精确不等式和基于不准确信息的最佳恢复

K. YU. OSIPENKO

Abstract. 论文考虑了一个多维问题，即基于不准确指定的类似类型算子值信息来最优恢复一个算子的问题，该算子的作用是通过将原函数与特殊类型的权重函数相乘来表示。获得了此类算子范数的一个精确不等式。所考虑的问题是对基于空间 $\mathbb{R}^d$ 中其他不准确指定导数的最优导数恢复问题以及一个精确不等式的推广，该不等式类似于 Hardy–Littlewood–Polya 不等式的类比。

1. 一般设置

设 X 是一个线性空间, $Y_0, Y_1, \dots, Y_N$ 是赋范线性空间, 并且 $\Lambda_j\colon X \to Y_j$, $j = 0, 1, \dots, N$ 是线性算子。考虑在集合

$$W = \{\, x \in X : \|\Lambda_j x\|_{Y_j} \le \delta_j,\ \delta_j > 0,\ j = m+1, \dots, N \,\},$$

上最优恢复 Λ_0 的问题，其中 $1 \le m \le N$（如果 $m = N$，则 $W = X$），通过给定误差的操作值 $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$ 来进行。更准确地说，我们将假设对于每个 $x \in W$，我们知道这样的 $y = (y_1, \dots, y_m) \in Y_1 \times \ldots \times Y_m$，使得 $\|\Lambda_j x - y_j\|_{Y_j} \le \delta_j$，$\delta_j > 0$，$j = 1, \dots, m$。

任何已知信息 $y = (y_1, \dots, y_m)$ 的恢复方法都应该给出一个来自 Y_0 的元素，作为 $\Lambda_0 x$ 的近似值。因此，每个恢复方法都是一个映射 $\Phi\colon Y_1 \times \ldots \times Y_m \to Y_0$。方法 Φ 的误差定义为

$$e(\Lambda_0, W, \delta, \Phi) = \sup_{\substack{x \in W,\ y = (y_1, \dots, y_m) \in Y_1 \times \ldots \times Y_m \\ \|\Lambda_j x - y_j\|_{Y_j} \le \delta_j,\ j = 1, \dots, m}} \|\Lambda_0 x - \Phi(y)\|_{Y_0},$$

其中 $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_m)$。

2010 Mathematics Subject Classification. 26DD15, 41A65, 41A46, 49N30.

Key words and phrases. 最优恢复，Carlson 型不等式，精确常数.

我们感兴趣的是那些误差最小的方法，即，那些方法 $\widehat{\Phi}$ 使得

$$e(\Lambda_0, W, \delta, \widehat{\Phi}) = \inf_{\Phi\colon Y_1\times\ldots\times Y_m\to Y_0} e(\Lambda_0, W, \delta, \Phi). \tag{1}$$

我们将这样的方法称为最优恢复方法。等式右侧的量 (1) 将被称为最优恢复的误差并用 $E(\Lambda_0, W, \delta)$ 表示。

设

$$\begin{gathered} \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k_+, \quad \varphi(\cdot) = (\varphi_1(\cdot), \ldots, \varphi_k(\cdot)), \\ \varphi^\alpha(\cdot) = \varphi_1^{\alpha_1}(\cdot) \ldots \varphi_k^{\alpha_k}(\cdot), \end{gathered} \tag{2}$$

其中 $\varphi_j(\cdot)$, $j = 1, \ldots, k$ 是在 $\mathbb{R}^d$ 上的连续（通常来说是复值）函数。设

$$\mathcal{W}_p^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d) = \left\{ x(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}^d) : \varphi^{\alpha^j}(\cdot)x(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}^d),\, j = 1, \ldots, N \right\},$$

其中 $1 \le p \le \infty$，$\alpha^j \in \mathbb{R}^d_+$，$j = 1, \ldots, N$ 和 $\mathcal{A} = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^N\}$。我们定义算子 $\Lambda_j\colon \mathcal{W}_p^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d) \to L_p(\mathbb{R}^d)$ 如下：

$$\Lambda_j x(\cdot) = \varphi^{\alpha^j}(\cdot)x(\cdot), \quad j = 0, 1, \ldots, N.$$

对于这些算子，我们考虑问题 (1)，在其中 $X = \mathcal{W}_p^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d)$,$Y_0 = Y_1 = \ldots = Y_N = L_p(\mathbb{R}^d)$。相应的函数集 W 记为 $W_p^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d, \overline{\delta})$，其中 $\overline{\delta} = (\delta_{m+1}, \ldots, \delta_N)$。当 $\varphi(\xi) = i\xi$ 时的情况在 [1] 中进行了考虑。

所考虑的问题与将多个变量的函数从不准确给出的导数值中恢复的问题一般化愿望相联系（参见 [2, p. 249]）。此外，作为研究问题解决方案的结果，获得了 Hardy–Littlewood–Polya 型精确不等式的一般化（参见 [3]）。

请注意，将恢复问题考虑为一整个算子族的方法在 [4–7] 中被使用了。

2. 一般结果

设

$$Q = \operatorname{co}\{(\alpha^1, \ln 1/\delta_1), \ldots, (\alpha^N, \ln 1/\delta_N)\},$$

其中 $\operatorname{co} A$ 是 A 的凸包。定义函数 $S(\cdot)$ 在 $\mathbb{R}^k$ 上由等式

$$S(\alpha) = \max\{\, z \in \mathbb{R} : (\alpha, z) \in Q \,\} \tag{3}$$

($S(\alpha) = -\infty$, 如果对于所有 z 均有 $(\alpha, z) \notin Q$)。

设 $\alpha^0 \in \operatorname{co}\mathcal{A}$，并设 $z = \langle \alpha, \widehat{\eta} \rangle + \widehat{a}$，其中 $\widehat{\eta} = (\widehat{\eta}_1, \dots, \widehat{\eta}_k) \in \mathbb{R}^k$，是 $S(\cdot)$ 图像在点 α^0 处的支持超平面。根据 Caratheodory 的定理，存在点在这个超平面上 $(\alpha^{j_s}, \ln 1/\delta_{j_s})$,$s = 1, \dots, l$,$l \le k+1$，使得

$$\alpha^0 = \sum_{s=1}^{l} \theta_{j_s} \alpha^{j_s}, \quad \theta_{j_s} > 0,\ s = 1, \dots, l, \quad \sum_{s=1}^{l} \theta_{j_s} = 1. \tag{4}$$

