re}(\lambda) \leq 0$ ），并且对于每个 λ_{fast} 和 λ_{slow} 都有 $\text{Re}(\lambda_{\text{fast}}) \ll \text{Re}(\lambda_{\text{slow}})$ ，确保稳定性的 Δ 的最大值由特征值 $\hat{\lambda}_{\text{fast}}$ 决定，其中

$$\hat{\lambda}_{\text{fast}} = \arg \min_{\lambda_{\text{fast},i}} \{\text{Re}(\lambda_{\text{fast},i}) : i = 1, 2, \dots, m\}. \quad (10)$$

因此，数值稳定性的充要条件变为 $|1 + \hat{\lambda}_{\text{fast}}\Delta| < 1$ ，从而导致

$$\Delta < -\frac{2}{\hat{\lambda}_{\text{fast}}} = O(\varepsilon). \quad (11)$$

因此，步长 Δ 受到与快速动态相关的时间尺度的限制。这意味着当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时，步长 Δ 必须显著减小。结果需要大量的时间步骤来覆盖所需的时间范围 T ，即 $T/\varepsilon = O(1/\varepsilon)$ 函数评估次数，导致计算成本和仿真时间增加。

IV. 稳定的多速率向前欧拉方法

鉴于经典显式数值方法的局限性，我们引入了一种处理奇异摄动而不需使用过小步长的 SMES，从而

允许使用显式方法进行更快且稳定的 SPS 仿真。在本节中，我们将通过将 FEM 与所提出的方案相结合来说明 SMES 的工作原理，结果得到了一种稳定多速率向前欧拉（SMFE）方法。

代替使用经典有限元方法中的固定步长 Δ ，我们在长度为 Δ 的一步内应用多速率离散化。首先，我们执行 (6) 的 N 次迭代，并使用更小的步长 $\Delta\varepsilon$ （对于给定值 Δ 使得 $\Delta \gg \varepsilon$ ）。然后，我们执行另一轮 (6) 迭代，步长为 $(1 - N\varepsilon)\Delta$ ，其中我们假设 $N \ll 1/\varepsilon$ 。该数值方案的想法是使用短步长迭代使快动态收敛到平衡流形 \mathcal{M}_0 ，然后再采用较大的步长 $(1 - N\varepsilon)\Delta$ 使慢子系统演化。

在使用短步长 $\Delta\varepsilon$ 的仿真过程中，离散化系统如下：

$$X_{k+1} = X_k + \Delta\varepsilon F(X_k, u_k, \varepsilon). \quad (12)$$

在系统按照 (12) 演化了 N 步之后，模拟的系统根据长度为 $(1 - N\varepsilon)\Delta$ 的较大步长进行演变

$$X_{k+N+1} = X_{k+N} + (1 - N\varepsilon)\Delta F(X_{k+N}, u_{k+N}, \varepsilon). \quad (13)$$

请注意，这些 $N + 1$ 步骤所覆盖的总时间间隔是 Δ 。这种 SMFE 方法在算法 1 中进行了描述。

Algorithm 1 稳定的多速率向前欧拉（SMFE）方法用于模拟奇异摄动系统 (1)

Require: $X(0), F, u, \Delta, \varepsilon, N$

```

1: for  $i = 0, 1, \dots$  do
2:   for  $n = 1, \dots, N$  do
3:      $X(i\Delta + n\Delta\varepsilon) \leftarrow X(i\Delta + [n - 1]\Delta\varepsilon) +$ 
4:        $\Delta\varepsilon F(X(i\Delta + [n - 1]\Delta\varepsilon), u(i\Delta))$ 
5:   end for
6:    $X([i + 1]\Delta) \leftarrow X(i\Delta + N\Delta\varepsilon) +$ 
7:      $\Delta(1 - N\varepsilon)F(X(i\Delta + N\Delta\varepsilon), u(i\Delta))$ 
8: end for

```

V. 稳定性分析

在本节中，我们对 SMFE 方法进行了稳定性分析，并推导出模拟步长 Δ 和步数 N 的要求。我们展示了与经典 FEM 相比，SMFE 的效率同时确保了数值稳定性。

我们考虑在 (9) 中的块三角形形式，其中应用 SMFE 方法导致离散时间系统

$$\begin{bmatrix} x(t+\Delta) \\ \eta(t+\Delta) \end{bmatrix} \approx \underbrace{(I + \Delta(1 - N\varepsilon)A)}_{=: A_\Delta} (I + \Delta\varepsilon A)^N \begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}$$

