岩泽理论和有限群的表示

ANWESH RAY

摘要. 在此注记中，我发展了有限凯莱图的岩泽理论的一个表示论精化。基于图 函数和数论中的 L-函数之间的类比，我对凯莱图的 $\mathbb{Z}_\ell$-塔及其雅可比簇的渐近增长进行了研究。我的主要结果是证明与这种塔相关的岩泽多项式可以按照底层群的不可约表示进行规范分解。这导致了定义表示论岩泽多项式，并对其性质进行了研究。

1. 介绍

与图相关的 zeta 和 L-函数理论，源于 Ihara 的开创性工作，揭示了有限图的谱理论与全局域算术之间的惊人类似之处。这些类似中最突出的是存在图 zeta 函数，它们——就像其数论对应物一样——具有类似于 Artin 形式主义的欧拉积因子分解。此外，这些 zeta 函数的特殊值编码了作为类数、调节器和其他算术量组合类似物的图理论不变量。要全面了解该主题，请参阅 [Ter11]。

近年来，随着图论中的岩泽理论视角的发展，这一领域出现了一个新的方向。Vallières[Val21] 和 Gonet[Gon21, Gon22] 独立地开创了这一方向，他们引入了有限多重图的 $\mathbb{Z}_\ell$ 塔的概念，并建立了岩泽关于算术不变量渐近增长的经典结果的类比。在这个图论环境中，一个图的复杂性——以其雅可比群或沙堆群的基数来衡量——扮演着类数的角色。沿着这样的塔结构，人们观察到了经典的 μ-、λ- 和 ν- 不变量的类比，以及岩泽多项式的自然图论类比。这种新的图的岩泽理论迅速引起了关注，导致了一系列进一步的发展和细化，如在 [MV23, MV24, DV23, KM22, RV22, DLRV24, LM24] 中所见。

在 [GR25] 中，研究了与有限交换群相关的 Cayley 图的 Iwasawa 理论。本工作将这一框架扩展到非交换群。本文的一个关键结果是，与 Cayley 图塔楼关联的 Iwasawa 多项式具有一个规范分解（见定理 3.2），每个因子对应于底层有限群的一个不可约表示。这一观察自然地导致了定义与有限群（可能是非交换群）的任何不可约表示相关的表示论 Iwasawa 多项式的概念。我研究了一些这些表示论 Iwasawa 多项式及其相关不变量的性质，探讨它们的结构特性和关于同余的行为。通过一个说明性示例来展示我的结果。

致谢. 作者感谢 Katharina Müller 提出的有益建议。

2. 初步概念

2.1. **图的伽罗瓦理论与阿廷伊哈拉 L 函数.** 谱图理论与数论之间的相互作用变得越来越丰富和复杂。这种互动的核心是关于图的 Ihara zeta 函数理论，这些函数是数域上的 Dedekind zeta 函数的组合类比。这些 zeta 函数编码了有关图的频谱和拓扑数据，并且具有类似于算术 L-函数所满足的功能方程的显式行列式表达式。这些考虑将引导我找到与群表示理论的新有趣联系。在下一节中，我为系统研究图覆盖塔及其相关 ℓ-adic L-函数奠定基础，这秉承了岩泽理论的精神。适时地，我将讨论专门针对与群相关的 Cayley 图。

2020 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 05C25, 11R23, Secondary: 05C31, 05C50.

