# Yao-Lee 模型中通过耦合到拓扑自旋纹理而出现的相态

Muhammad Akram[1,2], Onur Erten[1]
[1] Department of Physics, Arizona State University, Tempe, AZ 85287, USA
[2] Department of Physics, Balochistan University of Information Technology, Engineering and Management Sciences (BUITEMS), Quetta 87300, Pakistan

金属中的电子在与非零标量自旋手性（如斯格明子）的自旋纹理耦合时，会经历一个有效的矢量势。这种耦合可以生成显著的场，导致明显的可观测现象，包括拓扑霍尔效应。受此启发，我们考虑了一个双层模型，在该模型中，一层中的 Yao-Lee 模型的马约拉纳费米子通过自旋-自旋相互作用与另一层中的拓扑自旋纹理相互作用。与 Kitaev 模型不同，Yao-Lee 模型仍然可以精确求解，这使我们能够进行蒙特卡洛模拟以确定其基态。我们的分析表明，斯格明子晶体可以产生各种涡旋晶体，这些晶体是 $\mathbb{Z}_2$ 通量的周期性排列，并具有如六方晶格等不寻常的图案。此外，马约拉纳费米子可以从斯格明子晶体中获得显著的贝里相位，导致具有有限陈数（高达 $\nu = 5$）的相。在磁层存在单个斯格明子缺陷的情况下，可以在涡旋构型中实现相应的缺陷。当自旋液体有能隙时，这些缺陷支持局域态。类似于斯格明子晶体，螺旋自旋纹理也产生多种通量晶体。然而，在这种情况下，大多数相是无能隙的，只有少数是平庸地有能隙的。我们的结果突出了拓扑自旋纹理和量子自旋液体中分数化准粒子之间相互作用所涌现出来的丰富物理现象。

## I. 介绍

斯凯尔明子是二维磁体的拓扑缺陷，并因其潜在应用（如轨道记忆设备 [1]）而引起了广泛关注。除了粒子样性质外，斯凯尔明子还导致了独特的输运现象，包括拓扑霍尔效应和纳恩斯特效应 [2, 3]。这些现象源于将传导电子与具有有限标量自旋手性的自旋纹理耦合，从而产生了有效的磁场。

受这些现象的启发，我们探讨了分数量子准粒子与非平凡自旋纹理耦合时是否会出现类似效应。量子自旋液体（QSLs）为这种探索提供了一个理想的平台，因为它们即使在零温度下也缺乏磁性有序，同时承载着分数激发和由长程量子纠缠产生的新出现的规范场。[4–8]。一个关键的例子是蜂窝格上的 Kitaev 模型 [9]，这是最早具有 QSL 基态的精确可解模型之一。然而，尽管其理论优雅，Kitaev 模型对扰动高度敏感 [10]，并且当与外部磁场耦合时无法保持精确可解性。

解决这些问题的一种方法是将 Kitaev 模型扩展以包括额外的轨道自由度，从而导致自旋-轨道模型 [11–28]，例如 Yao-Lee (YL) 模型 [11]。YL 模型具有扩大的局部希尔伯特空间，这在保持模型精确可解性的同时提供了更大的灵活性以纳入微扰。对 YL 模型的先前研究考察了层间耦合、Dzyaloshinskii-Moriya 相互作用、外部磁场和非厄米效应的影响，揭示了一系列不同的相 [24–28]。

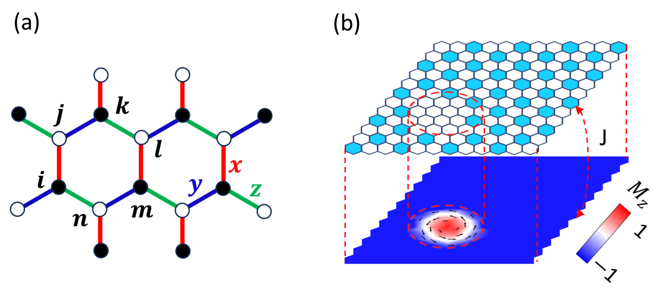


图 1. Yao-Lee 模型在蜂窝晶格上的示意图，显示了三种类型的键 x、y 和 z 分别用红色、蓝色和绿色表示。(b) Yao-Lee 模型与具有空间变化磁化且包含单个斯格明子缺陷的相邻层耦合的示意图。顶层的颜色代码显示了 0 和 $\pi$ 磁通量（分别为白色和蓝色），而在底层，它代表磁化的 z 分量，箭头表示平面内磁化分量。

本工作研究了一个双层模型，该模型由一层 YL 模型与表现出非共线自旋纹理的磁性层耦合组成，如图 1(a,b) 所示。即使存在非共线自旋纹理，YL 模型仍然保持其精确可解性，并且我们进行了蒙特卡洛模拟和变分分析以确定其基态。我们的主要发现如下：(i) 非共线自旋纹理混合了 YL 模型中的不同 Majorana 费米子风味，并可能导致 $\mathbb{Z}_2$ 通量的形成。(ii) 对于一个磁泡晶体，相图展示了多样化的 vison 晶体，这些是作为磁泡大小和层间耦合函数的 $\mathbb{Z}_2$ 通量的周期性排列。大多数这些 vison 晶体是有能隙且拓扑的，其 Chern 数从 0 变化到 5。(iii) 磁化模式中的单个磁泡缺陷会导致

自旋液体基态中 vison 配置对应的缺陷。(iv) 同样地，对于螺旋构型，相图也展示了多种 vison 晶体。然而，在这种情况下，大多数这些 vison 晶体是无能隙的。