此离散化模型稳定当且仅当 A_Δ 的所有特征值的模都小于一。因此，为了稳定性，必须并且充分的是以下条件对于 A 的每个特征值 λ 成立：

$$|1 + \Delta(1 - N\varepsilon)\lambda| |1 + \Delta\varepsilon\lambda|^N < 1. \quad (14)$$

给定 $\varepsilon \ll 1$ ，且 A 包含稳定的特征值 $\lambda_{\text{slow}} = O(1)$ 和 $\lambda_{\text{fast}} = O(1/\varepsilon)$ ，我们首先关注最慢的特征值 $\hat{\lambda}_{\text{slow}}$ ，其定义类似于 (10)：

$$\hat{\lambda}_{\text{slow}} = \arg \min_{\lambda_{\text{slow},i}} \{\text{Re}(\lambda_{\text{slow},i}) \mid i = 1, 2, \dots, n\}. \quad (15)$$

对于小 ε 但固定的 Δ 和 N ，我们使用近似值 $(1 + \Delta\varepsilon\lambda)^N \approx 1 + N\Delta\varepsilon\lambda$ 并忽略 $O(\varepsilon)$ 项，因此条件 (14) 得到

$$|1 + \Delta\hat{\lambda}_{\text{slow}}| < 1. \quad (16)$$

因此，对于慢子系统，前向欧拉离散化的稳定性条件被恢复。

接下来，我们考虑最快的特征值 $\hat{\lambda}_{\text{fast}}$ 如 (10) 中定义的，并定义缩放后的特征值 $\tilde{\lambda} = \varepsilon\hat{\lambda}_{\text{fast}} = O(1)$ 。对于 $\varepsilon \ll 1$ ，条件 (14) 等价于

$$N > -\frac{\ln |1 + \Delta\hat{\lambda}_{\text{fast}} - N\Delta\tilde{\lambda}|}{\ln |1 + \Delta\tilde{\lambda}|}.$$

对于非常小的 ε ，同时保持 N 和 Δ 不变，可以注意到 $\ln |1 + \Delta\hat{\lambda}_{\text{fast}} - N\Delta\tilde{\lambda}| > 0$ ，因此要满足条件 (14)，我们首先需要 $\ln |1 + \Delta\tilde{\lambda}| < 0$ ，即， $|1 + \Delta\tilde{\lambda}| < 1$ 。在此假设下，考虑 $\varepsilon \ll 1$ ，同时保持 Δ 不变并假设 $N \ll 1/\varepsilon$ ，我们得到近似条件

$$N > -\frac{\ln(\Delta|\tilde{\lambda}|/\varepsilon)}{\ln |1 + \Delta\tilde{\lambda}|} = O\left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right). \quad (17)$$

条件 (17) 确认假设 $N \ll 1/\varepsilon$ 可以满足。请注意，尽管条件在 N 上不独立于 ε ，但由于 (17) 中的对数，其依赖性非常轻微。

备注 2. 注意在条件 (17) 中，如同 $\Delta \rightarrow \varepsilon$ ， N 的下界会急剧增加，这表明选择过小的 Δ 值会导致模拟步骤数量大幅增加。

备注 3. 在单个快速特征值的情况下，如果可以 选择 Δ 使得 $1 + \Delta\tilde{\lambda} \approx 0$ 同时确保对于所有慢极点 $|1 + \Delta\lambda_{\text{slow}}| < 1$ ，则迭代次数 N 可以显著减少。这是因为 (14) 中第二个因子的底数变得近似为零。

在计算工作量方面，由于需要 $|1 + \Delta\hat{\lambda}_{\text{slow}}| < 1$ 和 $|1 + \Delta\tilde{\lambda}| < 1$ ，SMFE 方法需要

$$(N+1)\frac{T}{\Delta} = O\left(-\frac{\ln(\Delta|\tilde{\lambda}|/\varepsilon)T}{\ln |1 + \Delta\tilde{\lambda}| \Delta}\right) = O\left(T\hat{\lambda} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$$

函数评估来模拟模型以覆盖仿真时间范围 T ，因为 $\Delta = O(1/\hat{\lambda})$ ，其中 $\hat{\lambda}$ 是系统的最大模态的缩放特征值：

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} \hat{\lambda}_{\text{slow}}, & \text{if } \text{Re}(\hat{\lambda}_{\text{slow}}) < \text{Re}(\varepsilon\hat{\lambda}_{\text{fast}}), \\ \varepsilon\hat{\lambda}_{\text{fast}}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