本文中的图是有限的、无向的，并且没有自环。图 $\mathscr{X}$ 是一个四元组 $(V_{\mathscr{X}}, E^+_{\mathscr{X}}, i, \iota)$，其中 $V_{\mathscr{X}} = v_1, \ldots, v_n$ 是顶点集，$E^+_{\mathscr{X}}$ 是有向边的集合，$i : E^+_{\mathscr{X}} \to V_{\mathscr{X}} \times V_{\mathscr{X}}$ 是关联映射，而 $\iota : E^+_{\mathscr{X}} \to E^+_{\mathscr{X}}$ 是满足 $i \circ \iota = \tau \circ i$ 的边逆变换，具有 $\tau(v, v') = (v', v)$。为了方便起见，我偶尔会写 $\bar{e} := \iota(e)$。边 $e \in E^+_{\mathscr{X}}$ 连接 v 到 v' 当 $i(e) = (v, v')$，且 $\iota(e)$ 连接 v' 到 v。我写 $e \sim e'$ 如果 $e' = \iota(e)$，并用 $E_{\mathscr{X}}$ 表示在这种关系下的等价类集合。因此，$E^+_{\mathscr{X}}$ 表示有向边而 $E_{\mathscr{X}}$ 表示相应的无向边。自然投影 $\pi : E^+_{\mathscr{X}} \to E_{\mathscr{X}}$ 将 e 发送到它的类。定义图 $\mathscr{X}$ 的关联矩阵 $A_{\mathscr{X}} = (a_{i,j})$，其中 $a_{i,j}$ 是从 v_i 到 v_j 的边的数量。源映射和目标映射 $o, t : E^+_{\mathscr{X}} \to V_{\mathscr{X}}$ 是通过将 i 分别与 $V_{\mathscr{X}} \times V_{\mathscr{X}}$ 的第一和第二因子的投影组合而成。v 的度被定义为从 v 发出的边的数量，即 $\deg(v) := \# E^+_{\mathscr{X},v}$。$\mathscr{X}$ 的贝蒂数定义如下

$$b_i(\mathscr{X}) := \operatorname{rank}_{\mathbb{Z}} H_i(\mathscr{X}, \mathbb{Z}).$$

欧拉特征数定义如下 $\chi(\mathscr{X}) := b_0(\mathscr{X}) - b_1(\mathscr{X})$。当 $\mathscr{X}$ 连接时，$b_0(\mathscr{X}) = 1$ 和 $b_1(\mathscr{X}) = \# E_{\mathscr{X}} - \# V_{\mathscr{X}} + 1$。存在 $\chi(\mathscr{X}) = \# V_{\mathscr{X}} - \# E_{\mathscr{X}}$。假设所有的多重图都是连通的，并且没有顶点的度等于 1。此外，我假设 $\chi(\mathscr{X}) \neq 0$，即该图不是一个环图。

一个图在某种程度上可以被视为黎曼面的离散类比。例如，存在雅可比簇和黎曼-罗赫定理 [BN07] 的图论类比。让我介绍一些将在本文中使用的基定义。除子群 $\operatorname{Div}(\mathscr{X})$ 是顶点 $V_{\mathscr{X}}$ 上的自由交换群，由形式和 $D = \sum_v n_v v$ 组成，其中 $n_v \in \mathbb{Z}$。次数映射 $\deg : \operatorname{Div}(\mathscr{X}) \to \mathbb{Z}$，由 $\deg(D) = \sum_v n_v$ 给出，其核为 $\operatorname{Div}^0(\mathscr{X})$。令 $\mathcal{M}(\mathscr{X})$ 是定义在 $V_{\mathscr{X}}$ 上取值于 $\mathbb{Z}$ 的函数群，自由地由特征函数 χ_v 生成。映射

$$\operatorname{div} : \mathcal{M}(\mathscr{X}) \to \operatorname{Div}^0(\mathscr{X})$$

由设置 $\operatorname{div}(\chi_v) = \sum_w \rho_w(v) w$ 定义，其中

$$\rho_w(v) = \begin{cases} \operatorname{val}_{\mathscr{X}}(v) - 2 \cdot \#\text{loops at } v & \text{if } w = v, \\ -\#\text{edges from } w \text{ to } v & \text{if } w \neq v. \end{cases}$$

线性扩展后，对于 $f \in \mathcal{M}(\mathscr{X})$ 得到公式 $\operatorname{div}(f) = -\sum_v m_v(f) \cdot v$，其中 $m_v(f) := \sum_{e \in E^+_{\mathscr{X},v}} (f(t(e)) - f(o(e)))$。图像 $\operatorname{Pr}(\mathscr{X})$ 是 div 的主除子群，商 $\operatorname{Pic}^0(\mathscr{X}) := \operatorname{Div}^0(\mathscr{X}) / \operatorname{Pr}(\mathscr{X})$ 是 $\mathscr{X}$ 的雅可比。它的基数 $\kappa_{\mathscr{X}} := \# \operatorname{Pic}^0(\mathscr{X})$ 被称为 $\mathscr{X}$ 的复杂度，类似于数环的类数（参见 [CP18]）。