本文的其余部分组织如下。在第二节中，我们介绍了模型并描述了马约拉纳费米子表示。在第三节中，我们展示了我们的结果：(a) 天 Skyrmion 晶体图案，(b) 单个天 Skyrmion 缺陷和 (c) 螺旋磁化。最后，我们以我们的结果总结和展望结束。

## II. 模型与方法

我们考虑一个双层蜂窝模型，如图 1(a, b) 所示。第一层由 YL 模型 [11] 描述，而第二层具有经典有序的磁态。两层通过自旋-自旋相互作用（例如洪德耦合）铁磁耦合。我们假设层间耦合相对于第二层内的相互作用较弱，并且经典的有序状态不受层间相互作用的影响。因此，第二层对第一层产生一个非均匀场。YL 层的哈密顿量为 $H = H_{YL} + H_J$ 其中

$$H_{YL} = \sum_{\langle ij\rangle_\alpha} K^\alpha \left(\tau_i^\alpha \tau_j^\alpha\right)\left(\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j\right), \tag{1}$$

$$H_J = -J\sum_i \boldsymbol{M}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_i. \tag{2}$$

这里，$K^\alpha$ 表示 $\alpha$ 键的最近邻耦合常数，$\boldsymbol{M}_i$ 是第二层在位点 $i$ 处的磁化强度，以及 $|\boldsymbol{M}_i|^2 = 1$。YL 模型的一个关键方面是在每个小方块周围定义了守恒的威尔逊环算符 $W$，如图 1(a) 所示。这些面元算符定义为 $W = \tau_i^x \tau_j^y \tau_k^z \tau_l^x \tau_m^y \tau_n^z \otimes \mathbb{1}$。请注意，由于 $W$ 只涉及轨道自由度（DOFs），并且与 $H_{YL}$ 和 $H_J$ 都对易，因此也与总哈密顿量 $[H, W] = 0$ 对易。因此，面元算符的本征值 $W = \pm 1$ 可用于分类哈密顿量的本征态。

可以通过在每个位点引入六个 Majorana 费米子来获得自旋和轨道自由度 [11] 的哈密顿量的精确解：$\sigma_j^\alpha = -i\epsilon^{\alpha\beta\gamma} c_j^\beta c_j^\gamma/2$，$\tau_j^\alpha = -i\epsilon^{\alpha\beta\gamma} d_j^\beta d_j^\gamma/2$ 和 $\sigma_i^\alpha \tau_j^\beta = ic_i^\alpha d_j^\beta$。这种表示是冗余的，物理状态是算符 $D_i = -ic_i^x c_i^y c_i^z d_i^x d_i^y d_i^z$ 的本征态，其本征值为 1。约束可以通过投影算子来实现：$P = \prod_i (1 + D_i)/2$. 在 Majorana 表示中，哈密顿量表示为 $H = P\mathcal{H}P$，其中

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{YL} + \mathcal{H}_J,$$

$$\mathcal{H}_{YL} = \sum_{\langle ij\rangle_\alpha} K^\alpha u_{ij}^\alpha [ic_i^x c_j^x + ic_i^y c_j^y + ic_i^z c_j^z] \tag{3}$$

$$\mathcal{H}_J = \sum_i iJ[M_i^x c_i^y c_i^z + iM_i^y c_i^z c_i^x + iM_i^z c_i^x c_i^y]. \tag{4}$$

这里 $u_{ij}^\alpha = -id_i^\alpha d_j^\alpha$ 是键算子，并且与 $\mathcal{H}$ 对易。此外，斑块算子可以表示为键算子 $W = u_{ij}^x u_{jk}^y u_{kl}^z u_{lm}^x u_{mn}^y u_{ni}^z$ 的乘积。

根据 Lieb 定理 [29]，YL 模型的基态位于 0-通量扇区。此外，三种 Majorana 费米子的激发谱是相同的，可以通过对半个布里渊区进行傅立叶变换获得。当沿着一条键的 $K^\alpha$ 超过其他两条键相互作用之和时，这些谱存在能隙；否则，它们无能隙。在我们的分析中，我们考虑各向同性的 Kitaev 相互作用，具有 $K_x = K_y = K_z = K$。在这种条件下，Majorana 费米子表现出类似狄拉克的行为，并与静态的 $\mathbb{Z}_2$ 规范场耦合。翻转 0-通量状态下的键算符会诱导出两个 $\pi$-通量激发，通常称为 visons。Visons 通过引入一个 $\pi$Berry 相位来影响 Majorana 费米子的动能，当 Majorana 费米子绕着一个 $\pi$-通量格子移动时。这样的 vison 的周期排列称为 vison 晶体。

在有效磁场存在的情况下，Lieb 的定理被违反，0 通量不一定是基态。Ref. 24 探索了 YL 模型在均匀磁场中的相图，并表明随着磁场增加，基态从 0 转移到 1/3，$\pi$ 再回到 0 通量。

YL 模型需要一个四维的局部希尔伯特空间，并且具有键方向相互作用。最近，参考文献 30 提出了一种基于部分填充的 $e_g$ 轨道的库格尔-霍姆斯基类型超交换机制来实现 YL 模型的微观路径。

为了获得基态通量配置，我们在温度降至 $T = 10^{-3}K$ 时执行了每次温度下 15,000 步的经典蒙特卡罗模拟。我们对混合通量相重复了 40 次模拟以确保基态稳定。我们还对从蒙特卡罗模拟中获得的通量晶体进行了变分分析，并构建了螺旋情况下的相图。

