

关于测量和代数的高阶霍奇希爾同調的一個注記

Abhishek Banerjee*

Surjeet Kour†

摘要

我们知道，余代数测量行为类似于代数之间的广义映射。在这篇笔记中，我们证明了交换代数间的余代数测量诱导出代数的高阶 Hochschild 同调群之间的态射。所谓的高阶 Hochschild 同调是指 Pirashvili 引入的一个概念，即相对于一个单纯集合的交换代数的 Hochschild 同调群。

MSC(2020) 主题分类：16T15

关键词：余代数测量，高阶霍赫希爾同调

1 介绍

令 K 是一个域，并且令 $Vect_K$ 是在 K 上的向量空间范畴。令 A, B 是 K -代数。我们回忆（见 [14]）从 A 到 B 的一个测煤代数是一个 K -线性映射 $\psi : C \longrightarrow Hom_k(A, B)$ ，其中 C 是一个 K -煤代数，并且满足

$$\psi(s)(aa') = \sum \psi(s_{(1)})(a)\psi(s_{(2)})(a') \quad \psi(s)(1_A) = \epsilon_C(s) \cdot 1_B \quad (1.1)$$

对任意的 $a, a' \in A$ 。这里， $\epsilon_C : C \longrightarrow K$ 是在 C 上的余单位，并且在余代数 C 上的余积 Δ_C 在 Sweedler 记号中对每个 $s \in C$ 表示为 $\Delta(s) = \sum s_{(1)} \otimes s_{(2)}$ 。我们将经常省略求和符号，写作 $\Delta_C(s) = s_{(1)} \otimes s_{(2)}$ 而不是 $s \in C$ 。当没有混淆的危险时，对于任何 $s \in C$ 和 $a \in A$ ，我们简单地将 $\psi(s)(a)$ 写作 $s(a)$ 。因此，我们有 $s(aa') = s_{(1)}(a) \cdot s_{(2)}(a')$ 对于任意的 $s \in C$ 和 $a, a' \in A$ 。

*Department of Mathematics, Indian Institute of Science, Bangalore, India. Email: abhishekbannerjee1313@gmail.com

†Department of Mathematics, Indian Institute of Technology, Delhi, India. Email: koursurjeet@gmail.com

关于余代数测量的研究丰富了代数在余代数上的范畴。这种丰富通常被称为“Sweedler 同态”（参见例如，[1]）并且与 Sweedler 对偶相关（参见 [13]）。关于测量及其在各种范畴框架中的适应，我们建议读者参考例如 [4], [6], [7], [8], [9], [15], [16].

由于余代数测度类似于广义的代数间映射，能否利用测度来诱导代数间的（上）同调理论映射？我们在 [2] 中考虑了这个问题，在那里我们使用测度构造了代数的 Hochschild 同调群之间的映射。在 [3] 中，我们证明了测度导致 Hopf 代数胚上的（上）同调理论之间诱导出的映射。在 [12] 中，Pirashvili 引入了关于单纯集合的交换代数的 Hochschild 同调群，他称之为高阶 Hochschild 同调群。在这篇简短的笔记中，我们证明了交换代数之间的余代数测度诱导出更高阶 Hochschild 同调群上的态射。

2 高阶霍奇希勒同调上的测量与态射

当 C 是一个余交换余代数时， $\psi : C \longrightarrow \text{Hom}_k(A, B)$ 被称为从 A 到 B 的一个余交换测量。从现在起， A 和 B 将始终表示交换 K -代数，并且 C 将始终表示一个余交换 K -余代数。设 M 是一个 A -模， N 是一个 B -模。一个从 M 到 N 的 C -余模测量（见 [5],[9]）是一个 K -线性映射 $\phi : D \longrightarrow \text{Hom}_k(M, N)$ ，其中 D 是一个 C -余模，并且满足

$$\phi(t)(am) = \sum \psi(t_{(0)})(a) \cdot \phi(t_{(1)})(m) \quad (2.1)$$

对于 $t \in D, a \in A$ 和 $m \in M$ 。这里，结构映射 D 作为 C -余模表示为 $\delta_D(t) = \sum t_{(0)} \otimes t_{(1)} \in C \otimes D$ 对于 $t \in D$ 。正如代数之间的余代数测度，我们将经常简单地将表达式 (2.1) 写为 $t(am) = t_{(0)}(a) \cdot t_{(1)}(m)$ 对于 $t \in D, a \in A$ 和 $m \in M$ 。