图的态射 $f : \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ 包括函数 $f_V : V_{\mathscr{Y}} \to V_{\mathscr{X}}$,$f_E : E^+_{\mathscr{Y}} \to E^+_{\mathscr{X}}$ 使得

$$f_V(o(e)) = o(f_E(e)), \quad f_V(t(e)) = t(f_E(e)), \quad f_E(\iota(e)) = \iota(f_E(e)).$$

如果 f_V 是满射且对于每个 $w \in V_{\mathscr{Y}}$，映射 $f : E^+_{\mathscr{Y},w} \to E^+_{\mathscr{X},f(w)}$ 是双射，则它是一个覆盖。覆盖是伽罗瓦的，如果 $\mathscr{Y}$ 和 $\mathscr{X}$ 是连通的，并且群 $\operatorname{Aut}_f(\mathscr{Y}/\mathscr{X})$ 在每个纤维 $f^{-1}(v)$ 上作用传递。我写 $\operatorname{Gal}(\mathscr{Y}/\mathscr{X}) := \operatorname{Aut}_f(\mathscr{Y}/\mathscr{X})$。

为了定义 Artin–Ihara 的 L-函数，设 $\mathfrak{c} = a_1 \ldots a_k$ 是 $\mathscr{X}$ 中的一个路径，其中 $t(a_i) = o(a_{i+1})$。这样的路径是一个循环如果 $o(a_1) = t(a_k)$，并且它没有回溯或尾巴并且不是更短的循环的非平凡幂时它是素的。对于一个伽罗瓦覆盖 $\mathscr{Y}/\mathscr{X}$，其阿贝尔伽罗瓦群为 G，并且特征值为 $\psi \in \widehat{G} := \operatorname{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$，Artin–Ihara$L$-函数定义为

$$L_{\mathscr{Y}/\mathscr{X}}(u, \psi) := \prod_{\mathfrak{c}} \left(1 - \psi\left(\left(\frac{\mathscr{Y}/\mathscr{X}}{\mathfrak{c}} \right) \right) u^{l(\mathfrak{c})} \right)^{-1},$$

其中乘积遍历所有在 $\mathscr{X}$ 中的素数循环 $\mathfrak{c}$，并且 $\left(\frac{\mathscr{Y}/\mathscr{X}}{\mathfrak{c}}\right)$ 表示与 $\mathfrak{c}$ 相关的弗罗贝尼乌斯自同构（参见 [Ter11, Definition 16.1] 特殊情况 $\psi = 1$ 和 $\mathscr{Y} = \mathscr{X}$ 恢复了伊哈拉 函数 $\zeta_{\mathscr{X}}(u)$。

考虑一个阿贝尔覆盖 $\mathscr{Y} \to \mathscr{X}$，其伽罗瓦群为 $G = \mathrm{Aut}(\mathscr{Y}/\mathscr{X})$。对于每个 $i = 1, \ldots, g_{\mathscr{X}}$，固定纤维上方 $v_i \in V_{\mathscr{X}}$ 的一个顶点 w_i。对于 $\sigma \in G$，定义矩阵 $A(\sigma) = (a_{i,j}(\sigma))$ 为

$$a_{i,j}(\sigma) = \begin{cases} 2 \times (\text{number of loops at } w_i), & \text{if } i = j \text{ and } \sigma = 1; \\ \text{number of edges from } w_i \text{ to } w_j^{\sigma}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于每个字符 $\psi \in \widehat{G}$，定义扭曲邻接矩阵

$$A_\psi := \sum_{\sigma \in G} \psi(\sigma) A(\sigma).$$

令 $D = \mathrm{diag}(\deg(v_1), \ldots, \deg(v_{g_{\mathscr{X}}}))$。然后，Artin-Ihara L-函数由下式给出

$$L_{\mathscr{Y}/\mathscr{X}}(u, \psi)^{-1} = (1 - u^2)^{-\chi(\mathscr{X})} \cdot \det(I - A_\psi u + (D - I)u^2),$$