## III. 结果与讨论

### A. 天旋晶磁化纹理

我们首先考虑如图 2(b) 所示的磁斯格明子晶体。斯格明子晶体由三个螺旋状态叠加而成，这些状态彼

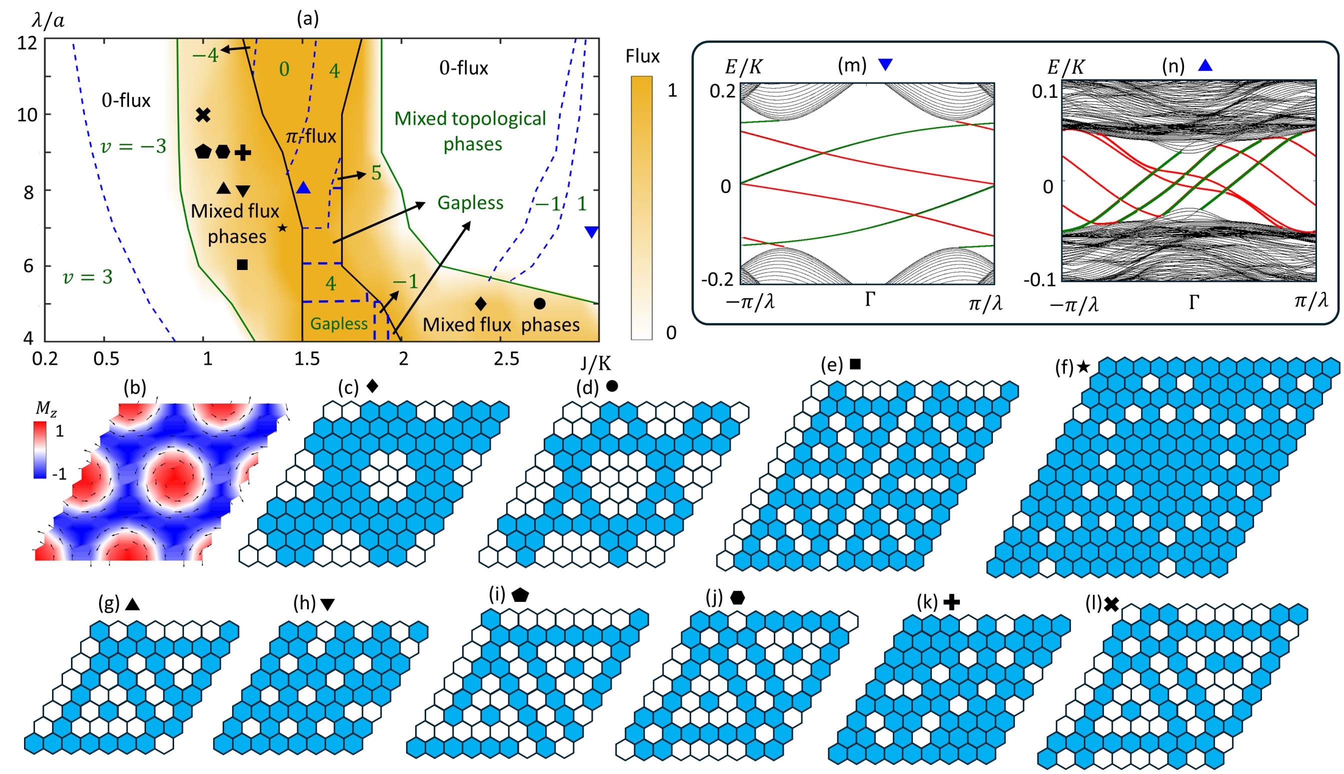


图 2. (a) 天然磁化纹理的愿景晶体相图作为层间耦合 $J$ 和斯格明子波长 $\lambda$ 的函数。实心绿线表示 0 通量与混合相之间的相变，而实心黑线代表 $\pi$ 通量与混合相之间的转变。虚线蓝线表示拓扑相变。(b) 展示了一个具有 $\lambda/a = 5$ 大小斯格明子的 $2\times2$ 斯格明子晶体系统。颜色代表磁化 z 分量，而箭头代表面内磁化分量。(c-f) 用于 $2\times2$ 斯格明子晶体系统的视觉晶体：(c)$J/K = 2.4,\lambda/a = 5$；(d)$J/K = 2.7,\lambda/a = 5$；(e)$J/K = 1.2,\lambda/a = 6$；(f)$J/K = 1.4,\lambda/a = 7$。(g-l) 旋涡晶体对于 $1\times1$ 斯凯灵姆晶体系统：(g)$J/K = 1.1,\lambda/a = 8$；(h)$J/K = 1.2,\lambda/a = 8$；(i)$J/K = 1,\lambda/a = 9$；(j)$J/K = 1.1,\lambda/a = 9$；(k)$J/K = 1.2,\lambda/a = 9$；(l)$J/K = 1,\lambda/a = 10$。(m) 在 0-通量，$\nu = 1$ 相位在 $J/K = 3$ 和 $\lambda/a = 7$ 处的手性边缘状态。红色和绿色表示分别位于顶部和底部开放边界的边缘状态。(n) 在 $\pi$-通量，$\nu = 4$ 相位在 $J/K = 1.5$ 和 $\lambda/a = 8$ 处的手性边缘模式。

此旋转了 $2\pi/3$。螺旋的波长 $\lambda$ 对应于斯格明子的直径。图 2(a) 显示了作为层间耦合 $J/K$ 和 $\lambda$ 函数的相图。对于较小的 $J$，基态保持在 0 通量扇区。随着 $J$ 增加，平均通量持续增加，并出现具有不同平均通量的各种混合相。平均通量增加直到达到 $\pi$ 通量相，且 $\pi$ 通量相在一个特定范围的 $J$ 内保持稳定。随着 $J$ 进一步增加，平均通量减少，导致出现各种混合相，并最终返回到 0 通量。对于较小的斯凯尔敏子，混合相的范围更明显，并且随斯凯尔敏子增大而减小。磁通配置的形状随 $J$ 和 $\lambda$ 的变化而变化。当 $\lambda$ 与某些模式相符时，会出现具有明确形状的磁通晶体，其中一些如图 2(c-l) 所示。不寻常的磁通图案，例如“花朵”图案（图 2(c)）和 Kagome 图案（图 2(d)）可以被稳定。在附录 A，图 5 中，我们展示了几个更大系统尺寸的更多视觉晶体配置。

