

# 辐射捕获 $\alpha$ 在 $^{12}\text{C}$ 中的聚类有效场论：简短回顾

Shung-Ichi Ando

*Department of Display and Semiconductor Engineering, and Research Center for Nano-Bio Science, Sunmoon University, Asan-si, Chungcheongnam-do, 41439, Republic of Korea*

---

## Abstract

辐射捕获  $\alpha$  的研究在  $^{12}\text{C}$ ,  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ , 团簇有效场论 (EFT) 中进行了回顾。一个低能量 EFT 用于在伽莫夫峰值能量  $E_G = 0.3$  MeV 下的  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$  被构建, 并且该理论首先应用于研究低能下弹性  $\alpha$ - $^{12}\text{C}$  散射。有效范围参数拟合到了弹性散射的精确相移数据和  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$  的  $E1$  转换的天体物理  $S_{E1}$  因子在  $E_G$  处进行了估计。为了研究  $E2$  跃迁的  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ , 我们讨论了确定亚阈值  $2_1^+$  态的  $^{16}\text{O}$  的渐近归一化系数 (ANC) 的一个困难, 并用弹性散射数据证明了该困难, 并论证了在  $E_G$  处估计  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$  的天体物理  $S_{E2}$  因子存在的困难。我们讨论了当前方法中在  $E_G$  处估计  $S$  因子的不确定性。

**Keywords:**  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ , 天体物理  $S$  因子, 弹性  $\alpha$ - $^{12}\text{C}$  散射, 渐近归一化系数, 团簇有效场论

---

## 1. 介绍

辐射捕获反应  $\alpha^{12}\text{C}$ ,  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ , 是核天体物理学中的基本反应之一, 决定了氢燃烧恒星核心的 C/O 比 [1]。反应速率, 等效于 Gamow 峰能量处的天体物理因子  $S$  因子为  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$  在  $E_G = 0.3$  MeV 处, 由于库仑势垒的原因, 尚未在实验设施中进行测量。需要采用一个理论模型, 将模型参数拟合到几 MeV 能量处测得的实验数据, 并外推截面至  $E_G$ 。已知由于

$^{16}\text{O}$  的亚阈值  $1_1^-$  和  $2_1^+$  状态,  $E1$  和  $E2$  转移占主导地位。在过去的五十年中, 已经开展了大量的实验和理论工作。参见例如 Refs.[2, 3] 的综述。

在过去十年里, 我们一直在研究与  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$  相关的反应, 采用的是场论 [4, 5, 6] 的方法。在构建理论时, 首先需要选择一个要研究的反应的典型尺度。我们选择 Gamow 峰值能量  $E_G = 0.3$  兆电子伏作为典型能标, 因此典型的动量尺度为  $Q = \sqrt{2\mu E_G} = 40$  兆电子伏/光速, 其中  $\mu$  是  $\alpha$  和  $^{12}\text{C}$  的约化质量; 典型的长度尺度变为  $\hbar/Q \simeq 5$  飞米。该反应将对核内的 nucleon 自由度不敏感, 我们把  $\alpha$  和  $^{12}\text{C}$  视为点状标量场。还选择了一个大的尺度来分离低能下的相关自由度和高能下的无关自由度。我们选择  $p\text{-}^{15}\text{N}$  和  $\alpha\text{-}^{12}\text{C}$  通道的阈值能量之间的能量差,  $^{16}\text{O}, \Delta E = 12.13 - 7.16 = 4.79$  MeV, 作为高能 (分离) 尺度; 高动量尺度为  $\Lambda_H = \sqrt{2\mu \Delta E} = 160$  MeV/c。该理论为我们提供了一种微扰展开方案, 其展开参数为  $Q/\Lambda_H = 1/4$ 。  $p\text{-}^{15}\text{N}$  系统现在被视为无关的自由度, 并从有效拉格朗日中积分出去, 其效应嵌入了拉格朗日各项的系数之中。这些系数原则上可以从母理论中确定, 而在实践中则通过使用实验数据或经验值来固定。由于 EFT 的微扰展开方案, 截断到给定阶数的各项后, 可以得到每个反应通道的反应振幅的表达式, 仅涉及少数参数。