参见。[Ter11, Theorem 18.15] 集合

$$h_{\mathscr{X}}(u, \psi) := \det(I - A_\psi u + (D - I)u^2), \quad h_{\mathscr{X}}(u) := h_{\mathscr{X}}(u, 1).$$

以下结果将 $h_{\mathscr{X}}$ 在 1 处的导数与图的复杂度 $\kappa_{\mathscr{X}}$ 联系起来：

定理 2.1 ([Nor98], [HMSV24])**.** *假设 $\mathscr{X}$ 是连通的并且 $\chi(\mathscr{X}) \neq 0$，那么 $h'_{\mathscr{X}}(1) = -2\chi(\mathscr{X})\kappa_{\mathscr{X}}$。*

这一结果与数论中经典的类数公式惊人地相似，在那里，一个扩域的 函数通过伽罗瓦群的角色进行分解，而特殊值则编码诸如调节子和类数之类的算术不变量。阿廷形式主义给出了覆盖空间 函数的分解：

定理 2.2. *如果 $\mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ 是一个具有群 G 的阿贝尔伽罗瓦覆盖，则*

$$\zeta_{\mathscr{Y}}(u) = \zeta_{\mathscr{X}}(u) \cdot \prod_{\substack{\psi \in \widehat{G} \\ \psi \neq 1}} L_{\mathscr{Y}/\mathscr{X}}(u, \psi).$$

证明. 对于证明，我参考了 [Ter11]。 □

在 $u = 1$ 处评估，我得到一个复杂度之间的关系：

推论 2.3. *在相同的假设下，有：*

$$|G|\kappa_{\mathscr{Y}} = \kappa_{\mathscr{X}} \prod_{\substack{\psi \in \widehat{G} \\ \psi \neq 1}} h_{\mathscr{X}}(1, \psi).$$

上述结果特别意味着每个 $h_{\mathscr{X}}(1, \psi) \neq 0$ 对于非平凡的 $\psi \in \widehat{G}$。

2.2. **图的岩泽理论.** 在本节中,我讨论了连接图 $\mathscr{X}$ 上的 $\mathbb{Z}_\ell$-塔的Iwasawa理论,在这里假设了 $\chi(\mathscr{X}) \neq 0$。我首先解释如何从被称为电压分配的组合数据中构建 $\mathscr{X}$ 的一些 Galois 覆盖。设 $\mathscr{X}$ 是一个图,并设 $\pi : E^+_{\mathscr{X}} \to E_{\mathscr{X}}$ 表示从有向边集合到无向边集合的自然投影,该投影将每个有向边与其对应的无向边关联。固定一个部分 $\gamma : E_{\mathscr{X}} \to E^+_{\mathscr{X}}$ 为 π,因此每个无向边都被赋予了一个特定的方向。设定 $S := \gamma(E_{\mathscr{X}})$,一个电压分配是一个函数 $\alpha : S \to G$。我将电压分配 α 扩展到所有 $E^+_{\mathscr{X}}$,通过声明对于每一个 $e \in E^+_{\mathscr{X}}$ 都有 $\alpha(\bar{e}) = \alpha(e)^{-1}$。给定这些数据,构造一个多图 $\mathscr{X}(G, S, \alpha)$ 如下。顶点集是 $V = V_{\mathscr{X}} \times G$,而有向边的集合是 $E^+ = E^+_{\mathscr{X}} \times G$。每个有向边 $(e, \sigma) \in E^+$ 连接顶点 $(o(e), \sigma)$ 到顶点 $(t(e), \sigma \cdot \alpha(e))$,其中 $o(e)$ 和 $t(e)$ 分别表示边 e 的起点和终点。边反转映射定义为

$$\overline{(e, \sigma)} = (\bar{e}, \sigma \cdot \alpha(e)).$$

现在假设 G_1 是另一个有限阿贝尔群,并设 $f : G \to G_1$ 是一个群同态。然后 f 诱导出一个多图的形态

$$f_* : \mathscr{X}(G, S, \alpha) \to \mathscr{X}(G_1, S, f \circ \alpha),$$

定义在顶点和边上由

$$f_*(v, \sigma) = (v, f(\sigma)) \quad \text{and} \quad f_*(e, \sigma) = (e, f(\sigma)).$$

