有理插值和无色散 Hirota 系统的解

Andriy Panasyuk
Faculty of Mathematical and Natural Sciences
Cardinal Stefan Wyszyński University
Warsaw, Poland

摘要

本文的目的是构造一类无散 Hirota 系统偏微分方程组的显式非平凡有理解。该类中的所有解都是齐次度为 1 的同次多项式的商。众所周知，Hirota 无散系统的解描述了 Veronese 网。所谓的解的非平凡性意味着相应的 Veronese 网在一般点处是非平坦的。

1 介绍

一个单参数叶状结构族 $\{\mathcal{F}_\lambda\}$ 在一维余维数的 n 维空间中被称为*维罗内塞网* [4]，如果在任意点附近存在局部余基 $\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1}$，使得相应的零化 1 形式 α^λ,$T\mathcal{F}_\lambda=\ker\alpha^\lambda$ 是 λ 中的阶数为 $n-1$ 的多项式 $\alpha_0+\lambda\alpha_1+\cdots+\lambda^{n-1}\alpha_{n-1}$。一个维罗内塞丛是*平坦*如果在任何点附近可以找到一个局部坐标系 x_i 使得 $T\mathcal{F}_\lambda=\ker(dx_0+\lambda dx_1+\cdots+\lambda^{n-1}dx_{n-1})$，即如果局部的叶状分解 $\mathcal{F}_\lambda$ 同时等价于平行超曲面的叶状分解。维罗内塞丛作为研究所谓的双哈密顿常微分系统局部性质的一种工具，在所引用的文章中被引入。事实证明存在非平坦的维罗内塞丛，它们的描述是一个重要的几何和分析问题。

在一篇开创性论文 [9] 中，I. Zakharevich 研究了一个非线性 PDE，形式为

$$(\lambda_2-\lambda_3)f_1f_{23}+(\lambda_3-\lambda_1)f_2f_{31}+(\lambda_1-\lambda_2)f_3f_{12}=0 \tag{1}$$

现在通常被称为*无弥散 Hirot 方程*（这里 $f_i:=\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 和 $f_{ij}:=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ 和 λ_i,$i=1,2,3$，是任意不同的参数)。它的解描述了 3D 中的 Veronese 网。更确切地说，方程 (1) 等价于 Frobenius 可积条件

$$d\alpha^\lambda\wedge\alpha^\lambda\equiv_\lambda 0 \tag{2}$$

对于一形式

$$\alpha^\lambda=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)\left(\frac{f_1dx_1}{\lambda-\lambda_1}+\frac{f_2dx_2}{\lambda-\lambda_2}+\frac{f_3dx_3}{\lambda-\lambda_3}\right) \tag{3}$$

它消灭对应的叶状层 $\mathcal{F}_\lambda$。这种构造可以很容易地推广到更高维度。相应的 PDE 系统，将为称为无扩散 *Hirota* 系统，等价于一形式

$$\alpha^\lambda = \prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i dx_i}{\lambda-\lambda_i}\right), \tag{4}$$

的条件 (2) 其中现在 $(x_1,\ldots,x_n)$ 是 n 维空间中的坐标，而 λ_i,$i=1,\ldots,n$ 是任意成对不同的参数。显式地，该系统形式为

$$(\lambda_j-\lambda_k)f_i f_{jk}+(\lambda_k-\lambda_i)f_j f_{ki}+(\lambda_i-\lambda_j)f_k f_{ij}=0, \tag{5}$$

其中指标 i,j,k 穷尽了集合 $\{1,\ldots,n\}$[1] 中所有两两不同的三元组。一形式（4）对于任何 λ 都消除了一个余维为一的分布，且系统（5）的解描述了 n 维的 Veronese 网。

本短文的目的是构造系统（5）的一类显式有理解。回顾 [1, 2]，一个有理插值函数或柯西插值多项式的顺序 $[k/l]$,$k+l+1=n$，带有节点 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$,$\lambda_i\neq\lambda_j$,$i\neq j$ 和值 x_i ,$x_i\in\mathbb{R}$ 是一个有理函数

$$F(\lambda):=\frac{p(\lambda)}{q(\lambda)}:=\frac{p_0+p_1\lambda+\cdots+p_k\lambda^k}{1+q_1\lambda+\cdots+q_l\lambda^l} \tag{6}$$