在 [12] 中，Pirashvili 引入了交换代数 A 的高阶 Hochschild 同调的概念，系数在一个模 M 中。设 Γ 为带有基点的有限集范畴。我们用 $\Gamma\text{-Mod}$ 表示左 Γ -模的范畴，即函子 $\Gamma \longrightarrow \text{Vect}_K$ 。设 Sets_* 是带点集合的范畴。然后如果 $R : \Gamma \longrightarrow \text{Vect}_K$ 是一个左 Γ -模， R 可以扩展为一个我们记作

$$\tilde{R} : \text{Sets}_* \longrightarrow \text{Vect}_K \quad T \mapsto \text{colim}_{\Gamma \ni S \rightarrow T} R(S) \quad (2.2)$$

的函子。令 Δ 表示通常的单纯范畴，其对象是有序集 $\{0, 1, \dots, k\}$ 对于 $k \geq 0$ ，而态射是保序映射（参见例如 [11, § 6]）。根据定义，一个带点的单纯集合 Y 是一个函子 $Y : \Delta^{op} \longrightarrow \text{Sets}_*$ 。相应地，给定一个带点的单纯集合 Y 和一个左 Γ -模 R ，我们有复合

$$\Delta^{op} \xrightarrow{Y} \text{Sets}_* \xrightarrow{\tilde{R}} \text{Vect}_K \quad (2.3)$$

，这给出了一个单纯向量空间 $\tilde{R}(Y_\bullet)$ 。

对于 $k \geq 0$, 我们记 $[k] \in \Gamma$ 为基点为 0 的集合 $[k] := \{0, 1, \dots, k\}$ 。如果 A 是一个交换的 K -代数, 并且 M 是一个 K -模, 我们有一个左 Γ -模 $\mathcal{L}(A, M) : \Gamma \rightarrow Vect_K$, 它由以下关联确定 (见 Loday[10]):

$$[k] \mapsto M \otimes A^{\otimes k} \quad (2.4)$$

对于 $k, l \geq 0$ 和 Γ 中的一个态射 $f : [k] \rightarrow [l]$, 诱导的态射由以下方式确定

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A, M)(f) : M \otimes A^{\otimes k} &\longrightarrow M \otimes A^{\otimes l} & m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_k &\mapsto n \otimes b_1 \otimes \dots \otimes b_l \\ b_j &:= \prod_{i \in f^{-1}(j)} a_i & n &:= m \cdot \prod_{i \in f^{-1}(0)} a_i \end{aligned} \quad (2.5)$$

对于每一个 $1 \leq j \leq l$ 。特别地, 当 $M = A$ 时, 我们设置 $\mathcal{L}(A) := \mathcal{L}(A, A)$ 。

定义 2.1. (见 [12]) 设 A 是一个交换 K -代数, M 是一个 A -模, Y 是一个带点的单形集。然后, 代数 A 在系数 M 下的阶为 Y 的霍奇希耳同调群 $HH_{\bullet}^Y(A, M)$ 由通过组合

$$\mathcal{L}(A, M)(Y_{\bullet}) : \Delta^{op} \xrightarrow{Y} Sets_{\star} \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{L}(A, M)}} Vect_K \quad (2.6)$$

获得的单纯向量空间的同调 $\{HH_n^Y(A, M) := H_n(\widetilde{\mathcal{L}(A, M)}(Y_{\bullet}))\}_{n \geq 0}$ 给出。如果 $g : Y \rightarrow Z$ 是一个带点单纯集合映射, 则在霍奇希耳同调群上诱导的映射记为 $HH_{\bullet}^g(A, M) : HH_{\bullet}^Y(A, M) \rightarrow HH_{\bullet}^Z(A, M)$ 。当 $M = A$ 时, 代数 A 的阶为 Y 的霍奇希耳 $CHILD$ 同调群表示为 $HH_{\bullet}^Y(A) := HH_{\bullet}^Y(A, A)$ 。