相图中的主导相是 0 通量和 $\pi$ 通量相。这两种相都表现出有能隙和无能隙的区域，有能隙区域进一步分为平凡相和拓扑相。这些拓扑相由磁泡子赋予马约拉纳费米子的贝里相位稳定。类似的效应被预测在具有手性磁有序 [31] 的三角 Kondo 晶格磁体中存在。这些拓扑相通过马约拉纳费米子的 Bogoliubov-de Gennes 哈密顿量的陈数

$$\nu = \frac{1}{\pi}\sum_{\mu,\nu}\int_{BZ/2} d^2k \ \mathrm{tr}F^{\mu,\nu}_{xy}(k) \tag{5}$$

来区分。这里 $F^{\mu,\nu}_{xy} = \partial_{k_x}A^{\mu,\nu}_y - \partial_{k_y}A^{\mu,\nu}_x + i([A_x, A_y])^{\mu,\nu}$ 是 Berry 曲率，$A^{\mu,\nu} = -i\langle \boldsymbol{n}^\mu(k)|\nabla_k|\boldsymbol{n}^\nu(k)\rangle$ 是非阿贝尔 Berry 连接，而 $\mu,\nu$ 代表定义在半个布里渊区 [24, 32] 上的填充带。对于小的 $J$，0-通量相表现出两个拓扑相，其值分别为 $\nu = 3$ 和-3。另一方面，对于较大的 $J$，重要的拓扑相是 $\nu = 1$ 和 -1，它们出现了大的 $J$。此外，在狭窄的区域中还出现了其他拓扑相，我们将这些描

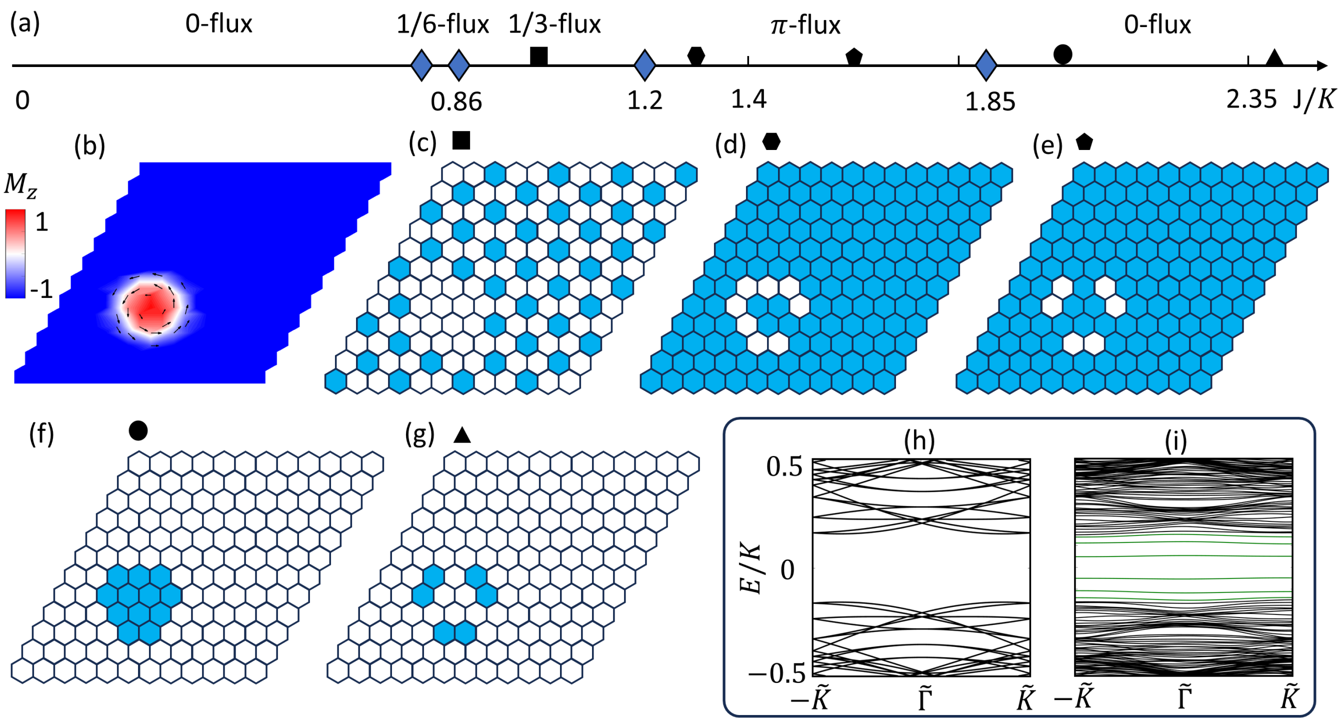


图 3. (a) YL 模型与包含磁泡缺陷的铁磁磁化耦合相图作为层间耦合 $J$ 的函数。(b) 包含磁泡缺陷的铁磁磁化的示意图。系统尺寸为 $12a \times 12a$，磁泡直径为 $\lambda/a = 4$。(c-g) 具有缺陷的磁化天顶子上的通量；(c) 1/3− 通量在 $J/K = 1$ 处；(d) $\pi-$ 通量在 $J/K = 1.2$ 处；(e) $\pi-$ 通量在 $J/K = 1.4$ 处；(f) 0-通量在 $J/K = 2$ 处；(g) 0-通量在 $J/K = 2.4$ 处。1/3− 磁通晶体的 Majorana 费米子激发谱在 $J/K = 1$(h) 时没有和 (i) 有一个磁单极缺陷时的情况。这里 $\tilde{K}$ 和 $\tilde{\Gamma}$ 分别表示约化布里渊区的角部和中心。(i) 中的绿色线条代表位于磁单极缺陷处的局域态。