使得 $F(\lambda_i)=x_i$ 对于任何 $i=1,\ldots,n$ 成立。系统 $F(\lambda_i)=x_i$ 是一个包含 n 个方程的线性系统，涉及 n 个未知数 $p_0,\ldots,q_l$，并且具有唯一解。由 $p(\lambda)=P(\lambda)/Q(0)$ 和 $q(\lambda)=Q(\lambda)/Q(0)$ [5] , [3, Prop. 2.1] 给出，其中

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^k & -x_1 & -x_1\lambda_1 & \ldots & -x_1\lambda_1^l \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \ldots & \lambda_n^k & -x_n & -x_n\lambda_n & \ldots & -x_n\lambda_n^l \\ 1 & \lambda & \cdots & \lambda^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

和

$$Q(\lambda)=\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^k & -x_1 & -x_1\lambda_1 & \ldots & -x_1\lambda_1^l \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \ldots & \lambda_n^k & -x_n & -x_n\lambda_n & \ldots & -x_n\lambda_n^l \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda & \cdots & \lambda^l \end{vmatrix}.$$

特别地，设

$$P_k=(-1)^{n+k}\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{k-1} & -x_1 & -x_1\lambda_1 & \ldots & -x_1\lambda_1^l \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \ldots & \lambda_n^{k-1} & -x_n & -x_n\lambda_n & \ldots & -x_n\lambda_n^l \end{vmatrix} \tag{7}$$

[1]请注意，从四维开始，整个方程组在代数上是相关的。例如，在四维空间中，四个方程中的任何一个都是其余三个方程的代数结果。

和

$$Q_l = (-1)^{n+k+l+1} \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^k & -x_1 & -x_1\lambda_1 & \dots & -x_1\lambda_1^{l-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^k & -x_n & -x_n\lambda_n & \dots & -x_n\lambda_n^{l-1} \end{vmatrix}. \quad (8)$$

为最高系数。下面我们将证明以下定理。

定理 1 令 $F(\lambda, x) = \frac{p_0(x)+p_1(x)\lambda+\cdots+p_k(x)\lambda^k}{1+q_1(x)\lambda+\cdots+q_l(x)\lambda^l}$,$x := (x_1, \dots, x_n)$ 为具有节点 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$,$\lambda_i \neq \lambda_j$,$i \neq j$ 和值 x_i 的柯西插值。然后函数 $f(x) := \frac{p_k(x)}{q_l(x)} = \frac{P_k(x)}{Q_l(x)}$ 是系统 *(5)* 的一个解。如果 $k > 0$ 和 $l > 0$，相应的维罗内塞网在一般点处是非平坦的。

备注 1 在情况 $l = 0$ 下，柯西插值问题退化为拉格朗日插值问题。在这种情况下，相应的维罗内塞网是平坦的（系数 $p_0(x), \dots, p_k(x)$ 在定义平坦度时充当坐标的作用）。

备注 2 同样在情况 $k = 0$ 下，对应的维罗内塞网是平坦的。确实，对应的柯西插值问题等价于多项式 $\frac{1}{p_0} + \frac{q_1}{p_0}\lambda + \cdots + \frac{q_l}{p_0}\lambda^l$ 和节点 $\frac{1}{x_i}$ 的拉格朗日插值问题。

备注 3 很容易看出，如果 $f(x_1, \dots, x_n)$ 是 Hirota 系统（5）的一个解，那么任何具有光滑 $\Phi(t), \varphi_i(t)$ 的函数 $\Phi(f(\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_n(x_n))$ 也是其解。阶数为 $[k/l]$ 和 $[l/k]$ 并且与 $k, l > 0$ 相关的情况由 $\Phi(t) = 1/t, \varphi_i(t) = 1/t$ 关联。

2 维罗内塞曲线，维罗内塞网络，以及定理的证明

回忆一下，一个维罗内塞曲线（或一个有理正规曲线）是一个映射 $c : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$，在投影空间的某些齐次坐标中可以表示为 $[\mu : \lambda] \mapsto [\mu^{n-1}\lambda^0 : \mu^{n-2}\lambda^1 : \cdots : \mu^0\lambda^{n-1}]$，或者在对应的仿射图 $\mathbb{P}^1$ 和底层线性空间 $\mathbb{R}^n$ 中表示为 $\lambda \mapsto (1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1})$ 的 $\mathbb{P}^{n-1}$。关键在于 Veronese 曲线的以下唯一性性质：对于任何成对不同的 $\lambda_0, \dots \lambda_n \in \mathbb{P}^1$ 以及一般位置中的任意 $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{P}^n$，存在唯一的 Veronese 曲线 c，使得 $c(\lambda_i) = v_i$，$i = 0, \dots, n$。如果 $\lambda_0 = \infty$ 和 $V_i \in \mathbb{R}^n$ 是任意使得 $v_i = p(V_i)$，$i = 1, \dots, n$ 的向量，其中 $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{P}^{n-1}$ 是典范投影，则公式

$$c(\lambda) = p\left(\prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i)\sum_{i=1}^{n}\frac{V_i}{\lambda - \lambda_i}\right).$$