请注意，这个数字仅轻微依赖于 ε 。因此，SMES 被证明可以使用远少的迭代次数稳定 SPS 的显式方法。

VI. 误差分析

在本节中，我们分析使用块三角形形式的 SMFE 方法的数值误差特性，如 (9) 所示。我们的目标是证明，在 N 小步模拟过程中，系统动力学迅速接近相应简化模型的平衡流形。因此，主要的模拟误差源自较大的步长离散化，如 $\Delta(1 - N\varepsilon)$ 。

首先，我们假设系统在 (9) 从 $[x(t), \eta(t)] = [x_\Delta, \eta_\Delta]$ 开始。经过 N 次迭代和小步长 $\Delta\varepsilon$ ，快速动力学演化为

$$\eta(t + N\Delta\varepsilon) = |1 + \Delta\varepsilon\hat{\lambda}_{\text{fast}}|^N \eta_\Delta.$$

使用稳定性条件 (17) 并代入 N 得到

$$\eta(t + N\Delta\varepsilon) < |1 + \Delta\varepsilon\hat{\lambda}_{\text{fast}}|^{-\frac{\ln(\Delta|\tilde{\lambda}|/\varepsilon)}{\ln |1 + \Delta\tilde{\lambda}|}} \eta_\Delta. \quad (18)$$

给定 $\tilde{\lambda} = \varepsilon\hat{\lambda}_{\text{fast}}$ 和原理 $a^b = e^{b \ln a}$ 对于正的 a ，(18) 可以简化为

$$\eta(t + N\Delta\varepsilon) < \frac{\varepsilon\eta_\Delta}{\Delta|\tilde{\lambda}|} = O(\varepsilon). \quad (19)$$

虽然快速动态迅速收敛到 $O(\varepsilon)$ 的量级，但慢速动态演化如下：

$$\begin{aligned} x(t + N\Delta\varepsilon) &= |1 + \Delta\varepsilon\hat{\lambda}_{\text{slow}}|^N x_\Delta \\ &\approx |1 + N\Delta\varepsilon\hat{\lambda}_{\text{slow}}| x_\Delta \\ &= x_\Delta + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

其中我们使用近似值 $(1+\delta)^N \approx 1+N\delta$ 对于小的 δ 。这表明慢状态保持接近 x_Δ ，变化量为 $O(\varepsilon)$ 的阶。因此，在 N 次小步迭代后，状态 $[x(t+N\Delta\varepsilon), \eta(t+N\Delta\varepsilon)]$ 收敛到 $[x_\Delta, 0]$ ，误差为 $O(\varepsilon)$ 。注意， $[x_\Delta, 0]$ 位于通过在 (9) 中设置 $\varepsilon = 0$ 而获得的离散化简化模型的平衡流形 $\mathcal{M}_0: \eta = 0$ 上。离散化降阶模型由

$$\begin{aligned} x(t+\Delta) &= |1 + \Delta(1 - N\varepsilon)\lambda_{\text{slow}}| x(t + N\Delta\varepsilon), \\ \eta(t+\Delta) &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

给出注意，(20) 是步长为 $\Delta(1 - N\varepsilon)$ 的降阶模型的向前欧拉离散化

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) \bar{x}(t), \\ \bar{\eta}(t) &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

由于 N 个小步迭代引入了 $O(\varepsilon)$ 的误差，来自 (20) 中的向前欧拉离散化的误差 $O(\Delta^2)$ [13]，在 $O(\Delta^2) \gg O(\varepsilon)$ 时成为主要来源。因此，SMFE 方法在整个模型的时间区间 Δ 上引入的误差非常接近于在简化系统中模拟步长 $\Delta(1 - N\varepsilon)$ 时产生的离散化误差。

VII. 数值说明

在本节中，我们通过数值方法说明了从 [1] 的非线性自适应控制系统（带有寄生动态）中的 SMFE 方法，如图 1 所示。自适应系统的状态空间模型为

$$\begin{aligned} \dot{y} &= ay + z, \\ \dot{k} &= y^2, \\ \varepsilon \dot{z} &= -z + u = -z - ky, \end{aligned} \quad (22)$$

其中 a 是植物参数，而 ε 是一个小的正寄生时间常数。自适应控制理论的一个结果 [18] 是，可调增益 k 的更新律 $\dot{k} = y^2$ 可以在忽略寄生动力学的情况下，使系统稳定于所有常数 a (即, $\varepsilon = 0$)。