集合

$$M = \{j_1, \dots, j_l\} \cap \{1, \dots, m\}.$$

定理 1. 设 $\alpha^0 \in \operatorname{co}\mathcal{A}$。假设对于任何 $a_1, \dots, a_k > 0$ 存在 $\widehat{\xi} \in \mathbb{R}^d$，使得 $|\varphi_j(\widehat{\xi})| = a_j$，$j = 1, \dots, k$。然后

$$E(\Lambda_0, W_p^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d, \overline{\delta}), \delta) = e^{-S(\alpha^0)}. \tag{5}$$

如果 $M \ne \emptyset$，则所有方法

$$\Phi(y(\cdot))(\cdot) = \sum_{j \in M} a_j(\cdot) y_j(\cdot), \tag{6}$$

其中函数 $a_{j_s}(\cdot)$,$s = 1, \dots, l$ 满足条件

$$\sum_{s=1}^{l} \varphi^{\alpha^{j_s}}(\xi) a_{j_s}(\xi) = \varphi^{\alpha^0}(\xi), \tag{7}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{s=1}^{l} \frac{\delta_{j_s}^{p'} |a_{j_s}(\xi)|^{p'}}{\theta_{j_s}^{p'/p}} \le e^{-p' S(\alpha^0)}, & 1 < p < \infty, \quad \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1, \\ \displaystyle\max_{1 \le s \le l} \frac{\delta_{j_s} |a_{j_s}(\xi)|}{\theta_{j_s}} \le e^{-S(\alpha^0)}, & p = 1, \\ \displaystyle\sum_{s=1}^{l} |a_{j_s}(\xi)| \delta_{j_s} \le e^{-S(\alpha^0)}, & p = \infty, \end{cases} \tag{8}$$

对于几乎所有 $\xi \in \mathbb{R}^d$，都是最优的。

如果 $M = \emptyset$，则方法 $\Phi(y(\cdot))(\cdot) = 0$ 是最优的。

Proof. 我们证明了

$$E(\Lambda_0, W_p^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d, \overline{\delta}), \delta) \ge \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_p^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d, \overline{\delta}) \\ \|\Lambda_j x(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \le \delta_j,\ j = 1, \dots, m}} \|\Lambda_0 x(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}. \tag{9}$$

事实上，对于任何方法 $\Phi\colon (L_2(\mathbb{R}^d))^m \to L_2(\mathbb{R}^d)$ 和任何函数 $x(\cdot) \in W_p^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d, \overline{\delta})$，使得 $\|\Lambda_j x(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \le \delta_j$,$j = 1, \dots, m$，我们有

$$\begin{aligned}2\|\Lambda_0 x(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} &= \|\Lambda_0 x(\cdot) - \Phi(0)(\cdot) - (\Lambda_0(-x(\cdot)) - \Phi(0)(\cdot))\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \\ &\le \|\Lambda_0 x(\cdot) - \Phi(0)(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} + \|\Lambda_0(-x(\cdot)) - \Phi(0)(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \\ &\le 2e(\Lambda_0, W_p^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d, \overline{\delta}), \delta, \Phi).\end{aligned}$$

由于 Φ 的任意性，可以得出

$$\|\Lambda_0 x(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \le E(\Lambda_0, W_p^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d, \overline{\delta}), \delta).$$

取所有满足给定条件的函数 $x(\cdot)$ 的上界，我们得到不等式 (9)。

(9) 右侧的极值问题可以写成以下形式

(10)
$$\||\varphi(\cdot)|^{\alpha^0} x(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \to \max, \quad \||\varphi(\cdot)|^{\alpha^j} x(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \le \delta_j, \quad j = 1, \dots, N,$$

其中 $|\varphi(\xi)|^\alpha = |\varphi_1(\xi)|^{\alpha_1} \dots |\varphi_k(\xi)|^{\alpha_k}$ 对于 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}_+^k$。

令 $\widehat{\xi_{\widehat{\eta}}} \in \mathbb{R}^d$ 为这样的值，使得 $|\varphi_j(\widehat{\xi_{\widehat{\eta}}})| = e^{-\widehat{\eta}_j}$，$j = 1, \dots, k$。考虑当 $1 \le p < \infty$ 的情况。由于函数 $\varphi_s(\cdot)$,$s = 1, \dots, k$ 的连续性，对于任意的 $\varepsilon > 0$ 和任意的 $j \in \{0, 1, \dots, N\}$ 存在 $\widetilde{\delta}_j$ 使得

$$\left| |\varphi(\xi)|^{p\alpha^j} - |\varphi(\widehat{\xi_{\widehat{\eta}}})|^{p\alpha^j} \right| \le \varepsilon \tag{11}$$

对所有的 $\xi \in B_{\widetilde{\delta}_j}(\widehat{\xi_{\widehat{\eta}}})$ 成立，其中

$$B_\delta(\xi_0) = \{\, \xi \in \mathbb{R}^d : |\xi - \xi_0| < \delta \,\}.$$

设 $\widetilde{\delta} = \min\{\widetilde{\delta}_1, \dots, \widetilde{\delta}_N\}$。然后对于所有 $\xi \in B_{\widetilde{\delta}}(\widehat{\xi_{\widehat{\eta}}})$ 和所有 $j \in \{0, 1, \dots, N\}$ 不等式 (11) 成立。