定义 2.4. 令 ℓ 为一个素数,并且令 $\mathscr{X}$ 为一个连通图。一个 $\mathbb{Z}_\ell$-塔在 $\mathscr{X}$ 上是一个连通图覆盖的序列

$$\mathscr{X} = \mathscr{X}_0 \longleftarrow \mathscr{X}_1 \longleftarrow \mathscr{X}_2 \longleftarrow \cdots$$

使得对于每个 $n \geq 1$,复合覆盖 $\mathscr{X}_n \to \mathscr{X}$ 是伽罗瓦的,并且其伽罗瓦群同构于 $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$。

我现在描述一种使用电压分配构建此类塔的自然方法。固定底图 $\mathscr{X}$ 的有限有向边集 S,并令

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t) \in \mathbb{Z}_\ell^t,$$

其中 $t = |S|$,且每个 $\alpha_i = \alpha(s_i)$ 对应选定的枚举 $S = \{s_1, \ldots, s_t\}$。映射 α 可以解释为自由阿贝尔群上的一个连续同态,从 S 到 $\mathbb{Z}_\ell$,即一个 $\mathbb{Z}_\ell$ 值的电压分配。

对于每个 $n \geq 1$,令 $\alpha_{/n}$ 表示 α 模 uloℓ^n 的简化,取值于 $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$。将电压图构造应用于 $\alpha_{/n}$,我得到一系列有限伽罗瓦覆盖

$$\mathscr{X}(\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}, S, \alpha_{/n}) \longrightarrow \mathscr{X}.$$

这些构成了一个塔:

$$\mathscr{X} \longleftarrow \mathscr{X}(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}, S, \alpha_{/1}) \longleftarrow \mathscr{X}(\mathbb{Z}/\ell^2\mathbb{Z}, S, \alpha_{/2}) \longleftarrow \cdots,$$

这定义了一个在 $\mathscr{X}$ 意义上的 $\mathbb{Z}_\ell$-塔,如定义 2.4 所述。

在以下讨论中,我假设多图 $\mathscr{X}(\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}, S, \alpha_{/n})$ 对于所有 $n \geq 0$ 都是连通的。确保此类图连通的一个明确条件可以通过基本群来描述。给定一个在 $\mathscr{X}$ 中的路径 $w = a_1 a_2 \ldots a_n$,我定义乘积 $\alpha(w) := \alpha(e_1) \cdots \alpha(e_n) \in G$,其中 $\alpha : S \to G$ 满足 $\alpha(\iota(e)) = \alpha(e)^{-1}$。由此得出,同伦等价路径 c_1 和 c_2 在 α 下有相同的像。固定一个基顶点 $v_0 \in V_{\mathscr{X}}$,映射 α 诱导出由 $\rho_\alpha([\gamma]) = \alpha(\gamma)$ 定义的群同态 $\rho_\alpha : \pi_1(\mathscr{X}, v_0) \to G$。当 $\mathscr{X}$ 连接时,导出图 $\mathscr{X}(G, S, \alpha)$ 连通当且仅当 ρ_α 是满射;此等价关系在 [RV22, Theorem 2.11] 中建立。