引理 2.2. 令 $\phi : D \rightarrow Hom_k(M, N)$ 为从 A -模 M 到 B -模 N 的 C -余模测量。然后对于每个 $t \in D$, 我们都有一个诱导的映射

$$\mathcal{L}^{\phi}(t) : \mathcal{L}(A, M) \rightarrow \mathcal{L}(B, N) \quad (2.7)$$

作为 Γ -模。

证明. 令 $t \in D$ 。对于每个 $k \geq 0$, 我们定义

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\phi}(t)[k] : \mathcal{L}(A, M)[k] &\longrightarrow \mathcal{L}(B, N)[k] \\ m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_k &\mapsto \phi(t_{(0)})(m) \otimes \psi(t_{(1)})(a_1) \otimes \dots \otimes \psi(t_{(k)})(a_k) = t_{(0)}(m) \otimes t_{(1)}(a_1) \otimes \dots \otimes t_{(k)}(a_k) \end{aligned} \quad (2.8)$$

我们现在考虑 $k, l \geq 0$ 和在 Γ 中的态射 $f : [k] \rightarrow [l]$ 。令 $m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_k \in M \otimes A^{\otimes k}$ 。使

用 (2.1)、(2.5) 中的定义以及 C 是余交换的事实, 我们注意到

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{L}(B, N)(f) \circ \mathcal{L}^\phi(t)[k])(m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_k) \\
&= \mathcal{L}(B, N)(f)(t_{(0)}(m) \otimes t_{(1)}(a_1) \otimes \dots \otimes t_{(k)}(a_k)) \\
&= \left(t_{(0)}(m) \cdot \prod_{i_0 \in f^{-1}(0)} t_{(i_0)}(a_{i_0}) \right) \otimes \left(\prod_{i_1 \in f^{-1}(1)} t_{(i_1)}(a_{i_1}) \right) \otimes \dots \otimes \left(\prod_{i_l \in f^{-1}(l)} t_{(i_l)}(a_{i_l}) \right) \\
&= t_{(0)} \left(m \cdot \prod_{i_0 \in f^{-1}(0)} a_{i_0} \right) \otimes t_{(1)} \left(\prod_{i_1 \in f^{-1}(1)} a_{i_1} \right) \otimes \dots \otimes t_{(l)} \left(\prod_{i_l \in f^{-1}(l)} a_{i_l} \right) \\
&= \mathcal{L}^\phi(t)[l] \left(\left(m \cdot \prod_{i_0 \in f^{-1}(0)} a_{i_0} \right) \otimes \left(\prod_{i_1 \in f^{-1}(1)} a_{i_1} \right) \otimes \dots \otimes \left(\prod_{i_l \in f^{-1}(l)} a_{i_l} \right) \right) \\
&= (\mathcal{L}^\phi(t)[l] \circ \mathcal{L}(A, M)(f))(m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_k)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

从 (2.9) 可以明显看出, (2.8) 中的地图确定了从 Γ 到 $Vect_K$ 的函子的自然变换 $\mathcal{L}^\phi(t) : \mathcal{L}(A, M) \longrightarrow \mathcal{L}(B, N)$. $\square$

定理 2.3. 令 A, B 是交换的 K -代数, 并且令 $\psi : C \longrightarrow Hom_K(A, B)$ 是从 A 到 B 的余交换量度。令 $\phi : D \longrightarrow Hom_k(M, N)$ 为从 A -模 M 到 B -模 N 的 C -余模测量。令 Y 为一个带基点的单形集。然后对于每个 $t \in D$, 都有一个在 Hochschild 同调群上诱导的态射

$$\phi_\bullet^Y(t) : HH_\bullet^Y(A, M) \longrightarrow HH_\bullet^Y(B, N) \tag{2.10}$$

, 阶数为 Y 。此外, 如果 $g : Y \longrightarrow Z$ 是一个带点单纯集合的映射, 我们有 $HH_\bullet^g(B, N) \circ \phi_\bullet^Y(t) = \phi_\bullet^Z(t) \circ HH_\bullet^g(A, M)$ 。