将 $\widehat{A} = e^{-2\widehat{a}}$ 和

$$x_{\varepsilon,p}(\xi) = \begin{cases} \left(\dfrac{\widehat{A}}{|B_{\widetilde{\delta}}(\widehat{\xi_{\widehat{\eta}}})|\gamma_\varepsilon} \right)^{1/p}, & \xi \in B_{\widetilde{\delta}}(\widehat{\xi_{\widehat{\eta}}}), \\ 0, & \xi \notin B_{\widetilde{\delta}}(\widehat{\xi_{\widehat{\eta}}}), \end{cases}$$

放在

$$\gamma_\varepsilon = 1 + \varepsilon \frac{\widehat{A}}{\min_{1 \le j \le N} \delta_j^p}$$

处（$|B_\delta(\widehat{\xi_{\widehat{\eta}}})|$ 表示球 $B_\delta(\widehat{\xi_{\widehat{\eta}}})$ 的体积）。

我们有

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(\xi)|^{p\alpha^j} |x_{\varepsilon,p}(\xi)|^p \, d\xi \le \frac{\widehat{A}}{\gamma_\varepsilon} \left(|\varphi(\widehat{\xi_{\widehat{\eta}}})|^{p\alpha^j} + \varepsilon \right) = \frac{e^{-p(\langle \alpha^j, \widehat{\eta} \rangle + \widehat{a})} + \widehat{A}\varepsilon}{\gamma_\varepsilon}.$$

由于 $z = \langle \alpha, \widehat{\eta} \rangle + \widehat{a}$ 是 Q 的支持超平面的方程，我们得到

$$\langle \alpha^j, \widehat{\eta} \rangle + \widehat{a} \ge \ln 1/\delta_j.$$

因此，

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(\xi)|^{p\alpha^j} |x_{\varepsilon,p}(\xi)|^p \, d\xi \le \frac{\delta_j^p + \widehat{A}\varepsilon}{\gamma_\varepsilon} \le \delta_j^p.$$

从而，$x_{\varepsilon,p}(\cdot)$ 是极端问题 (10) 的一个可允许函数。因此，考虑到 (9) 和 (11)，我们得到

$$E^p(\Lambda_0, W_p^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d, \overline{\delta}), \delta) \ge \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(\xi)|^{p\alpha^0} |x_\varepsilon(\xi)|^p \, d\xi \ge \frac{\widehat{A}}{\gamma_\varepsilon} \left(|\varphi(\widehat{\xi_{\widehat{\eta}}})|^{p\alpha^0} - \varepsilon \right)$$
$$= \frac{e^{-p(\langle \alpha^0, \widehat{\eta} \rangle + \widehat{a})} - \widehat{A}\varepsilon}{\gamma_\varepsilon}.$$

令 ε 趋于零，我们有

$$E(\Lambda_0, W_p^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d, \overline{\delta}), \delta) \ge e^{-(\langle \alpha^0, \widehat{\eta} \rangle + \widehat{a})} = e^{-S(\alpha^0)}.$$

现在令 $p = \infty$。类似于之前的推理，对于任意的 $\varepsilon > 0$ 存在 $\widetilde{\delta} > 0$ 使得对于所有的 $\xi \in B_{\widetilde{\delta}}(\widehat{\xi_{\widehat{\eta}}})$ 和所有的 $j \in \{0, 1, \dots, N\}$ 不等式

$$\left| |\varphi(\xi)|^{\alpha^j} - |\varphi(\widehat{\xi_{\widehat{\eta}}})|^{\alpha^j} \right| \le \varepsilon$$

成立。

将

$$x_{\varepsilon,\infty}(\xi) = \begin{cases} \widehat{A}\widetilde{\gamma}_\varepsilon^{-1}, & \xi \in B_{\widetilde{\delta}}(\widehat{\xi_{\widehat{\eta}}}), \\ 0, & \xi \notin B_{\widetilde{\delta}}(\widehat{\xi_{\widehat{\eta}}}), \end{cases}$$

置于何处

$$\widetilde{\gamma}_\varepsilon = 1 + \varepsilon \frac{\widehat{A}}{\min_{1 \le j \le N} \delta_j}$$

我们有

$$\||\varphi(\cdot)|^{\alpha^j}x_{\varepsilon,\infty}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \le \frac{\widehat{A}}{\widetilde{\gamma}_\varepsilon}\left(|\varphi(\widehat{\xi}_{\widehat{\eta}})|^{p\alpha^j}+\varepsilon\right) = \frac{e^{-(\langle\alpha^j,\widehat{\eta}\rangle+\widehat{a})}+\widehat{A}\varepsilon}{\widetilde{\gamma}_\varepsilon} \le \delta_j.$$

因此，$x_{\varepsilon,\infty}(\cdot)$ 是极值问题 (10) 的一个可容许函数。从而，

$$E(\Lambda_0, W_p^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d,\overline{\delta}),\delta) \ge \||\varphi(\cdot)|^{\alpha^0}x_{\varepsilon,\infty}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \ge \frac{\widehat{A}}{\widetilde{\gamma}_\varepsilon}\left(|\varphi(\widehat{\xi}_{\widehat{\eta}})|^{\alpha^0}-\varepsilon\right) = \frac{e^{-(\langle\alpha^0,\widehat{\eta}\rangle+\widehat{a})}-\widehat{A}\varepsilon}{\widetilde{\gamma}_\varepsilon}.$$

使 ε 趋于零，我们得到

$$E(\Lambda_0, W_p^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d,\overline{\delta}),\delta) \ge e^{-(\langle\alpha^0,\widehat{\eta}\rangle+\widehat{a})} = e^{-S(\alpha^0)}. \tag{12}$$

现在我们证明方法 (6) 的最优性。为了估计方法 (6) 的误差，我们考虑以下极值问题

$$\left\|\varphi^{\alpha^0}(\cdot)x(\cdot)-\sum_{j\in M}a_j(\cdot)y_j(\cdot)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \to \max, \tag{13}$$
$$\|\varphi^{\alpha^j}(\cdot)x(\cdot)-y_j(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \le \delta_j,\ j=1,\dots,m,$$
$$\|\varphi^{\alpha^j}(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \le \delta_j,\ j=m+1,\dots,N.$$