给出了唯一的 Veronese 曲线 c, 使得 $c(\lambda_i) = v_i = p(V_i)$, $i = 1, \dots, n$ 和 $c(\lambda_0) = c(\infty) = p(V_1 + \cdots + V_n)$。

特别是，当固定 $x \in \mathbb{R}^n$ 时，假设 $f_i(x) \neq 0$。一形式 (4) 表示在 $\mathbb{P}(T_x^*\mathbb{R}^n)$ 中的唯一维罗内塞曲线 c，使得 $c(\lambda_i) = p(dx_i)$、$i = 1, \dots, n$ 和 $c(\infty) = p(df)$。如果一形式 (4) 是弗罗贝尼乌斯可积的，那么它的核表示一个具有以下性质的维罗内塞网 $\{\mathcal{F}_\lambda\}$：

$$\mathcal{F}_{\lambda_i} = \{x_i = const\}, i = 1, \dots, n, \mathcal{F}_\infty = \{f = const\}. \quad (9)$$

由此可以得出，如果能够用某个光滑函数 f 构造一个具有性质（9）的 Veronese 网 $\{\mathcal{F}_\lambda\}$，则此函数将满足系统（5）。确实，由（4）给出的一形式 α^λ，根据唯一性将满足任意 λ 的 $\ker\alpha^\lambda = T\mathcal{F}_\lambda$，并且由于 $T\mathcal{F}_\lambda$ 是一个可积分布，α^λ 将是 Frobenius 可积的，并且（5）由 f 满足。

现在我们将构造一个具有性质 (9) 的维罗内塞性格结构 $f(x) = \frac{p_k(x)}{q_l(x)}$。令 $\mathcal{F}_\lambda = \{F(x,\lambda) = const\}$ 是由柯西插值多项式截取的叶状结构。那么，由于一形式（为了简洁我们省略了函数 $p_i(x), q_j(x)$ 的参数）

$$dF(\lambda,x) = \frac{1}{(1+q_1\lambda+\cdots+q_l\lambda^l)^2}((1+q_1\lambda+\cdots+q_l\lambda^l)d(p_0+p_1\lambda+\cdots+p_k\lambda^k) - \\ (p_0+p_1\lambda+\cdots+p_k\lambda^k)d(1+q_1\lambda+\cdots+q_l\lambda^l))$$

除以一个非零因子是次数为 $k+l = n-1$ 的多项式，因此家族 $\{\mathcal{F}_\lambda\}$ 是一个维罗内塞性格结构。$\mathcal{F}_\infty = \{f = const\}$ 表明 f 满足 (5)。

为了完成定理的证明，我们必须表明相应的 Veronese 网是非平坦的。为此我们将使用以下准则 [8, Ch. I(II), Prop. 6]：由零化形式 $\alpha^\lambda = \alpha_0 + \lambda\alpha_1 + \cdots + \lambda^{n-1}\alpha_{n-1}$ 给出的 Veronese 网 $\{\mathcal{F}_\lambda\}$ 是平坦的当且仅当一形式 α_1 或 α_{n-2} 是 Frobenius 可积的。

在我们的案例中，我们有 $\alpha_1 = dp_1 + q_1dp_0 - p_0dq_1$ 和 $d\alpha_1\wedge\alpha_1 = 2dq_1\wedge dp_0\wedge dp_1$。函数对应关系 $(p_0,\dots,p_k,q_1,\dots,q_l) \leftrightarrow (x_1,\dots,x_n)$ 在一般点上是可逆的，因此函数 $p_0,\dots,p_k,q_1,\dots,q_l$ 在一般点上是函数独立的和 $d\alpha_1\wedge\alpha_1 \neq 0$。这完成了证明。