现在,假设 $\mathscr{X}$ 是一个连通图,顶点集为 $\{v_1,\ldots,v_{g_{\mathscr{X}}}\}$。定义矩阵 $D_{\mathscr{X}}=(d_{i,j})$,其中 $d_{i,j}=\deg(v_i)$ 如果 $i=j$,否则 0。拉普拉斯矩阵是 $Q_{\mathscr{X}}:=D_{\mathscr{X}}-A_{\mathscr{X}}$,其中 $A_{\mathscr{X}}$ 是邻接矩阵。设 $\alpha:S\to\mathbb{Z}_\ell$ 是一个满足 $\alpha(\iota(e))=-\alpha(e)$ 的电压分配。这扩展为一个矩阵

$$M(x)=M_{\mathscr{X},\alpha}(x)\in\mathbb{Z}_\ell[x;\mathbb{Z}_\ell]^{g_{\mathscr{X}}\times g_{\mathscr{X}}},$$

,它是通过从 $D_{\mathscr{X}}$ 减去一个矩阵来定义的,该矩阵的 (i,j)-项是

$$\sum_{e\in E^+_{\mathscr{X}},i(e)=(v_i,v_j)} x^{\alpha(e)}.$$

。这里,$\mathbb{Z}_\ell[x;\mathbb{Z}_\ell]$ 由表达式 $\sum_a c_a x^a$ 组成,并且包含 $a\in\mathbb{Z}_\ell$ 和 $c_a\in\mathbb{Z}_\ell$。与由 α 定义的塔相关的 Iwasawa 多项式是 $f_{\mathscr{X},\alpha}(T):=\det M(1+T)\in\mathbb{Z}_\ell[\![T]\!]$。尽管不一定是多项式,但在乘以 $(1+T)$ 的适当幂后,这个形式幂级数变成了一个多项式。对于导出图的塔

$$\mathscr{X}\leftarrow\mathscr{X}(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z},S,\alpha_{/1})\leftarrow\mathscr{X}(\mathbb{Z}/\ell^2\mathbb{Z},S,\alpha_{/2})\leftarrow\ldots,$$

对任何本原 ℓ^n 次单位根 ζ_{ℓ^n} 和由 $\psi_n(\bar{1})=\zeta_{\ell^n}$ 定义的特征 $\psi_n:\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ 的评估 $f_{\mathscr{X},\alpha}(1-\zeta_{\ell^n})=h_{\mathscr{X}}(1,\psi_n)$,如 [MV24, Corollary 5.6] 所示。由于 $Q_{\mathscr{X}}$ 是奇异的,并且其核包含 $u=(1,1,\ldots,1)^t$,我推断出 $f_{\mathscr{X},\alpha}(0)=\det Q_{\mathscr{X}}=0$,从而 T 整除 $f_{\mathscr{X},\alpha}(T)$。因此,

$$f_{\mathscr{X},\alpha}(T)=Tg_{\mathscr{X},\alpha}(T),$$

其中 $g_{\mathscr{X},\alpha}(T)\in\mathbb{Z}_\ell[\![T]\!]$ 是一个幂级数并且 $m\in\mathbb{Z}_{\geq0}$ 是最小值使得 $g_{\mathscr{X},\alpha}(T)$ 成为多项式。由 ℓ-进 Weierstrass 准备定理,存在一个分解 $g_{\mathscr{X},\alpha}(T)=\ell^\mu P(T)u(T)$,其中 $P(T)\in\mathbb{Z}_\ell[T]$ 是一个区分多项式且 $u(T)\in\mathbb{Z}_\ell[\![T]\!]$ 是一个单位,即 $u(0)\in\mathbb{Z}_\ell^\times$。与该塔相关的 Iwasawa 不变量定义为 $\mu_\ell(\mathscr{X},\alpha):=\mu$ 和 $\lambda_\ell(\mathscr{X},\alpha):=\deg P(T)$。最后,Gonet[Gon21, Gon22]、Vallieres[Val21] 和 McGown–Vallieres[MV23, MV24] 得出一个强有力的结果,表明如果电压分配 α 满足上述假设(包括我的连通性假设),那么对于 $n\gg0$,所导出图 $X_n:=\mathscr{X}(\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z},S,\alpha_{/n})$ 的复杂度 $\kappa_\ell(X_n)$ 满足公式

$$\kappa_\ell(X_n)=\ell^{\ell^n\mu+n\lambda+\nu}$$

对于某个整数 ν,这已在 [MV24, Theorem 6.1] 中证明。

3. 岩泽多项式的因式分解

在本节中,G 是一个有限群,并且 S 是 G 的一个子集,满足以下条件:

- $gSg^{-1}=S$ 对于所有 $g\in G$,
- S 生成 G,
- $S=S^{-1}$ 并且,
- $1\notin S$.