述为混合拓扑相。类似于 0-通量，$\pi$-通量也表现出既有能隙也有无能隙谱。在有能隙相中，我们观察到具有陈数 $\nu = 0, 1, -1, -4, 4, 5$ 的拓扑相。

### B. 铁磁磁化中含有单个 skyrmion 缺陷

接下来，我们考虑一个具有孤立单个磁泡缺陷的均匀铁磁（FM）磁化。我们在没有磁泡缺陷的情况下通过蒙特卡罗模拟得到的相图与之前的变分分析 [24] 一致，除了我们发现了一个如图 3(a) 所示的小区域具有 1/6 通量。接下来，我们引入磁泡缺陷并探索其影响。我们考虑一个 $12a \times 12a$ 系统，而磁泡的直径为 $\lambda/a = 4$，如图 3(b) 所示。

在小的层间耦合下，在 0 通量区域内，缺陷的存在影响微乎其微。围绕斯格明子的通量配置保持不变，费米面也基本不受影响。随着 $J$ 增加，斯格明子上的通量分布偏离了均匀磁化下的通量分布，导致产生缺陷。对于 1/6 和 1/3 通量，产生的缺陷是 0 通量，如附录 B 中的图 3(c) 和图 6 所示。对于 $\pi-$ 通量，形成的缺陷位于斯格明子的边界上，而斯格明子中心仍然保持 $\pi-$ 通量。对于 $1.2 < J/K < 1.4$，缺陷由一段 0-通量的字符串组成，如图 3(d) 所示。然而，对于 $J/K > 1.4$，沿边界出现三对 0-通量，与 $C_3$ 对称性相关，如图 3(e) 所示。对于 $J/K > 1.4$，在 pi-通量中没有缺陷。随着 $J$ 进一步增加，系统表现出 0 通量并伴随两种类型的缺陷出现。对于 $J/K < 2.35$，如图 3(f) 所示，在 skyrmion 上形成了一个 $\pi$-通量缺陷。然而，对于 $J/K > 2.35$，三对 visons 出现在 skyrmion 的边界上，它们之间由 $C_3$ 对称性关联，如图 3(g) 所示。

Majorana 费米子与铁磁磁化耦合的谱对于 0、$\pi$ 和 1/6 通量而言仍然是无能隙的。然而，对于 1/3 通量，其谱是有能隙的。图 3(i) 和图 3(h) 分别展示了存在或不存在磁斯格明子缺陷时铁磁磁化的带结构。在有能隙相中，在能量间隙内出现额外的平坦带，如图 3(i) 所示。这些平坦带对应于 0 通量缺陷周围的局域态，并由于斯格明子的存在而产生。请注意，这些局

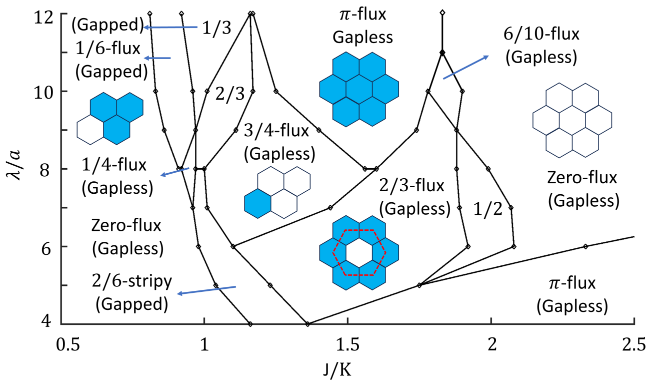


图 4. 通量晶体的相图作为层间耦合 $J$ 和螺旋波长 $\lambda$ 的函数，用于螺旋磁化纹理。

域态是有能隙的，类似于平凡超导体中的涡旋束缚态 [33]。

### C. 螺旋磁化纹理

接下来，我们考虑一个由单个波矢量表征的共面螺旋磁化。尽管共面自旋纹理不会为金属产生新兴磁场，但它们已被证明能够在超导体 [34] 中产生非平凡的贝里相位效应。我们的蒙特卡洛模拟表明可以稳定 11 种不同的通量晶体，如图 7，附录 C 所示。为了准确确定这些相之间的相边界，我们变分地计算了它们的能量并构建了相图，如图 4 所示。对于长波长（$\lambda/a \sim 12$），我们的结果与在均匀磁场 [24] 下观察到的通量配置一致，因为有效磁场在空间中缓慢变化。在此条件下，我们发现有 0、$\pi$、1/3 和 1/6 通量晶体。然而，随着波长的减小，结果偏离了均匀磁场的结果。相图中的主导相是 0 和 $\pi$-通量，尽管 2/3 和 3/4-通量也占据了相图的重要区域。此外，1/2、1/5、2/6 条纹状和 6/10 通量在相图的某些区域内也被稳定下来，如图 4 所示。Majorana 费米子的激发谱对于大部分视觉晶体来说是无能隙的。然而，少数视觉晶体具有 $\nu = 0$ 能隙，包括 1/3、1/6 和 2/6 条纹状通量。