$R$ -矩阵分析和两体势模型是用于分析  $\alpha\text{-}^{12}\text{C}$  系统的标准方法 (见参考文献 [3] 的表 IV)。由于必须将 16 核子系统的反应减少到具有较少自由度的系统中, 这些方法的模型 (或方案) 依赖性不可避免。将反应的自由度降至较低维度可能导致这些理论方法的不同参数化。 $R$  矩阵分析与 EFT 之间的差异在于,  $R$  矩阵分析引入了一个半径参数来分离波函数的内层和外层部分, 并且还包括了共振极点的求和,  $R$  矩阵, 在其中共振能量和减缩宽度在  $R$  矩阵中被拟合到实验数据。EFT 在动量空间引入了一个分离尺度并采用有效范围展开。两体势模型与 EFT 之间的差异在于, 势模型使用坐标空间中的波图像, 并将势能参数化为 Woods-Saxon 形式, 势的参数以及过渡算符的有效电荷被拟合到实验数据中, 而 EFT 则在动量空间采用了粒子图像, 反应振幅从有效拉格朗日计算得出, 顶点函数的耦合常数被拟合到实验数据。EFT 因此成为研究  $\alpha\text{-}^{12}\text{C}$  系统的新替代方法, 并能提供一种研究

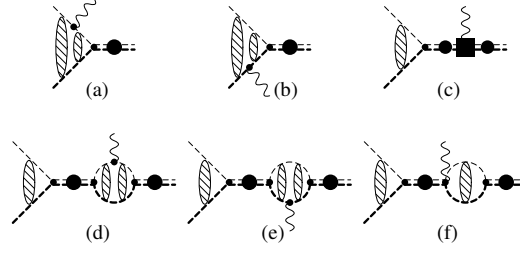


图 1: 费曼图的  $E1$  和  $E2$  过渡过程中的  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$  [8]。一条细虚线或粗虚线表示入射的  $\alpha$  或  $^{12}\text{C}$ ，波浪线表示出射光子。在最终状态或中间状态中，带有实心圆圈的细粗双虚线表示出射基态的  $^{16}\text{O}$  或者  $^{16}\text{O}$  传播子用于  $l = 1$  或  $l = 2$ 。初始状态或中间状态中的阴影椭圆形表示库仑波函数或库仑格林函数。图 (c) 中的实心方框表示反项，通过这些反项将环形图的无穷大进行正规化。

计算  $\alpha$ - $^{12}\text{C}$  系统模型（或方案）依赖性的方法。

在这篇论文中，我们简要讨论了星团 EFT 中的  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$  的研究。我们首先讨论了  $E1$  跃迁振幅的计算以及如何将参数拟合到实验数据中。然后将  $S_{E1}$  因子外推至  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$  到  $E_G$ 。对于  $E2$  跃迁幅度的  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ ，我们讨论了从弹性  $\alpha$ - $^{12}\text{C}$  散射的相移中确定次阈值  $2_1^+$  状态的有效范围参数（等同于 ANC）的困难以及这种状态对估计  $^{16}\text{O}$  的  $l = 2$  因子的影响，及其对于  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$  在  $E_G$  处的  $S_{E2}$  因子估计的结果。我们还讨论了持续性的不确定性，以推导出理论中  $S$  因子的  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$  在  $E_G$  处的情况。