证明. 由引理 2.2, C -余模测量 $\phi : D \longrightarrow Hom_k(M, N)$ 引入一个从 $t \in D$ 到 Γ -模的态射 $\mathcal{L}^\phi(t) : \mathcal{L}(A, M) \longrightarrow \mathcal{L}(B, N)$, 从而引入了一个函子 $\widetilde{\mathcal{L}^\phi(t)} : \widetilde{\mathcal{L}(A, M)} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{L}(B, N)}$ 从 $Sets_*$ 到 $Vect_K$ 的态射。根据 (2.6) 中的定义, 这诱导了一个单纯向量空间的态射 $\widetilde{\mathcal{L}^\phi(t)}(Y_\bullet) : \widetilde{\mathcal{L}(A, M)}(Y_\bullet) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{L}(B, N)}(Y_\bullet)$, 从而得到了态射 $\phi_\bullet^Y(t) : HH_\bullet^Y(A, M) \longrightarrow HH_\bullet^Y(B, N)$ 。由于 $\mathcal{L}^\phi(t)$ 是一个 Γ -模的态射, 很明显在 (2.10) 中的态射对于带点单纯集合的映射也是良好行为的。 $\square$

当 $M = A, N = B, D = C$ 和测量 $\phi = \psi : C \longrightarrow Hom_K(A, B)$ 时, 对于每个 $s \in C$, (2.10) 中的映射简化为阶数为 Y 的 Hochschild 同调群的态射

$$\psi^Y(s) : HH_\bullet^Y(A) \longrightarrow HH_\bullet^Y(B) \tag{2.11}$$

。

参考文献

- [1] M. Anel and A. Joyal, *Sweedler theory for (co)algebras and the bar-cobar constructions*, arXiv:1309.6952 (2013).
- [2] A. Banerjee and S. Kour, *On measurings of algebras over operads and homology theories*, *Algebr. Geom. Topol.* **22** (2022), no. 3, 1113–1158.
- [3] ———, *Measurings of Hopf algebroids and morphisms in cyclic (co)homology theories*, *Adv. Math.* **442** (2024), Paper No. 109581, 48.
- [4] M. Batchelor, *Difference operators, measuring coalgebras, and quantum group-like objects*, *Adv. Math.* **105** (1994), no. 2, 190–218.
- [5] ———, *Measuring comodules—their applications*, *J. Geom. Phys.* **36** (2000), no. 3-4, 251–269.
- [6] L. Grunenfelder and M. Mastnak, *On bimeasurings*, *J. Pure Appl. Algebra* **204** (2006), no. 2, 258–269.
- [7] ———, *On bimeasurings. II*, *J. Pure Appl. Algebra* **209** (2007), no. 3, 823–832.
- [8] M. Hyland, I. López Franco, and C. Vasilakopoulou, *Hopf measuring comonoids and enrichment*, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) **115** (2017), no. 5, 1118–1148.
- [9] ———, *Measuring comodules and enrichment*, arXiv 1703.10137 (2017).
- [10] J. -L. Loday, *Opérations sur l’homologie cyclique des algèbres commutatives*, *Invent. Math.* **96** (1989), no. 1, 205–230.
- [11] J. -L. Loday, *Cyclic homology*, 2nd ed., *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, vol. 301, Springer-Verlag, Berlin, 1998. Appendix E by María O. Ronco; Chapter 13 by the author in collaboration with Teimuraz Pirashvili.
- [12] T. Pirashvili, *Hodge decomposition for higher order Hochschild homology*, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **33** (2000), no. 2, 151–179.
- [13] H.-E. Porst and R. Street, *Generalizations of the Sweedler dual*, *Appl. Categ. Structures* **24** (2016), no. 5, 619–647.
- [14] M. E. Sweedler, *Hopf algebras*, *Mathematics Lecture Note Series*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969.
- [15] C. Vasilakopoulou, *On enriched fibrations*, *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* **59** (2018), no. 4, 354–387.
- [16] ———, *Enriched duality in double categories: $\mathcal{V}$ -categories and $\mathcal{V}$ -cocategories*, *J. Pure Appl. Algebra* **223** (2019), no. 7, 2889–2947.