令 $\mathscr{X}$ 为与配对 (G,S) 相关的凯莱图 $\mathrm{Cay}(G,S)$,并假设整个过程中 $\chi(\mathscr{X})\neq0$,即 $\mathscr{X}$ 不是循环图。枚举 $G=\{g_1,\ldots,g_n\}$ 并写出 $V_{\mathscr{X}}=\{v_1,\ldots,v_n\}$ 其中 $v_i=v_{g_i}$ 是与 g_i 相关的顶点。设 $r:=\#S$,若 $g_ig_j^{-1}\in S$,则存在一条从 v_i 到 v_j 的边 $e_{i,j}$。请注意,由于 $S=S^{-1}$,$\mathscr{X}$ 是一个无向图,并且由于

$1 \notin S$，$\mathscr{X}$ 没有环。由于 S 生成了 G，因此从 1 到 $V_{\mathscr{X}}$ 中的任何其他顶点都存在一条路径，从而 $\mathscr{X}$ 是连通的。存在一个自然作用于 G 上的 $\mathscr{X}$，即一个自然群同态：

$$\rho : G \to \mathrm{Aut}(\mathscr{X})$$

其中 $g \in G$ 将 v_h 发送到 v_{gh}，并将连接 v_i 到 v_j 的边 e 映射到连接 $g(v_i)$ 到 $g(v_j)$ 的边 $g(e)$。此操作是明确定义的，因为 S 在共轭下是稳定的。

定义 3.1. 我将考虑来自函数 S 的电压分配。令 ℓ 为一个素数，$\beta : S \to \mathbb{Z}_\ell$ 为一个函数，满足：

(1) $\beta(gag^{-1}) = \beta(a)$,

(2) β 的像生成了 $\mathbb{Z}_\ell$（作为 $\mathbb{Z}_\ell$-模）。

(3) $\beta(s^{-1}) = -\beta(s)$ 和 $\beta(1_G) = 0$,

(4) β 的像位于 $\mathbb{Z}$ 中，

(5) 存在 $m > 0$ 和一个元组 $(h_1, \ldots, h_m) \in S^m$，使得 $h_1h_2 \ldots h_m \in S$ 且

$$\beta(h_1h_2 \ldots h_m) \not\equiv \sum_{i=1}^{m} \beta(h_i) \pmod{\ell}. \tag{3.1}$$

我定义一个由 $\alpha(e) := \beta(g_1g_2^{-1})$ 给出的电压分配 $\alpha = \alpha_\beta : E_{\mathscr{X}}^+ \to \mathbb{Z}_\ell$ 值的 $\mathbb{Z}_\ell$，其中 e 是连接 v_{g_1} 到 v_{g_2} 的边。

我选择一个排序并写出 $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ 并设定 $v_i := v_{g_i}$。对于 $g \in G$，设定

$$\delta_S(g) := \begin{cases} 1 & \text{if } g \in S; \\ 0 & \text{if } g \notin S. \end{cases}$$

。回忆一个电压分配 $\alpha : E_{\mathscr{X}}^+ \to \mathbb{Z}_\ell$ 会导致一个 $\mathbb{Z}_\ell$-塔在 $\mathscr{X}$ 上。根据 [GR25, Proposition 4.3] 可以得出这个塔由连通图组成。有一个

$$f_{\mathscr{X},\alpha}(T) = \det\left(\mathrm{M}_{\mathscr{X},\alpha}(1+T)\right) = \det\left(r - \delta_S(g_ig_j^{-1})(1+T)^{\beta(g_ig_j^{-1})}\right)_{i,j}$$