## 2. 计算与数值结果

在图 1 中，显示了  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$  的  $E1$  和  $E2$  转换的费曼图，其中初始  $\alpha$ - $^{12}\text{C}$  状态分别是  $p$ -波和  $d$ -波状态，分别 [7, 8]。直到次领头阶，每条通道的跃迁振幅可以用五个参数来描述。其中一个是从  $s$ -波  $\alpha$ - $^{12}\text{C}$  态到  $^{16}\text{O}$  的基态  $0_1^+$  态的跃迁的常数顶点耦合常数  $y^{(0)}$ ，它与  $^{16}\text{O}$  基态的 ANC 相关；它作为所有振幅的整体系数出现。第二个是接触顶点的系数， $O^*\gamma O$ 、 $h_R^{(1)}$  或  $h_R^{(2)}$ ，在图 (c) 中，它重整化了来自图 (d)、(e)、(f) 中的循环图的无穷大。剩余的三个参数是出现在图 (c)、(d)、(e)、(f) 中的被着装的  $^{16}\text{O}$  传播子的有效范围参数。这些参数通过实验数据拟合。

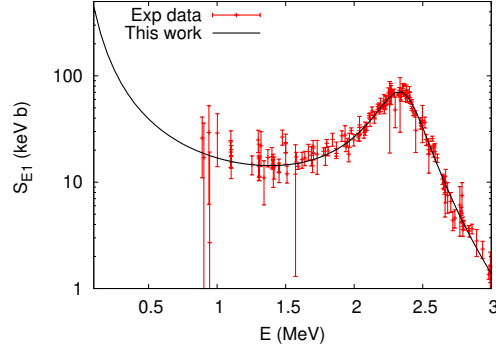


图 2: 拟合线的  $S_{E1}$  因子作为初始  $\alpha$ - $^{12}\text{C}$  状态的能量  $E$  在质心系中的函数图, 绘制了  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ 。  $S_{E1}$  因子的实验数据也在图中显示。

我们首先固定 dressing $^{16}\text{O}$  的有效范围参数用于  $l = 0, 1, 2, 3$ 。我们构建了用于低能量  $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$  的弹性  $\alpha$ - $^{12}\text{C}$  散射的  $S$  矩阵, 其中通常为每个  $^{16}\text{O}$  [10] 的束缚态和共振态引入四个参数, 并将其拟合到精确的相移数据 [9]。我们发现拟合参数很好地再现了精确的相移数据。<sup>1</sup> 通过拟合有效范围参数的值为  $l = 1$ , 我们对  $E1$  过渡振幅的两个附加参数进行拟合对于  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ , 使用实验数据中的  $S_{E1}$  因子对  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$  进行循环积分的维数正则化, 我们得到参数拟合值为  $y^{(0)} = 0.260 \text{ MeV}^{-1/2}$  和  $h_R^{(1)} = 2.67 \times 10^4 \text{ MeV}^3$  其中  $\chi^2$  值为  $\chi^2/N = 1.73$ , 这里  $N$  是实验数据的数量。在图 2 中, 我们绘制了因子  $S_{E1}$  作为初始状态  $\alpha$ - $^{12}\text{C}$  的能量  $E$  在质心系中的函数。实验数据也在同一幅图中显示。因此, 获得  $S_{E1}$  因子的值为  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$  在  $E_G$  时的结果是

$$S_{E1} = 59 \pm 2 \text{ keV b}, \quad (1)$$

其中误差条较小, 约为 3% (且  $\chi^2$  值相对较大)。这主要源于以下事实: 拟合得到的有效范围参数对于  $l = 1$  是精确的, 并且控制了图中显示整个能区范围内  $S_{E1}$  因子的能量相关性。 $y^{(0)}$  的拟合值可能会带来较大的系统不确定

<sup>1</sup>亚阈值  $1_1^-$  和共振  $1_2^-$  状态的  $^{16}\text{O}$  可以用一个带有有效范围参数  $\{r_1, P_1, Q_1\}$  [10] 的单个  $^{16}\text{O}$  传播子来描述, 因此这两种状态之间没有干涉。