## IV. 结论

我们研究了耦合非共线自旋纹理的 YL 模型的相图，包括磁泡晶体、孤立的磁泡缺陷和螺旋磁化。在这些自旋纹理存在的情况下，YL 模型保持精确可解，这使我们可以进行经典蒙特卡罗模拟以确定基态涡子构型。我们展示了磁泡晶体可以导致非常规通量图案和带隙相，这些相由一个可调的陈数表征，该陈数可达 $\nu = 5$。带有单个磁泡缺陷的铁磁磁化会在通量配置中引入相应的缺陷，并能捕获局域态。螺旋结构也可以导致各种通量构型，但大多数都是无带隙的，仅有少数带隙相具有 $\nu = 0$。有趣的研究方向包括将量子自旋液体与时间依赖的自旋纹理耦合以及通过 Floquet 工程动态生成陈带。

## V. 致谢

我们感谢 NSF 奖助金 DMR-2234352 的支持。我们感谢 ASU 研究计算中心提供的高性能计算资源。

### 附录 A: 愿景晶体用于天体磁化纹理

在图 5 中，我们展示了一些获得的具有天旋晶磁化纹理的视觉晶体。我们使用了一个 $2\times2$ 单元格，这有助于可视化底层天旋晶的周期性和三重旋转对称性。

### 附录 B: 1/6-通量晶体带有 0-通量缺陷

图 6 展示了带有 0 通量缺陷的 1/6 通量晶格，在铁磁磁化状态下出现了一个斯格明子缺陷。均匀的磁化背景产生了 1/6 通量构型，而 0 通量缺陷则精确地位于斯格明子的位置。系统维度为 $12a \times 12a$，包含一个大小为 $4a \times 4a$ 的斯格明子。

### 附录 C: 变分分析

对于螺旋背景，我们最初采用了蒙特卡罗模拟，并确定了十一种愿景晶体，如图 7 所示。随后，我们使用变分分析比较这些构型的能量以构建相图。对于相图上的每个点，我们都计算了每种愿景晶体的能量并将这些能量进行比较来构造相边界。