对于 $M=\emptyset$，相应的和被认为等于零。

将 $z_j(\xi)=\varphi^{\alpha^j}(\xi)x(\xi)-y_j(\xi)$，$j=1,\dots,m$ 和

$$\omega(\xi)=\varphi^{\alpha^0}(\xi)-\sum_{j\in M}\varphi^{\alpha^j}(\xi)a_j(\xi).$$

放入则 (13) 可以写成形式

$$\left\|\omega(\xi)x(\xi)+\sum_{j\in M}a_j(\xi)z_j(\xi)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \to \max,$$
$$\|z_j(\xi)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \le \delta_j,\ j=1,\dots,m,$$
$$\|\varphi^{\alpha^j}(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \le \delta_j,\ j=m+1,\dots,N.$$

从 (7) 可知

$$\omega(\xi)=\sum_{j\in\{j_1,\dots,j_l\}\setminus M}\varphi^{\alpha^j}(\xi)a_j(\xi)x(\xi).$$

因此，我们需要估计以下问题的值

$$\Big\|\sum_{j\in\{j_1,\ldots,j_l\}\setminus M}\varphi^{\alpha^j}(\xi)a_j(\xi)x(\xi)+\sum_{j\in M}a_j(\xi)z_j(\xi)\Big\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}\to\max,$$

$$\|z_j(\xi)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}\le\delta_j,\ j=1,\ldots,m,$$

$$\|\varphi^{\alpha^j}(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}\le\delta_j,\ j=m+1,\ldots,N.$$

令 $1\le p<\infty$。设

$$\widehat{\lambda}_{j_s}=\theta_{j_s}e^{p\langle\alpha^{j_s}-\alpha^0,\widehat{\eta}\rangle},\quad s=1,\ldots,l,$$

考虑 $1<p<\infty$ 的情况。则由霍尔德不等式我们有

$$\begin{aligned}&\Big|\sum_{j\in\{j_1,\ldots,j_l\}\setminus M}\varphi^{\alpha^j}(\xi)a_j(\xi)x(\xi)+\sum_{j\in M}a_j(\xi)z_j(\xi)\Big|\\&\quad=\Big|\sum_{j\in\{j_1,\ldots,j_l\}\setminus M}\frac{a_j(\xi)}{\widehat{\lambda}_j^{1/p}}\widehat{\lambda}_j^{1/p}\varphi^{\alpha^j}(\xi)x(\xi)+\sum_{j\in M}\frac{a_j(\xi)}{\widehat{\lambda}_j^{1/p}}\widehat{\lambda}_j^{1/p}z_j(\xi)\Big|\\&\quad\le Q_p(\xi)\bigg(\sum_{j\in\{j_1,\ldots,j_l\}\setminus M}\widehat{\lambda}_j|\varphi(\xi)|^{p\alpha^j}|x(\xi)|^p+\widehat{\lambda}_j|z_j(\xi)|^p\bigg)^{1/p},\end{aligned}$$

其中

$$Q_p(\xi)=\bigg(\sum_{s=1}^{l}\frac{|a_{j_s}(\xi)|^{p'}}{\widehat{\lambda}_{j_s}^{p'/p}}\bigg)^{1/p'}.$$

鉴于等式

$$\ln 1/\delta_{j_s}=\langle\alpha^{j_s},\widehat{\eta}\rangle+\widehat{a},\quad s=1,\ldots,l,\quad S(\alpha^0)=\langle\alpha^0,\widehat{\eta}\rangle+\widehat{a}$$

我们得到

$$\widehat{\lambda}_{j_s}=\theta_{j_s}e^{p\langle\alpha^{j_s}-\alpha^0,\widehat{\eta}\rangle}=\theta_{j_s}e^{p(\ln 1/\delta_{j_s}-S(\alpha^0))}=\frac{\theta_{j_s}}{\delta_{j_s}^p}e^{-pS(\alpha^0)}.$$

因此，

$$Q_p(\xi)=\bigg(e^{p'S(\alpha^0)}\sum_{s=1}^{l}\frac{\delta_{j_s}^{p'}|a_{j_s}(\xi)|^{p'}}{\theta_{j_s}^{p'/p}}\bigg)^{1/p'}.\tag{14}$$

由 (8) 可知，对于几乎所有 $\xi \in \mathbb{R}^d$ 都有 $Q_p(\xi) \leq 1$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}\Bigg\|\sum_{j\in\{j_1,\dots,j_l\}\setminus M}&\varphi^{\alpha^j}(\xi)a_j(\xi)x(\xi)+\sum_{j\in M}a_j(\xi)z_j(\xi)\Bigg\|^p_{L_p(\mathbb{R}^d)}\\ &\leq\sum_{j\in\{j_1,\dots,j_l\}\setminus M}\widehat{\lambda}_j\int_{\mathbb{R}^d}\varphi|(\xi)|^{p\alpha^j}|x(\xi)|^p\,d\xi+\sum_{j\in M}\widehat{\lambda}_j\int_{\mathbb{R}^d}|z_j(\xi)|^p\,d\xi\\ &\leq\sum_{s=1}^l\widehat{\lambda}_{j_s}\delta^p_{j_s}=\sum_{s=1}^l\theta_{j_s}e^{-pS(\alpha^0)}=e^{-pS(\alpha^0)}.\end{aligned}$$

由此，

$$e(\Lambda_0,W_p^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d,\overline{\delta}),\delta,\Phi)\leq e^{-S(\alpha^0)}.$$