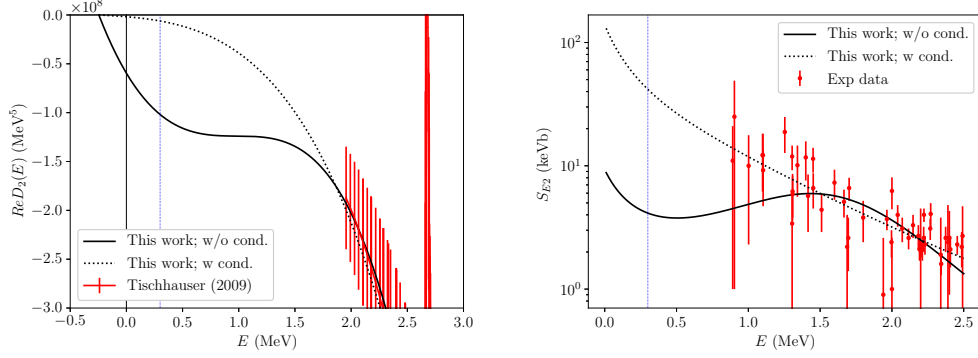


图 3: (左面板) 实部的逆着装  $^{16}\text{O}$  传播子对于  $l = 2$ ,  $ReD_2(E)$ , 不应用条件 (文中讨论) 或应用条件绘制为初始  $\alpha$ - $^{12}\text{C}$  状态能量  $E$  的函数在质心系中。实验相移数据也在图中显示。在  $E = E_G$  处画了一条垂直的蓝色虚线。(右侧面板)  $S_{E2}$  因子的实线或虚线作为  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$  关于  $E$  的函数图。实验数据中的  $S_{E2}$  因子也在图中显示。详情见正文。(这些图形最初呈现在参考文献 [8] 中。)

性。虽然我们将其拟合到  $S_{E1}$  因子的实验数据, 但它与  $^{16}\text{O}$  基态  $0_1^+$  的 ANC 相关; 基态的 ANC 值目前仍然不明确。(参见例如 Ref.[11] 中的表 3。)此外, 它还出现在过渡振幅  $E2$  中的  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ 。我们将看到,  $y^{(0)}$  的拟合值与  $S_{E2}$  因子的数据显著不同, 而与  $S_{E1}$  因子的数据拟合则不然。

一个已知的问题是推导次阈值状态  $2_1^+$  的 ANC,  $^{16}\text{O}$  的 ANC 值从弹性散射的相移数据中推导出的约为通过  $\alpha$  转移反应推导出的五分之一。这一特征可以在绘图中看到, 该图为着装后的  $^{16}\text{O}$  传播子的逆的实部, 对于  $l = 2, ReD_2(E)$ 。(我们将在以下讨论  $ReD_2(E)$  的参数拟合。)在图 3 的左面板中, 我们绘制了两条作为能量  $E$  的函数的  $ReD_2(E)$  线, 这些线对应于  $\alpha$ - $^{12}\text{C}$  态在小能量区域中的情况, 其中  $S_{E2}$  因子被外推到  $E_G$ 。两条线都从同一位置开始 (位于图的左上角) 其中  $D_2(E = -B_2) = 0$ ;  $B_2$  是  $2_1^+$  态的  $^{16}\text{O}$  的结合能。该点处线的梯度与  $2_1^+$  状态的 ANC 相关; 一个大的负角度对应于一个小值的 ANC,  $|C_b|_2 = 3.24 \times 10^4 \text{ fm}^{-1/2}$ , 而一个小的负角度则对应于一个大值的 ANC,  $|C_b|_2 = 22.8 \times 10^4 \text{ fm}^{-1/2}$ 。这里我们将  $ReD_2(E)$  在