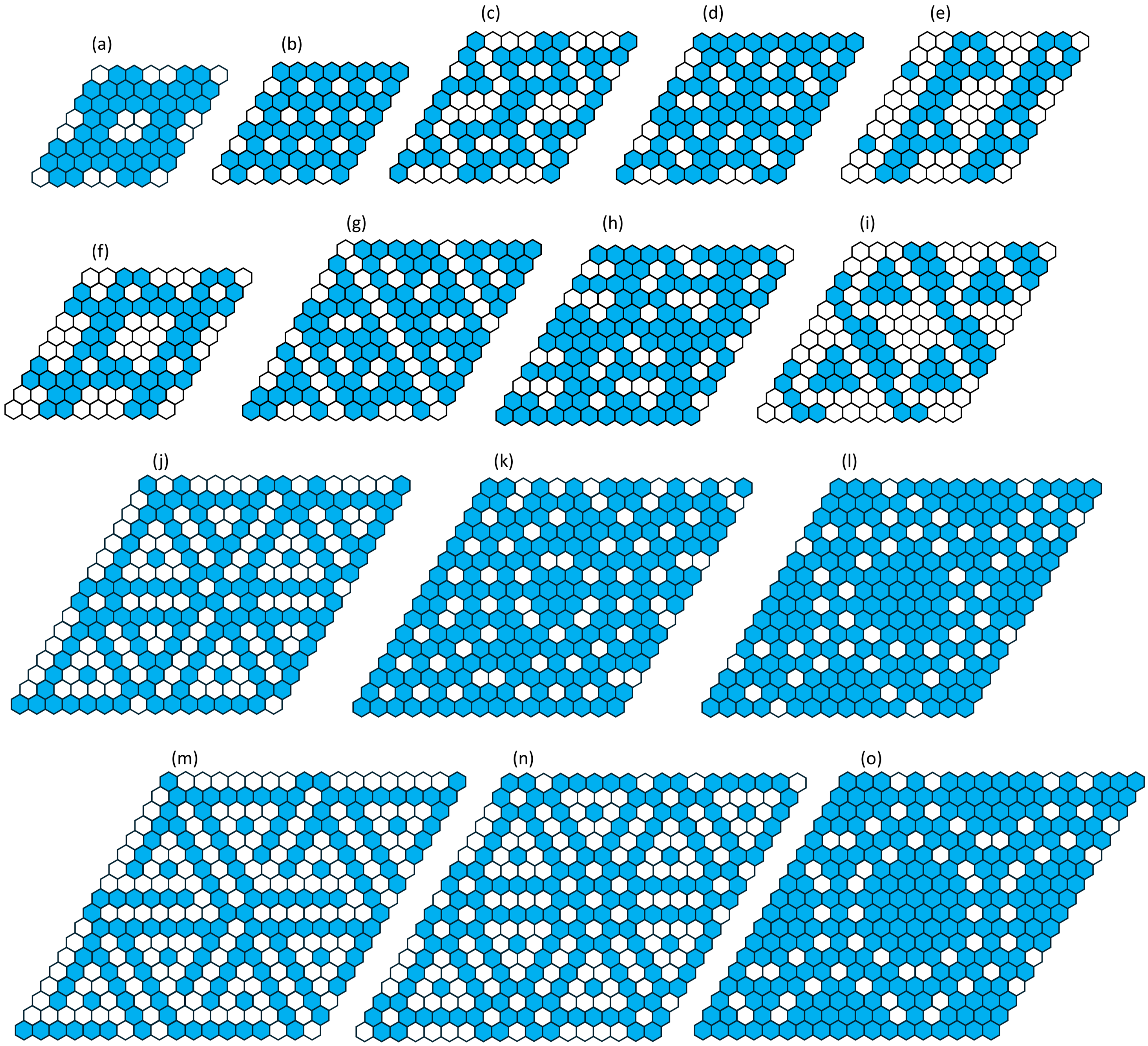


图 5. 来自 skyrmion 晶体磁化纹理的 vison 晶体，用于 2 × 2skyrmion 系统：(a)$J/K = 2.1$,$\lambda/a = 4$；(b)$J/K = 2.5$,$\lambda/a = 4$；(c)$J/K = 1.3$,$\lambda/a = 5$；(d)$J/K = 1.4$,$\lambda/a = 5$；(e)$J/K = 2.2$,$\lambda/a = 5$；(f)$J/K = 2.3$,$\lambda/a = 5$；(g)$J/K = 1.3$,$\lambda/a = 6$；(h)$J/K = 1.9$,$\lambda/a = 6$；(i)$J/K = 2$,$\lambda/a = 6$；(j)$J/K = 1.1$,$\lambda/a = 8$；(k)$J/K = 1.2$,$\lambda/a = 8$；(l)$J/K = 1.8$,$\lambda/a = 8$；(m)$J/K = 1$,$\lambda/a = 9$ 用于 $2 \times 2$；(n)$J/K = 1.1$,$\lambda/a = 9$；(o)$J/K = 1.2$,$\lambda/a = 9$。

[1] U. K. Rößler, A. N. Bogdanov, and C. Pfleiderer, Nature **442**, 797 (2006).

[2] K. Hamamoto, M. Ezawa, and N. Nagaosa, Phys. Rev. B **92**, 115417 (2015).

[3] Y. Shiomi, N. Kanazawa, K. Shibata, Y. Onose, and Y. Tokura, Phys. Rev. B **88**, 064409 (2013).

[4] L. Balents, Nature **464**, 199 (2010).

[5] Y. Zhou, K. Kanoda, and T.-K. Ng, Rev. Mod. Phys. **89**, 025003 (2017).

[6] X.-G. Wen, Rev. Mod. Phys. **89**, 041004 (2017).

[7] J. Knolle and R. Moessner, Annual Review of Condensed Matter Physics **10**, 451 (2019).