考虑到 (12)，这意味着方法 (6) 是最佳的且等式 (5) 成立。

如果 $p=1$，我们使用不等式

$$\begin{aligned}\Bigg|\sum_{j\in\{j_1,\dots,j_l\}\setminus M}&\varphi^{\alpha^j}(\xi)a_j(\xi)x(\xi)+\sum_{j\in M}a_j(\xi)z_j(\xi)\Bigg|\\ &\leq Q_1(\xi)\Bigg(\sum_{j\in\{j_1,\dots,j_l\}\setminus M}\widehat{\lambda}_j|\varphi(\xi)|^{\alpha^j}|x(\xi)|+\widehat{\lambda}_j|z_j(\xi)|\Bigg),\end{aligned}$$

其中

$$Q_1(\xi)=\max_{1\leq s\leq l}\frac{|a_{j_s}(\xi)|}{\widehat{\lambda}_{j_s}}.$$

通过与 (14) 的类比，我们得到

$$Q_1(\xi)=e^{S(\alpha^0)}\max_{1\leq s\leq l}\frac{\delta_{j_s}|a_{j_s}(\xi)|}{\theta_{j_s}}.$$

使用与 $1<p<\infty$ 相同论证,我们得到在所考虑的情况下定理的断言。

对于 $p=\infty$ 我们使用不等式

$$\begin{aligned}\Bigg\|\sum_{j\in\{j_1,\dots,j_l\}\setminus M}&\varphi^{\alpha^j}(\xi)a_j(\xi)x(\xi)+\sum_{j\in M}a_j(\xi)z_j(\xi)\Bigg\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}\\ &\leq\Bigg\|\sum_{s=1}^l|a_{j_s}(\xi)|\delta_{j_s}\Bigg\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

由 (8) 可知

$$e(\Lambda_0,W_\infty^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d,\overline{\delta}),\delta,\Phi)\leq e^{-S(\alpha^0)}.$$

因此，利用 (12)，我们得到方法 (6) 是最优的且 (5) 成立。

还需证明满足条件 (7) 和 (8) 的函数集合 $\alpha_{j_s}(\cdot)$,$s=1,\dots,l$ 非空。设 $1\le p<\infty$。考虑函数

$$f(\eta)=-1+\sum_{s=1}^{l}\widehat{\lambda}_{j_s}e^{-p\langle\alpha^{j_s}-\alpha^0,\,\eta\rangle},\quad \eta\in\mathbb{R}^k.$$

这是一个显然的凸函数，并且很容易验证 $f(\widehat{\eta})=0$ 以及该函数在点 $\widehat{\eta}$ 处的导数也为零。因此，对于所有 $\eta\in\mathbb{R}^k$，$f(\eta)\ge 0$。从而，

$$f_1(\eta)=e^{-p\langle\alpha^0,\,\eta\rangle}f(\eta)\ge 0$$

对于所有 $\eta\in\mathbb{R}^k$。将 $e^{-\eta_j}=|\varphi_j(\xi)|$，$j=1,\dots,k$，我们得到

$$g(\xi)=-|\varphi(\xi)|^{p\alpha^0}+\sum_{s=1}^{l}\widehat{\lambda}_{j_s}|\varphi(\xi)|^{p\alpha^{j_s}}\ge 0$$

对于所有 $\xi\in\mathbb{R}^d$。因此，

$$\frac{|\varphi(\xi)|^{p\alpha^0}}{\sum_{s=1}^{l}\widehat{\lambda}_{j_s}|\varphi(\xi)|^{p\alpha^{j_s}}}\le 1.$$

设

$$a_{j_s}(\xi)=\varphi^{\alpha^0}(\xi)\frac{\widehat{\lambda}_{j_s}\varphi^{(p/2-1)\alpha^{j_s}}(\xi)\overline{\varphi}^{p/2\alpha^{j_s}}(\xi)}{\sum_{s=1}^{l}\widehat{\lambda}_{j_s}|\varphi(\xi)|^{p\alpha^{j_s}}},\quad s=1,\dots,l.$$

容易验证条件 (7) 是有效的。如果 $1<p<\infty$，则

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{l}\frac{\delta_{j_s}^{p'}|a_{j_s}(\xi)|^{p'}}{\theta_{j_s}^{p'/p}}&=e^{-p'S(\alpha^0)}\sum_{s=1}^{l}\frac{|a_{j_s}(\xi)|^{p'}}{\lambda_{j_s}^{p'/p}}\\&=e^{-p'S(\alpha^0)}\left(\frac{|\varphi(\xi)|^{p\alpha^0}}{\sum_{s=1}^{l}\widehat{\lambda}_{j_s}|\varphi(\xi)|^{p\alpha^{j_s}}}\right)^{p'-1}\le e^{-p'S(\alpha^0)}.\end{aligned}$$

如果 $p=1$，则

$$\frac{\delta_{j_s}|a_{j_s}(\xi)|}{\theta_{j_s}}=e^{-S(\alpha^0)}\frac{|\varphi(\xi)|^{\alpha^0}}{\sum_{s=1}^{l}\widehat{\lambda}_{j_s}|\varphi(\xi)|^{\alpha^{j_s}}}\le e^{-S(\alpha^0)},\quad s=1,\dots,l.$$

如果 $p=\infty$，我们设定

$$a_{j_s}(\xi)=\varphi^{\alpha^0}(\xi)\frac{\widehat{\lambda}_{j_s}e^{-i\arg\{\varphi^{\alpha^{j_s}}(\xi)\}}}{\sum_{s=1}^{l}\widehat{\lambda}_{j_s}|\varphi(\xi)|^{\alpha^{j_s}}},\quad s=1,\dots,l,$$

其中

$$\widehat{\lambda}_{j_s} = \frac{\theta_{j_s}}{\delta_{j_s}} e^{-S(\alpha^0)}, \quad s = 1, \dots, l.$$

那么条件 (7) 显然被满足，且

$$\sum_{s=1}^{l} |a_{j_s}(\xi)|\delta_{j_s} = e^{-S(\alpha^0)} \frac{|\varphi(\xi)|^{\alpha^0}}{\sum_{s=1}^{l} \widehat{\lambda}_{j_s} |\varphi(\xi)|^{\alpha^{j_s}}} \le e^{-S(\alpha^0)}.$$