$E = -B_2$  处展开为

$$ReD_2(E) \simeq \sum_{n=1}^5 C_n (E + B_2)^n, \quad (2)$$

并引入条件,  $C_n < 0$  与  $n = 1, 2, 3$  当拟合有效范围参数到相移数据时, 以获得一条平滑下降的  $ReD_2(E)$  曲线 (图中两条虚线在图 3 中) [8]。两条线通过不同的点位于  $E = E_G$ , 而这两条线同样很好地重现了 Tischhauser 等人 (2009) 报告的精确相移数据 [9]。因此, 尽管在线上的该点处的斜率, 即 ANC, 是将  $S_{E2}$  因子外推到  $E_G$  的重要约束条件, 但精确的相移数据对于确定  $2_1^+$  状态下的  $^{16}\text{O}$  的 ANC 并无用处。

通过使用图 3 左侧面板中显示的  $ReD_2(E)$  的两条线, 在  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$  的  $E2$  跃迁振幅中, 我们拟合了两个额外参数  $y^{(0)}$  和  $h_R^{(2)}$  以低于  $^{16}\text{O}$  中央锐共振的  $2_2^+$  状态能量的  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$  的  $S_{E2}$  因数的实验数据为依据。我们注意到, 通过使用 ANC 的值  $|C_b|_2 = 10 \times 10^4 \text{ fm}^{-1/2}$  对  $ReD_2(E)$  的虚线进行了重新拟合, 这个值大约位于 ANC 的小值和大值之间, 并且接近从  $\alpha$  转移反应中推导出的数值。因此, 我们有  $y^{(0)} = 1.99 \pm 0.01 \times 10^{-3} \text{ fm}^{-1/2}$  和  $h_R^{(2)} = 50.6 \pm 0.4 \times 10^{11} \text{ MeV}^4$  对于 ANC 的小值,  $\chi^2/N = 1.55$  为  $|C_b|_2 = 3.24 \times 10^4 \text{ fm}^{-1/2}$ , 和  $y^{(0)} = 5.8 \pm 0.1 \times 10^{-2} \text{ fm}^{-1/2}$  和  $h_R^{(2)} = 45.53_{-0.03}^{+0.04} \times 10^{11} \text{ MeV}^4$  对于 ANC 的大值,  $\chi^2/N = 1.18$  为  $|C_b|_2 = 10 \times 10^4 \text{ fm}^{-1/2}$ 。在图 3 的右面板中, 我们绘制了  $S_{E2}$  因子作为  $E$  的函数的两条线。图中还显示了  $S_{E2}$  因子的实验数据。人们可以发现, 这两条线的能量依赖性主要来自于图 3 左面板中绘制的  $ReD_2(E)$  的线条。因此, 对于能量小于 2.0 MeV 的区域, 拥有有效的范围参数  $l = 2$  的正确值至关重要: 我们在  $E_G$  处有 ANC 的  $S_{E2}$  因子作为

$$S_{E2} = 42_{-13}^{+14} \text{ keV b}, \quad (3)$$

,  $|C_b|_2 = 10 \times 10^4 \text{ fm}^{-1/2}$ 。我们有小 ANC 的  $S_{E2} = 4.1 \pm 0.2 \text{ keV b}$  在  $E_G$  处, 大约 33% 的  $S_{E2}$  因子误差较小,  $\chi^2$  值较小,  $\chi^2/N = 1.18$ , 对于 ANC 的实际值,  $|C_b|_2 = 10 \times 10^4 \text{ fm}^{-1/2}$ 。较大的误差棒可能是由  $S_{E2}$  因子的大误差散点数据引起的。如上所述,  $S_{E2}$  因子在  $E_G$  处的估计也包含系统不确

定性，因为耦合常数  $y^{(0)}$  拟合了  $S_{E2}$  因子的数据，并且  $y^{(0)}$  的拟合值与  $S_{E1}$  因子的情况有很大不同。