3 示例

只需考虑情况 $k \geq l$（参见备注 3）。

在三维情况下，我们只有唯一一种可能性导致非平坦的情形：$k = l = 1$。具体来说，

$$f(x) = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)x_1x_2 + (\lambda_2-\lambda_3)x_2x_3 + (\lambda_3-\lambda_1)x_3x_1}{(\lambda_3-\lambda_2)x_1 + (\lambda_1-\lambda_3)x_2 + (\lambda_2-\lambda_1)x_3}.$$

在四维情况下，情形 $k=2, l=1$ 给出

$$\begin{aligned} p_2(x) = (\lambda_3^2-\lambda_4^2)(\lambda_1-\lambda_2)x_1x_2 - (\lambda_2^2-\lambda_4^2)(\lambda_1-\lambda_3)x_1x_3 + (\lambda_2^2-\lambda_3^2)(\lambda_1-\lambda_4)x_1x_4 + \\ (\lambda_1^2-\lambda_4^2)(\lambda_2-\lambda_3)x_2x_3 - (\lambda_1^2-\lambda_3^2)(\lambda_2-\lambda_4)x_2x_4 + (\lambda_1^2-\lambda_2^2)(\lambda_3-\lambda_4)x_3x_4, \\ q_1(x) = (\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_3)x_1 - (\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_3)x_2 + \\ (\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_2)x_3 - (\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2)x_4. \end{aligned} \tag{10}$$

在五维情况下，我们有两种非平凡的可能性。对于情况 $k=3, l=1$ 我们有

$$
\begin{aligned}
p_3(x) = {} & (\lambda_4-\lambda_5)(\lambda_3-\lambda_5)(\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_2)x_1x_2 - (\lambda_4-\lambda_5)(\lambda_2-\lambda_5)(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_3)x_1x_3 \\
& +(\lambda_3-\lambda_5)(\lambda_2-\lambda_5)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)x_1x_4 - (\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_5)x_1x_5 \\
& +(\lambda_4-\lambda_5)(\lambda_1-\lambda_5)(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_3)x_2x_3 - (\lambda_3-\lambda_5)(\lambda_1-\lambda_5)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)x_2x_4 \\
& +(\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_5)x_2x_5 + (\lambda_2-\lambda_5)(\lambda_1-\lambda_5)(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_4)x_3x_4 \\
& -(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_5)x_3x_5 + (\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_5)x_4x_5, \\
q_1(x) = {} & -(\lambda_4-\lambda_5)(\lambda_3-\lambda_5)(\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_5)(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_3)x_1 \\
& +(\lambda_4-\lambda_5)(\lambda_3-\lambda_5)(\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_5)(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_3)x_2 \\
& -(\lambda_4-\lambda_5)(\lambda_2-\lambda_5)(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_5)(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_2)x_3 \\
& +(\lambda_3-\lambda_5)(\lambda_2-\lambda_5)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_5)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2)x_4 \\
& -(\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2)x_5.
\end{aligned}
$$

对于第二种可能性，$k=l=2$，我们得到

$$
\begin{aligned}
p_2(x) = {} & -(\lambda_4-\lambda_5)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2)x_1x_2x_3 + (\lambda_3-\lambda_5)(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_2)x_1x_2x_4 \\
& -(\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_5)(\lambda_1-\lambda_5)(\lambda_1-\lambda_2)x_1x_2x_5 - (\lambda_2-\lambda_5)(\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_3)x_1x_3x_4 \\
& +(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_5)(\lambda_1-\lambda_5)(\lambda_1-\lambda_3)x_1x_3x_5 - (\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_5)(\lambda_1-\lambda_5)(\lambda_1-\lambda_4)x_1x_4x_5 \\
& +(\lambda_1-\lambda_5)(\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_3)x_2x_3x_4 - (\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_5)(\lambda_2-\lambda_5)(\lambda_2-\lambda_3)x_2x_3x_5 \\
& +(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_5)(\lambda_2-\lambda_5)(\lambda_2-\lambda_4)x_2x_4x_5 - (\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_5)(\lambda_3-\lambda_5)(\lambda_3-\lambda_4)x_3x_4x_5, \\
q_2(x) = {} & -(\lambda_4-\lambda_5)(\lambda_3-\lambda_5)(\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_2)x_1x_2 + (\lambda_4-\lambda_5)(\lambda_2-\lambda_5)(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_3)x_1x_3 \\
& -(\lambda_3-\lambda_5)(\lambda_2-\lambda_5)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)x_1x_4 + (\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_5)x_1x_5 \\
& -(\lambda_4-\lambda_5)(\lambda_1-\lambda_5)(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_3)x_2x_3 + (\lambda_3-\lambda_5)(\lambda_1-\lambda_5)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)x_2x_4 \\
& -(\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_5)x_2x_5 - (\lambda_2-\lambda_5)(\lambda_1-\lambda_5)(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_4)x_3x_4 \\
& +(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_5)x_3x_5 - (\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_5)x_4x_5.
\end{aligned}
$$