在这种情况下，自适应系统被简化为准稳态形式

$$\begin{aligned} \dot{y} &= ay + z, \\ \dot{k} &= y^2, \\ z &= u = -ky, \end{aligned} \quad (23)$$

可以使用显式方法进行数值研究，而无需诉诸非常小的时步。然而，对于原系统在 (22) 中，显式方法由于数值稳定性约束而变得低效，如第 III 节所述。不过，由于寄生动力学在 $0 < \varepsilon \ll 1$ 中是渐近稳定的，它们应该迅速收敛到平衡流形 $\mathcal{M}_0: z = -ky$ 。因此，我

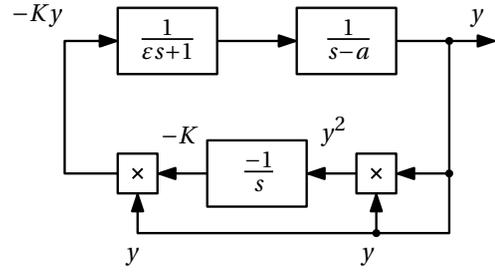


Fig. 1. 具有小寄生动态的自适应控制系统 [1]。

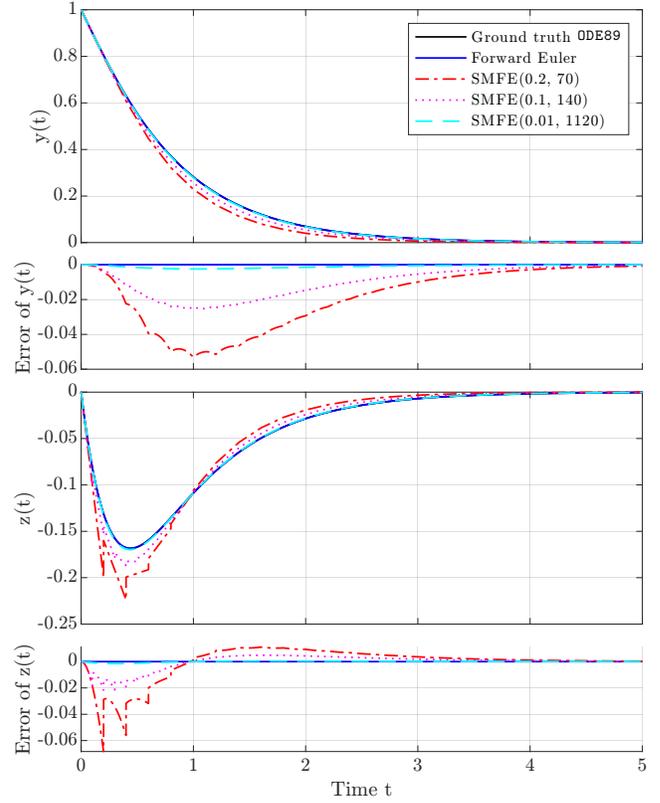


Fig. 2. 状态轨迹的 $y(t)$ 和 $z(t)$ ，以及不同方法下的仿真误差。SMFE(Δ, N) 表示使用长度为 Δ 的大步长和数量为 N 的小步长的 SMFE 方法。

们首先应用 SMFE 方法来研究具有寄生动力学的系统，并将仿真结果与经典 FEM 的结果进行比较，以首先解决 SMFE 方法的效率问题。模拟是在初始条件 $[y(0), k(0), z(0)] = [0, 0, 1]$ ，参数 $a = -1$ 和 $\varepsilon = 10^{-6}$ 下，跨越仿真时域 $t \in [0, 5]$ 进行的。

A. SMFE 方法的效率

模拟结果见图 2 和表 I。首先，我们使用常微分方程 89 对系统进行仿真，这是一种 9(8) 阶的高阶显式龙格-库塔方法，可以提高解的精度 [19]。我们将通过常微分方程 89 获得的解作为系统的参考“真实”解。在

TABLE I

迭代次数和均方误差用于模拟图 1 中的系统采用不同的方法

Method	Forward Euler	SMFE(0.2, 70)	SMFE(0.2, 140)	SMFE(0.2, 1120)	SMFE(0.1, 140)	SMFE(0.1, 1120)	SMFE(0.01, 1120)
Iterations	5, 000, 000	1, 780	3, 530	28, 000	7, 050	56, 000	561, 000
MSE	1.90×10^{-14}	8.29×10^{-4}	8.26×10^{-4}	8.25×10^{-4}	1.97×10^{-4}	1.96×10^{-4}	1.89×10^{-6}