### 3. 总结与讨论

在本篇贡献论文中，我们简要回顾了  $E1$  和  $E2$  转换的  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$  以及在簇 EFT 中  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$  的天体物理  $S_{E1}$  和  $S_{E2}$  因子的估计  $E_G$ 。我们发现  $S_{E1}$  因子的小统计误差和  $S_{E2}$  因子在  $E_G$  处的大统计误差。这些特征主要源于外推基本上依赖于  $l = 1$  和  $l = 2$  的有效范围参数。 $l = 1$  的有效范围参数由相移数据准确约束，而  $l = 2$  的则不是。我们展示了在两种情况下， $S_{E2}$  因子外推到  $E_G$  的大不确定性，以及  $2_1^+$  状态的  $^{16}\text{O}$  的 ANC 的小值和大值。

通过采用 ANC 的真实值，我们约束了  $l = 2$  的有效范围参数，并估计了  $S_{E2}$  因子在  $E_G$  处的值。我们在  $E_G$  处发现  $S_{E2}$  因子大约有 33% 的误差，这是由于  $S_{E2}$  因子的数据存在较大的不确定性所致。另一个不确定性的来源是  $y^{(0)}$  的值。 $y^{(0)}$  与  $^{16}\text{O}$  基态的 ANC 相关，由于  $\alpha$ - $^{12}\text{C}$  态在  $^{16}\text{O}$  的基态中的分离尺度小于  $^{16}\text{O}$  的尺寸，因此定义不明确。此外，如上所述，在拟合实验数据的  $S$  因子的情况下， $y^{(0)}$  的值仍然很大程度上是分散的。因此，参数  $y^{(0)}$  可能在理论中  $E_G$  处的  $S$  因子估计的主要不确定性中保留。 $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$

### 致谢

本工作得到了韩国国家研究基金会（NRF）资助的研究基金（MSIT）（编号 2022R1F1A1070060 和 2023R1A2C1003177）以及韩国工业技术评估研究所（KEIT）资助的研究基金（MOTIE）（编号 20022473）的支持。

### References

- [1] W. A. Fowler, Experimental and theoretical nuclear astrophysics: the quest for the origin of the elements, Rev. Mod. Phys. 56 (1984) 149-179

- [2] L. R. Buchmann and C. A. Barnes, Nuclear reactions in stellar helium burning and later hydrostatic burning states, Nucl. Phys. A 777 (2006) 254-290
- [3] R. J. deBoer et al., The  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$  reaction and its implications for stellar helium burning, Rev. Mod. Phys. 89 (2017) 035007, and references therein.
- [4] S. Weinberg, Phenomenological Lagrangians, Physica A 96 (1979) 327-340
- [5] H.-W. Hammer, S. König, U. van Kolck, Nuclear effective field theory: status and perspectives, Rev. Mod. Phys. 92 (2020) 025004
- [6] J. F. Donoghue, E. Golowich, and B. R. Holstein, Dynamics of the Standard Model, Second Edition, Cambridge University Press, 2014.
- [7] S.-I. Ando,  $S_{E1}$  factor of radiative  $\alpha$  capture on  $^{12}\text{C}$  in cluster effective field theory, Phys. Rev. C 100 (2019) 015807
- [8] S.-I. Ando, Fixing effective range parameters in elastic  $\alpha$ - $^{12}\text{C}$  scattering: an impact on resonant  $2_4^+$  state of  $^{16}\text{O}$  and  $S_{E2}$  factor of  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ , arXiv:2502.08190v2 [nucl-th]
- [9] P. Tischhauser et al., Measurement of elastic  $^{12}\text{C} + \alpha$  scattering: Details of the experiment, analysis, and discussion of phase shifts, Phys. Rev. C 79 (2009) 055803
- [10] S.-I. Ando,  $S$  matrices of elastic  $\alpha$ - $^{12}\text{C}$  scattering at low energies in effective field theory, Phys. Rev. C 107 (2023) 045808
- [11] S.-I. Ando, ANC of the bound states of  $^{16}\text{O}$  deduced from the elastic  $\alpha$ - $^{12}\text{C}$  data, Few Body Sys. 65 (2024) 7.