由公式（7）和（8）可知，所有形式为 $p_k(x)/q_l(x)$ 的 Hirota 系统的解，特别是上述那些解，具有以下性质：

1. $p_k(x)$ 并且 $q_l(x)$ 是 x 中的齐次多项式；
2. $\deg(p_k(x)) = \deg(q_l(x)) + 1$;
3. 多项式 $p_k(x)$ 和 $q_l(x)$ 的系数之和为零（这可以通过将 $x=(1,\ldots,1)$ 代入 (7) 和 (8) 中看出）。

我们在此部分结束时提到，从解 $p_k(x)/q_l(x)$ 中也可以构造满足条件 2 但不满足 1 或 3 的有理解。这一观察基于已知的事实，即 Veronese 网络限制在其任意一片叶上仍然是一个 Veronese 网络。在我们的

构建中，所有坐标超曲面 $\{x_i = const\}$ 都是由消元形式（4）给出的 Veronese 网络的叶。另一个由此事实产生的结果是，系统（5）的任何解在限制到超曲面 $\{x_i = const\}$ 之后都是一个相应坐标不存在的低维系统的解（这一点也可以直接从（5）的形式看出）。这个限制过程可以重复进行。

例如，将 $x_4 = a = const$ 放入公式 (10) 中可以得到方程 (1) 的解。如果 $a = 0$ 满足条件 1 和条件 2，但违反了条件 3。如果 $a \neq 0$ 均匀性也丢失了。

4 结论与展望

在 [6] 中考虑了几类偏微分方程，它们也描述了 Veronese 网，但与 (1) 接触等价。W. Krynski[7] 从 twistor 观点解释了其中一些偏微分方程作为方程 (1) 的变形，非正式地可以理解为当参数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 中的两个或所有都趋于一个点时的极限情况。类似的变形及其解释也适用于系统 (5) 的高维情形。

我们在此文中指出，类似于上述研究的一类解也应该存在于变形的 Hirota 系统中。柯西插值问题应该被 Padé 逼近问题所替代，即，寻找形如 (6) 的有理函数 $F(\lambda)$，使得对于某个固定的 λ_0，满足 $\frac{d^i}{d\lambda^i}|_{\lambda=\lambda_0} F(\lambda) = x_i, i = 0, \ldots, n-1$（如果目标是求解与"粘合"所有参数 λ_i 相对应的 PDE），或者通过混合插值-逼近问题（用于"部分粘合"）。

参考文献

[1] A. Cauchy. *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechique. Premier partie. Analyse algébraique.* Imprimérie Royale, 1821.

[2] A. Cuyt and L. Wuytack. *Nonlinear methods in numerical analysis*, volume 1. North Holland Publishing Company, 1987.

[3] A. Doliwa. Non-autonomous multidimensional Toda system and multiple interpolation problem. *J. Phys. A*, 55:505202, 2022.

[4] I. Gelfand and I. Zakharevich. Webs, Veronese curves, and bihamiltonian systems. *J. Funct. Anal.*, 99:150–178, 1991.

[5] C. G. Jacobi. Über die Darstellung einer Reihe gegebner Werthe durch eine gebrochne rationale Function. *J. Reine Angew. Math.*, 30:127–156, 1846.

[6] B. Kruglikov and A. Panasyuk. Veronese webs and nonlinear PDEs. *J. Geom. Phys.*, 115:45–60, 2017.

[7] W. Kryński. On deformations of the dispersionless Hirota equation. *J. Geom. Phys.*, 127:46–54, 2018.

[8] M.-H. Rigal. *Geometrie globale des systemes bihamiltoniens en dimension impaire*. PhD thesis, l'Université Montpellier II, 1996.

[9] I. Zakharevich. Nonlinear wave equation, nonlinear Riemann problem, and the twistor transform of Veronese webs. 2000. arXiv:math-ph/0006001v1.