我们的仿真中，我们采用带有不同参数设置的 SMFE 方法，主要调整大步长 Δ 和小步数 N 的值，表示为 $\text{SMFE}(\Delta, N)$ 。同时，我们使用足够小的步长以保证其数值稳定的 FEM。我们将采用不同方法模拟的 $y - z$ 轨迹与真实值之间的均方误差 (MSE) 作为误差指标。

从图 2 可以看出，所有四种数值方法都提供了稳定的模拟。然而，如表 I 所示，要实现数值稳定，经典 FEM 需要至少 5×10^6 次迭代，而 SMFE 方法将迭代次数减少到大约 10^3 的量级。这一结果证实了我们的稳定性分析，表明小步数 N 的选择仅轻微依赖于 ε 以实现数值稳定。此外，迭代次数的显著减少并没有导致过大的误差；通过减小大步长 Δ 并增加小步数 N ，可以进一步最小化误差。

B. 误差收敛

如表 I 所示， Δ 和 N 对 SMFE 方法的误差有不同的影响。当 Δ 固定时，增加 N 仅略微减少了误差。然而，当 N 固定时，减少 Δ 显著降低了误差。这一观察结果与我们在第 VI 节中的分析一致：SMFE 方法的主要误差来源于由 Δ 确定的大步离散化，而不是涉及 N 步的小步离散化。此外，表 I 中的误差量可以认为是 $O(\Delta^2)$ 阶的。

为了可视化误差对 Δ 的依赖关系，我们绘制状态 $y(t)$ 和 $z(t)$ 为二维轨迹。我们将 SMFE 方法应用于系统中在 (22) 存在的寄生动态，并随后在减少后的系统 (23) 上应用 FEM。在每次模拟中，我们将 FEM 的步长设置等于相应 SMFE 方法中使用的较大步长 Δ 。系统的参数和初始条件与之前的模拟保持一致。模拟结果如图 3 所示。

从图 3 中，我们观察到随着步长 Δ 的减小，FEM 和 SMFE 得到的轨迹都趋近于真实的轨迹。值得注意的是，在子图（特别是第一个）中，我们可以看到在 SMFE 方法中的大步长导致系统轨迹偏离了平衡流形 $\mathcal{M}_0: z = -ky$ （由蓝色轨迹表示），而随后的小步长允许系统轨迹迅速回到这个流形。这一观察结果证实了第 VI 节中的误差分析：使用相同的步长，SMFE 的数

值解趋近于相应向前欧拉离散化简化系统的平衡流形 $\mathcal{M}_0: z = -ky$ 。

总结而言，SMFE 方法比经典 FEM 更高效地为 SPS 提供稳定的数值解。虽然 FEM 可以产生准确的模拟结果，但由于其稳定性约束，它必然需要非常小的时间步长，这可能导致过长的模拟时间。相比之下，通过调整 Δ 和 N ，SMFE 方法允许用户平衡误差与模拟效率之间的权衡。此外，均方误差保持在可接受范围的阶数 $O(\Delta^2)$ 内。

VIII. 结论

在这篇论文中，我们通过提出 SMES 解决了数值求解 SPS 的 IVP 挑战，该方法通过多速率策略和可变时间步长增强了经典显式数值方法，使得在无需采用极小时间步长或隐式公式的情况下实现高效稳定的模拟成为可能。通过稳定性和误差分析，我们证明了 SMES 能够有效稳定快速动态过程，使系统保持接近其平衡流形。SMES 为高效仿真 SPS 提供了一种实用的解决方案，在计算成本和精度之间提供了经典显式方法无法达到的平衡。此外，SMES 易于实现，并且可以推广到本文使用的 Forward Euler 方法以外的其他显式方法。

REFERENCES

- [1] P. Kokotović, H. K. Khalil, and J. O'Reilly, *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*. SIAM, 1999.
- [2] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002.
- [3] A. N. Tikhonov, "Systems of differential equations containing small parameters in the derivatives," *Matematicheskii Sbornik*, vol. 73, no. 3, pp. 575–586, 1952.
- [4] R. E. O'Malley Jr., *Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, 1991.
- [5] P. V. Kokotović, "Applications of singular perturbation techniques to control problems," *SIAM Review*, vol. 26, no. 4, pp. 501–550, 1984.
- [6] F. Verhulst, *Methods and Applications of Singular Perturbations: Boundary Layers and Multiple Timescale Dynamics*. Springer, 2005.