□

注意从定理 1的证明可以得出

$$\sup_{\substack{x(\cdot)\in W_p^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d,\bar{\delta}) \\ \|\Lambda_j x(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \le \delta_j,\ j=1,\dots,m}} \|\Lambda_0 x(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = e^{-S(\alpha^0)} = \prod_{s=1}^{l} \delta_{j_s}^{\theta_{j_s}} \tag{15}$$

$$= \min\left\{ \prod_{j=1}^{N} \delta_j^{\theta_j} : \theta_j \ge 0,\ j = 1, \dots, N,\ \sum_{j=1}^{N} \theta_j = 1,\ \alpha^0 = \sum_{j=1}^{N} \theta_j \alpha^j \right\}.$$

3. 精确的 Carlson 类型不等式

卡尔森不等式 [8]

$$\|x(t)\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} \le \sqrt{\pi} \|x(t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^{1/2} \|tx(t)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}^{1/2}, \quad \mathbb{R}_+ = [0, +\infty),$$

被许多作者推广（见 [9–15]）。在 [14] 中，我们找到了如下不等式中的精确常数

$$\|w(\cdot)x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} \le K \|w_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu))}^{\gamma} \|w_1(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)}^{1-\gamma}, \tag{16}$$

其中 T 是线性空间中的一个锥体，$w(\cdot)$、$w_0(\cdot)$ 和 $w_1(\cdot)$ 是齐次函数，μ 是齐次测度，并且 $1 \le q < p, r < \infty$（对于 $T = \mathbb{R}^d$ 而言，精确不等式是在 [12] 中获得的）。回忆一下，常数 K 被称为精确的，如果它不能被更小的值替换。在这种情况下，不等式被称为精确的。

加权不等式和导数的不等式并不总是具有乘法形式。例如，对于在带状区域 $S_\beta = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \beta\}$ 内解析且有界的函数 $x(t) \not\equiv 0$，

不等式

$$\|x'(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})} \le \frac{1}{2\beta}\|x(\cdot)\|_{C(\mathbb{R})}\|x(\cdot)\|^2_{C(S_\beta)} \times \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\|x(\cdot)\|^4_{C(S_\beta)}\cos^2 t + \|x(\cdot)\|^4_{C(\mathbb{R})}\sin^2 t}}$$

成立（见 [2, . 177]）。

在此方面，使用精确不等式的更一般定义变得必要。设 X 是一个线性空间，$Y_0, Y_1, \ldots, Y_N$ 是赋范线性空间，$\Lambda_j\colon X \to Y_j$，$j = 0, 1, \ldots, N$ 为线性算子。我们说不等式

(17)

$$\|\Lambda_0 x\|_{Y_0} \le \kappa(\Lambda x), \quad \Lambda x = (\|\Lambda_1 x\|_{Y_1}, \ldots, \|\Lambda_N x\|_{Y_N}), \quad \kappa\colon \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}_+,$$

是精确的，如果对于所有 $x \in X$ 都成立，并且不存在这样的 $x_0 \in X$ 使得

$$\sup_{\substack{x\in X\\ \|\Lambda_j x\|_{Y_j} \le \|\Lambda_j x_0\|_{Y_j},\ j=1,\ldots,N}} \|\Lambda_0 x\|_{Y_0} < \kappa(\Lambda x_0).$$

命题 1. 令 $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_N) \in \mathbb{R}^N_+$。设

$$\kappa(\delta) = \sup_{\substack{x\in X\\ \|\Lambda_j x\|_{Y_j} \le \delta_j,\ j=1,\ldots,N}} \|\Lambda_0 x\|_{Y_0}.$$

然后不等式 (17) 是精确的。

Proof. 对于 $x \in X$ 我们给出

$$\delta = (\|\Lambda_1 x\|_{Y_1}, \ldots, \|\Lambda_N x\|_{Y_N}).$$

根据 $\kappa(\cdot)$ 的定义，不等式 (17) 成立。假设它不是精确的。然后存在一个元素 $x_0 \in X$，使得

$$\sup_{\substack{x\in X\\ \|\Lambda_j x\|_{Y_j} \le \delta^0_j,\ j=1,\ldots,N}} \|\Lambda_0 x\|_{Y_0} < \kappa(\delta^0),$$

其中

$$\delta^0 = (\delta^0_1, \ldots, \delta^0_N) = (\|\Lambda_1 x_0\|_{Y_1}, \ldots, \|\Lambda_N x_0\|_{Y_N}).$$

这与 $\kappa(\cdot)$ 的定义相矛盾。 □

极值问题 (15) 的解使我们能够得到新的卡洛森类型精确不等式。

设 $\varphi(\cdot)=(\varphi_1(\cdot),\ldots,\varphi_k(\cdot))$。假设 $\varphi_1(\cdot),\ldots,\varphi_k(\cdot)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上是连续的，并且对于任何 $a_1,\ldots,a_k>0$ 存在一个 $\widehat{\xi}\in\mathbb{R}^d$，使得 $|\varphi_j(\widehat{\xi})|=a_j$，$j=1,\ldots,k$。由命题 1和 (15) 可知，对于 $\alpha^0\in\operatorname{co}\{\alpha^1,\ldots,\alpha^N\}$ 我们有精确不等式

$$\|\varphi^{\alpha^0}(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}\le\min\biggl\{\prod_{j=1}^N\|\varphi^{\alpha^j}(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^{\theta_j}:\\ \theta_j\ge0,\ j=1,\ldots,N,\ \sum_{j=1}^N\theta_j=1,\ \alpha^0=\sum_{j=1}^N\theta_j\alpha^j,\biggr\}.$$