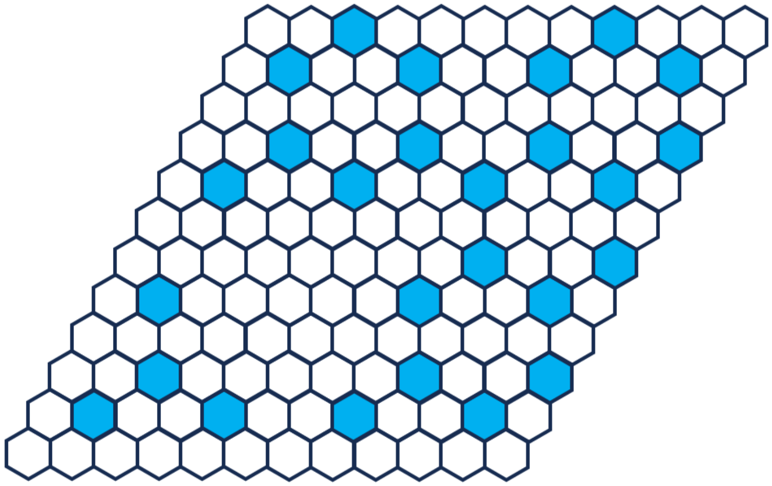

图 6. 1/6-通量晶体在铁磁磁化天顶子顶部具有一个 0-通量缺陷。

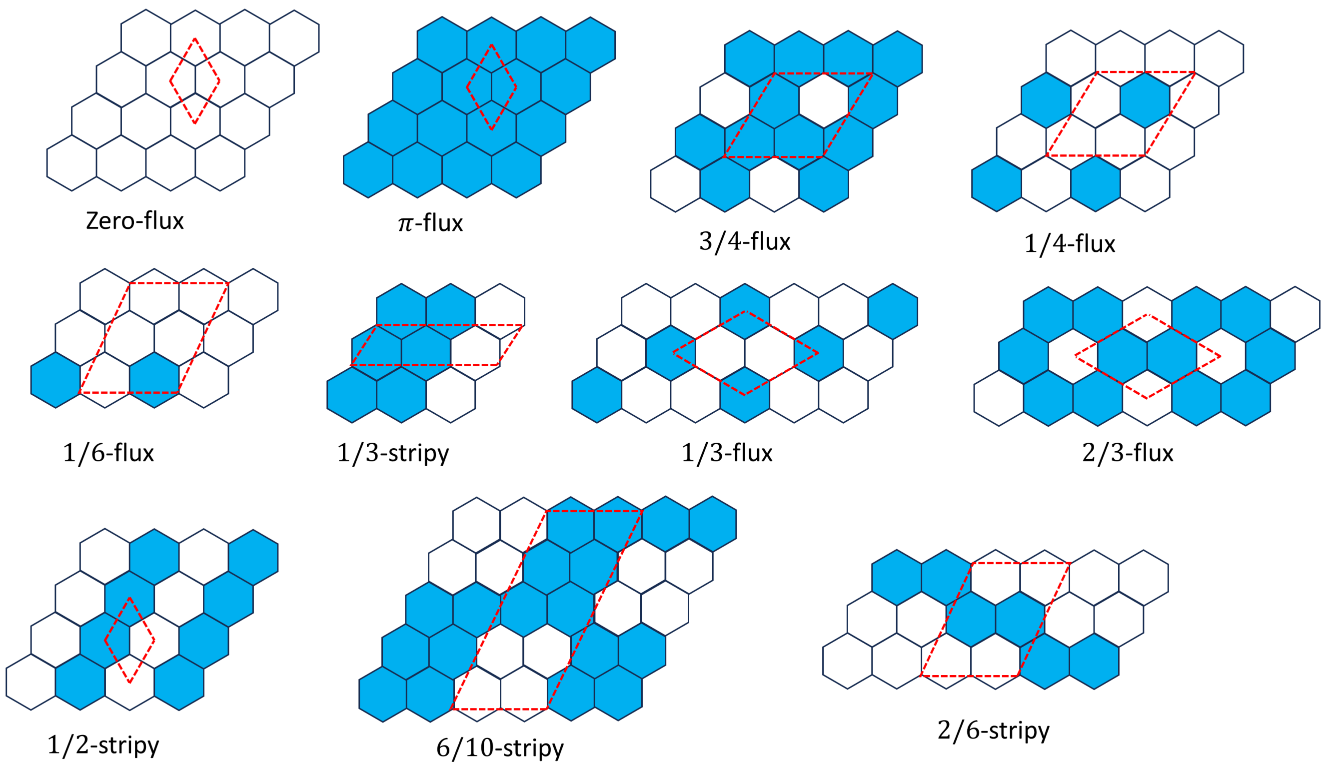


图 7. 变分分析中考虑的螺旋磁化视觉晶体。白色和天蓝色的小方块分别对应于 0（$W=1$）和 $\pi$（$W=-1$）通量。虚线表示单元胞边界。

[8] C. Broholm, R. J. Cava, S. A. Kivelson, D. G. Nocera, M. R. Norman, and T. Senthil, Science **367**, eaay0668 (2020).

[9] A. Kitaev, Annals of Physics **321**, 2 (2006).

[10] J. G. Rau, E. K.-H. Lee, and H.-Y. Kee, Phys. Rev. Lett. **112**, 077204 (2014).

[11] H. Yao and D.-H. Lee, Phys. Rev. Lett. **107**, 087205 (2011).

[12] C. Wu, D. Arovas, and H.-H. Hung, Phys. Rev. B **79**, 134427 (2009).

[13] H. Yao, S.-C. Zhang, and S. A. Kivelson, Phys. Rev. Lett. **102**, 217202 (2009).

[14] V. S. de Carvalho, H. Freire, E. Miranda, and R. G. Pereira, Phys. Rev. B **98**, 155105 (2018).

[15] S. Chulliparambil, U. F. P. Seifert, M. Vojta, L. Janssen, and H.-H. Tu, Phys. Rev. B **102**, 201111 (2020).

[16] U. F. P. Seifert, X.-Y. Dong, S. Chulliparambil, M. Vojta, H.-H. Tu, and L. Janssen, Phys. Rev. Lett. **125**, 257202 (2020).

[17] A. Vijayvargia, E. M. Nica, R. Moessner, Y.-M. Lu, and O. Erten, Phys. Rev. Res. **5**, L022062 (2023).

[18] M. Akram, E. M. Nica, Y.-M. Lu, and O. Erten, Phys. Rev. B **108**, 224427 (2023).

[19] M. A. Keskiner, O. Erten, and M. O. Oktel, Phys. Rev. B **108**, 104208 (2023).

[20] R. Majumder, O. Erten, and A. Mukherjee, Phys. Rev. B **110**, 125155 (2024).

[21] A. Vijayvargia, E. Day-Roberts, A. S. Botana, and O. Erten, "Altermagnets with topological order in kitaev bilayers," (2025), arXiv:2503.09705 [cond-mat.str-el].

[22] M. A. Keskiner, M. O. Oktel, N. B. Perkins, and O. Erten, "Magnetic order through kondo coupling to quantum spin liquids," (2025), arXiv:2502.07884 [cond-mat.str-el].

[23] W. B. Fontana, F. G. Oliviero, R. G. Pereira, and W. M. H. Natori, "The spin-orbital kitaev model: from kagome spin ice to classical fractons," (2025), arXiv:2501.16898 [cond-mat.str-el].

[24] S. Chulliparambil, L. Janssen, M. Vojta, H.-H. Tu, and U. F. P. Seifert, Phys. Rev. B **103**, 075144 (2021).

[25] E. Nica, M. Akram, A. Vijayvargia, R. Moessner, and O. Erten, npj Quantum Mater. 8, 9 (2023).

[26] V. Poliakov, W.-H. Kao, and N. B. Perkins, Phys. Rev. B **110**, 054418 (2024).

[27] Z. Wu, J.-Y. Zhang, and H. Yao, Phys. Rev. Lett. **133**, 236504 (2024).

[28] I. Mandal, APL Quantum **1**, 036104 (2024), https://pubs.aip.org/aip/apq/article-pdf/doi/10.1063/5.0209922/20041535/036104_1_5.0209922.pdf.

[29] E. H. Lieb, Phys. Rev. Lett. **73**, 2158 (1994).

[30] D. Churchill, E. Z. Zhang, and H.-Y. Kee, npj Quantum Materials **10**, 26 (2025).

[31] I. Martin and C. D. Batista, Phys. Rev. Lett. **101**, 156402 (2008).

[32] S. Murakami, N. Nagosa, and S.-C. Zhang, Physical Review B **69**, 235206 (2004).

[33] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity* (McGraw-Hill, Inc., New York, 1996).

[34] S. Nadj-Perge, I. K. Drozdov, B. A. Bernevig, and A. Yazdani, Phys. Rev. B **88**, 020407 (2013).