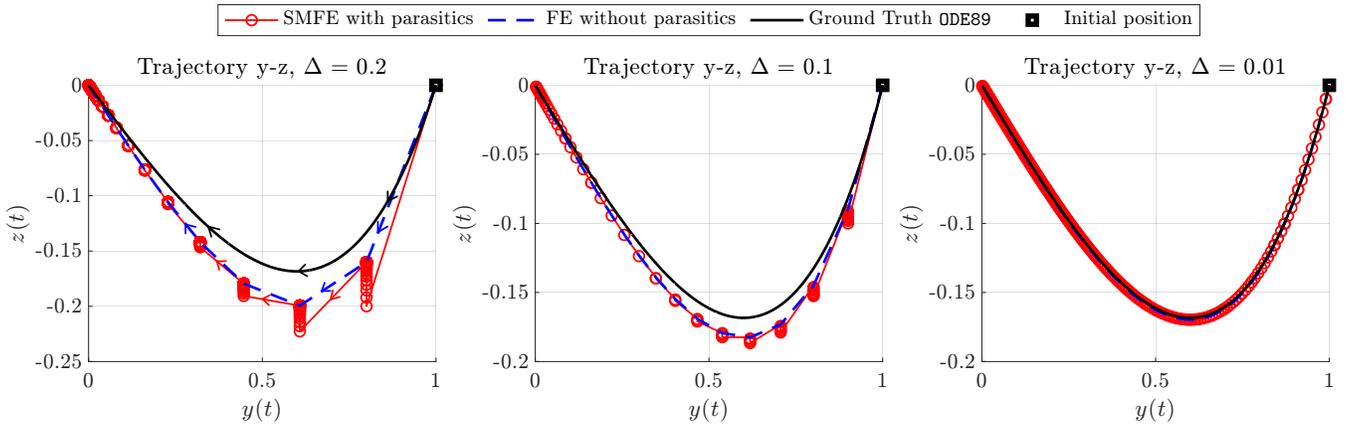


Fig. 3. $y(t) - z(t)$ 在不同仿真方案下的二维状态轨迹。在 (22) 中使用 SMFE 来模拟包含寄生动态的系统，而在 (23) 中则使用 FEM 来模拟简化后的系统。每个子图中的 SMFE 和 FEM 的步长大小分别为 Δ 。左子图中使用箭头指示状态轨迹的方向。

- [7] L. F. Shampine and M. W. Reichelt, "The MATLAB ODE suite," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 18, no. 1, pp. 1–22, 1997.
- [8] U. M. Ascher, S. J. Ruuth, and R. J. Spiteri, "Implicit–explicit Runge–Kutta methods for time-dependent partial differential equations," *Applied Numerical Mathematics*, vol. 25, no. 2-3, pp. 151–167, 1997.
- [9] G. Akrivis, "Implicit–explicit multistep methods for nonlinear parabolic equations," *Mathematics of Computation*, vol. 82, no. 281, pp. 45–68, 2013.
- [10] S. Boscarino, "Error analysis of IMEX Runge–Kutta methods derived from differential-algebraic systems," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 45, no. 4, pp. 1600–1621, 2007.
- [11] L. Pareschi and G. Russo, "Implicit–explicit Runge–Kutta schemes and applications to hyperbolic systems with relaxation," *Journal of Scientific Computing*, vol. 25, no. 1-2, pp. 129–155, 2005.
- [12] F. E. Cellier and E. Kofman, *Continuous System Simulation*. Springer, 2006.
- [13] E. Hairer and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Springer-Verlag, 1991.
- [14] U. M. Ascher and L. R. Petzold, *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*. SIAM, 1998.
- [15] K. E. Brenan, S. L. Campbell, and L. R. Petzold, *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*. SIAM, 1996.
- [16] N. Levinson, "Perturbations of discontinuous solutions of nonlinear systems of differential equations," *Acta Mathematica*, vol. 82, pp. 71–106, 1950.
- [17] E. Hairer, S. P. Nørsett, and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. Springer-Verlag, 1993.
- [18] K. S. Narendra, Y.-H. Lin, and L. S. Valavani, "Stable adaptive controller design, part II: Proof of stability," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 25, no. 3, pp. 440–448, 1980.
- [19] J. H. Verner, "Numerically optimal Runge–Kutta pairs with interpolants," *Numerical Algorithms*, vol. 53, no. 2, pp. 383–396, 2010.