特别是对于 $\varphi(\xi)=i\xi$ 和 $\alpha^0\in\operatorname{co}\{\alpha^1,\ldots,\alpha^N\}$，我们得到精确不等式

$$\||\xi|^{\alpha^0}x(\xi)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}\le\min\biggl\{\prod_{j=1}^N\||\xi|^{\alpha^j}x(\xi)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^{\theta_j}:\\ \theta_j\ge0,\ j=1,\ldots,N,\ \sum_{j=1}^N\theta_j=1,\ \alpha^0=\sum_{j=1}^N\theta_j\alpha^j\biggr\}.$$

再考虑一个示例。令

$$\varphi(\xi)=\psi_\theta(\xi)=\bigl(|\xi_1|^\theta+\ldots+|\xi_d|^\theta\bigr)^{2/\theta},\quad\theta>0.\tag{18}$$

在这种情况下，$k=1$，Q 是在 $\mathbb{R}^2$ 上的凸集，而 $S(\cdot)$ 是一条折线。对于 $\alpha^0\in\operatorname{co}\{\alpha^1,\ldots,\alpha^N\}$ 我们有精确的不等式

$$\|\psi_\theta^{\alpha^0}(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}\le\min\biggl\{\|\psi_\theta^{\alpha^{j_1}}(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^{\lambda}\|\psi_\theta^{\alpha^{j_2}}(\cdot)x(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^{1-\lambda}:\\ 0\le\lambda\le1,\quad\alpha^0=\lambda\alpha^{j_1}+(1-\lambda)\alpha^{j_2}\biggr\}.$$

4. 微分算子的恢复及精确不等式

使用记号 (2)，我们设定

$$\mathcal{W}_F^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d)=\Bigl\{\,x(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d):\varphi^{\alpha^j}(\cdot)Fx(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d),\,j=1,\ldots,N\,\Bigr\},$$

其中 $Fx(\cdot)$ 是 $x(\cdot)$ 的傅里叶变换。定义算子 $\Lambda_j\colon \mathcal{W}_F^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d), j=0,1,\dots,N$ 如下

$$\Lambda_j x(\cdot)=F^{-1}(\varphi^{\alpha^j}(\cdot)Fx(\cdot))(\cdot),\quad j=0,1,\dots,N. \tag{19}$$

考虑在集合

$$W_F^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d)=\{\,x(\cdot)\in\mathcal{W}_F^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d):\|\Lambda_j x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\le\delta_j,\ \delta_j>0,\\ j=m+1,\dots,N\,\}$$

上通过带有误差的 $\Lambda_1,\dots,\Lambda_m$ 值来最优恢复 Λ_0 的问题 (1)。

通过傅里叶变换，我们有

$$e(\Lambda_0,W_F^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d),\delta,\Phi)\\ =\frac{1}{(2\pi)^d}\sup_{\substack{x(\cdot)\in W_F^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d),\ y=(y_1,\dots,y_m)\in(L_2(\mathbb{R}^d))^m\\ \frac{1}{(2\pi)^d}\|\varphi^{\alpha^j}(\cdot)Fx(\cdot)-Fy_j(\cdot)\|_{Y_j}\le\delta_j,\ j=1,\dots,m}}\|\varphi^{\alpha^0}(\cdot)Fx(\cdot)\\ -F(\Phi(y))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

令

$$z(\cdot)=\frac{1}{(2\pi)^d}Fx(\cdot),\quad z_j(\cdot)=\frac{1}{(2\pi)^d}Fy_j(\cdot)\quad j=1,\dots,m,$$

很容易验证，所考虑的问题被简化为前面定理 1中对 $p=2$ 所讨论的情况。

定理 2. 令定理 1 的条件对于函数 $\varphi_j(\cdot)$、$j=1,\dots,k$ 和 $\alpha^0\in\operatorname{co}\mathcal{A}$ 成立。则

$$E(\Lambda_0,W_F^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d),\delta)=e^{-S(\alpha^0)}.$$

如果 $M\neq\emptyset$，则所有形式为

$$\Phi(y(\cdot))(\cdot)=F^{-1}\Bigg(\sum_{j\in M}a_j(\cdot)Fy_j(\cdot)\Bigg),$$

的方法，其中函数 $a_{j_s}(\cdot)$，$s = 1, \dots, l$ 满足条件

$$\sum_{s=1}^{l} \varphi^{\alpha^{j_s}}(\xi) a_{j_s}(\xi) = \varphi^{\alpha^0}(\xi),$$

$$\sum_{s=1}^{l} \frac{\delta_{j_s}^2 |a_{j_s}(\xi)|^2}{\theta_{j_s}} \le e^{-2S(\alpha^0)}$$

对于几乎所有 $\xi \in \mathbb{R}^d$ 而言，都是最优的。

如果 $M = \emptyset$，则方法 $\Phi(y(\cdot))(\cdot) = 0$ 是最优的。

确切的不等式

$$\|\Lambda_0(\cdot)x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \prod_{s=1}^{l} \|\Lambda_{j_s}(\cdot)x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\theta_{j_s}}$$

成立。

对于 $\varphi(\xi) = i\xi$，由 (19) 定义的操作符 Λ_j 是阶数为 α^j 的 Weyl 导数，表示为 D^{α^j}。因此，根据定理 2得出以下结果。

推论 1 ([2] 定理 5.19). 设 $\alpha^0 \in \operatorname{co} \mathcal{A}$。然后

$$E(D^{\alpha^0}, W_F^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d), \delta) = e^{-S(\alpha^0)}.$$

如果 $M \ne \emptyset$，则所有形式的方法

$$\Phi(y(\cdot))(\cdot) = F^{-1}\Bigg(\sum_{j\in M} a_j(\cdot) F y_j(\cdot)\Bigg),$$

其中函数 $a_{j_s}(\cdot)$，$s = 1, \dots, l$ 满足条件

$$\sum_{s=1}^{l} (i\xi)^{\alpha^{j_s}} a_{j_s}(\xi) = (i\xi)^{\alpha^0},$$

$$\sum_{s=1}^{l} \frac{\delta_{j_s}^2 |a_{j_s}(\xi)|^2}{\theta_{j_s}} \le e^{-2S(\alpha^0)}$$

对于几乎所有 $\xi \in \mathbb{R}^d$ 都是最优的。

如果 $M = \emptyset$，则方法 $\Phi(y(\cdot))(\cdot) = 0$ 是最优的。

确切的不等式

$$\|D^{\alpha^0} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \prod_{s=1}^{l} \|D^{\alpha^{j_s}} x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\theta_{j_s}}$$

成立。

设

$$\Lambda_\theta^{\alpha^j} = F^{-1}(\psi_\theta^{\alpha^j}(\cdot)Fx(\cdot))(\cdot), \quad j = 0, 1, \ldots, N,$$

其中函数 $\psi_\theta(\cdot)$ 由 (18) 定义。注意 $\Lambda_2 = -\Delta$，其中 Δ 是拉普拉斯算子。在这种情况下，Q 是在 $\mathbb{R}^2$ 上的集合因为 $k = 1$。因此，$1 \le l \le 2$。假设 $\alpha_0 \notin \mathcal{A}$（否则答案以一种简单的方式写出来）。然后 $l = 2$。

推论 2. 令 $\alpha^0 \in \operatorname{co}\mathcal{A}$ 和 $\alpha_0 \notin \mathcal{A}$。然后

$$E(\Lambda_\theta^{\alpha^0}, W_F^{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d), \delta) = e^{-S(\alpha^0)}.$$

如果 $M \neq \emptyset$，则所有形式为

$$\Phi(y(\cdot))(\cdot) = F^{-1}\Bigg(\sum_{j\in M} a_j(\cdot)Fy_j(\cdot)\Bigg),$$

的方法都是最优的，其中函数 $a_{j_1}(\cdot)$,$a_{j_2}(\cdot)$ 满足条件

$$\psi_\theta^{\alpha^{j_1}}(\xi)a_{j_1}(\xi) + \psi_\theta^{\alpha^{j_2}}(\xi)a_{j_2}(\xi) = \psi_\theta^{\alpha^0}(\xi),$$
$$\frac{\delta_{j_1}^2|a_{j_1}(\xi)|^2}{\theta_1} + \frac{\delta_{j_2}^2|a_{j_2}(\xi)|^2}{1-\theta_1} \le e^{-2S(\alpha^0)}$$

对于几乎所有 $\xi \in \mathbb{R}^d$。

如果 $M = \emptyset$，则方法 $\Phi(y(\cdot))(\cdot) = 0$ 是最优的。

确切的不等式

$$\|\Lambda_\theta^{\alpha^0}x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \|\Lambda_\theta^{\alpha^{j_1}}x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\theta_{j_1}}\|\Lambda_\theta^{\alpha^{j_2}}x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{1-\theta_{j_1}}$$

成立。

特别是对于 $\theta = 2$，我们得到精确不等式

$$\|(-\Delta)^{\alpha^0}x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \|(-\Delta)^{\alpha^{j_1}}x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\theta_{j_1}}\|(-\Delta)^{\alpha^{j_2}}x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{1-\theta_{j_1}}.$$

References

[1] K. Yu. Osipenko, “On the construction of families of optimal recovery methods for linear operators”, Izv. Math., 88, 1 (2024), 92–113.

[2] K. Yu. Osipenko, Introduction to optimal recovery theory, Lan, St Petersburg 2022, 388 pp. (in Russian).

[3] G. G. Magaril-Il’yaev, V. M. Tikhomirov, “Kolmogorov-type inequalities for derivatives”, Sb. Math., 188:12 (1997), 1799–1832.

[4] G. G. Magaril-Il’yaev, K. Yu. Osipenko, “On the reconstruction of convolution-type operators from inaccurate information”, Proc. Steklov Inst. Math., 269 (2010), 174–185.

[5] G. G. Magaril-Il’yaev, E. O. Sivkova, “On the best recovery of a family of operators on the manifold $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$”, Proc. Steklov Inst. Math., 323 (2023), 188–196.

[6] E. V. Abramova, E. O. Sivkova, “On the best recovery of a family of operators on a class of functions according to their inaccurately specified spectrum”, Vladikavkaz. Mat. Zh.„ 26:1 (2024), 13–36 (in Russian).

[7] E. V. Abramova, E. O. Sivkova, “On the optimal recovery of one family of operators on a class of functions from approximate information about its spectrum”, Sib. Math. J., 65:2 (2024), 245–256.

[8] F. Carlson, “Une inйgalitй”, Ark. Mat. Astr. Fysik., 25B (1934), 1–5.

[9] V. I. Levin, “Exact constants in inequalities of Carlson type”, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 59:4 (1948), 635–638 (in Russian).

[10] F. I. Andrianov, “Multidimensional analogs of Carlson inequalities and its generalizations”, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 56:1 (1967), 3–7 (in Russian).

[11] V. V. Arestov, “Approximation of linear operators, and related extremal problems”, Proc. Steklov Inst. Math., 138 (1977), 31–44.

[12] S. Barza, V. Burenkov, J. Peari, L.-E. Persson, “Sharp multidimentional multiplicative inequalities for weighted L_p spaces with homogeneous weights”, Math. Ineq. Appl., 1:1 (1998) 53–67.

[13] M.-J. Luo, R. K. Raina, “A new extension of Carlsons inequality”, Math. Ineq. Appl., 19:2 (2016) 417–424.

[14] K. Yu. Osipenko, “Optimal recovery of operators and multidimensional Carlson type inequalities”, J. Complexity, 32:1 (2016) 53–73.

[15] K. Yu. Osipenko, “Inequalities for derivatives with the Fourier transform”, Appl. Comp. Harm. Anal., 53 (2021) 132–150.

Moscow State University,, Institute for Information Transmission Problems, Russian Academy of Sciences, Moscow

Email address: kosipenko@yahoo.com