是相关的岩泽多项式。

选择一个嵌入 $\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell$，并令 $\mathcal{K}$ 是包含所有 n 次单位根的 $\mathbb{Q}_\ell$ 的有限扩张。令 $\mathcal{O}$ 表示 $\mathcal{K}$ 的估值环，ϖ 是其统一化子，$\kappa := \mathcal{O}/(\varpi)$ 是剩余域。$F := \mathcal{K}((T))$ 并且 $A := \bar{F}[G]$ 是 G 在 $\bar{F}$ 上的群代数。用 $\mathrm{Irr}(G)$ 表示不可约特征 $\chi : G \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ 的集合。我注意到这样的字符取值于 $\mathcal{O}$，因为它们可以表示为 n 次根号下的 1 的和。对于 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$，设定：

$$Q_\chi(T) = r\chi(1) - \sum_{t \in S}(1+T)^{\beta(t)}\chi(t) \in \mathcal{O}[\![T]\!]$$

和 $P_\chi(T) := \frac{Q_\chi(T)}{\chi(1)}$。

定理 3.2. 令 $\mathscr{X}$ 是与成对的 (G, S) 和 β 满足定义 3.1 条件的凯莱图。然后，存在一个分解：

$$f_{\mathscr{X},\alpha}(T) = \prod_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} P_\chi(T)^{\chi(1)^2}.$$

证明. 对于每个 $a \in A$，定义一个右乘法算子 $\rho_a : A \to A$ 由

$$\rho_a(g) := ga \quad \text{for } g \in G.$$

我通过

$$\mathrm{ad}(g) := \sum_{t \in S} x^{\beta(t)}\, tg,$$

定义邻接算子 $\mathrm{ad} : A \to A$，其中 $S \subseteq G$ 是一个固定的子集且 $\beta : S \to \mathbb{Z}$ 是一个权重函数。在单位元素 $1 \in G$ 处进行评估，我得到

$$z := \mathrm{ad}(1) = \sum_{t \in S} x^{\beta(t)} t.$$

这个元素 $z \in A$ 位于 A 的中心，并且由于 ad 是通过左乘以 z 定义的，我推断出

$$\mathrm{ad} = \rho_z.$$

将半单代数 A 分解为简单双边理想的直和：

$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_s.$$

由于 z 是中心的，它通过标量乘法作用于每个简单理想 A_i 上，该标量为 λ_i。令 $e_i \in A_i$ 表示理想 A_i 的单位元，视为 A 的中心幂等元。然后我可以写出

$$z = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i e_i.$$

由此可知，作为线性算子作用于 A 上的 ad 的特征值正是 λ_i，并且每个 λ_i 出现的重数为 $\dim A_i$。事实上，A_i 可以与 G 的不可约表示的自同态识别。这一点在 $\mathbb{C}$ 上是众所周知的（参见 [FD93, p.166]），然而，这一论点逐字适用于任何特征为零的代数闭域。

令 χ_j 表示与理想 A_j 相关的 A 的不可约特征。然后，以两种不同的方式对 χ_j 在 z 上进行评估给出

$$\chi_j(z) = \sum_{t \in S} x^{\beta(t)} \chi_j(t),$$

并且由于 $\chi_j(e_i) = 0$ 对于 $i \neq j$ 和 $\chi_j(e_j) = \chi_j(1)$，

$$\chi_j(z) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \chi_j(e_i) = \lambda_j \chi_j(1).$$

结合这些表达式得出 λ_j 的显式公式：

$$\lambda_j = \frac{\sum_{t \in S} x^{\beta(t)} \chi_j(t)}{\chi_j(1)}.$$

因此，我发现在

$$f_{\mathscr{X},\alpha}(T) = \det\left(r \cdot \mathrm{Id} - \mathrm{ad}\right) = \prod_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \det(r \cdot \mathrm{Id} - \lambda_j)^{\chi_j(1)^2} = \prod_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} P_\chi(T)^{\chi(1)^2}.$$

$\square$

前面的结果促使定义了一个与不可约表示的 G 相关的岩泽多项式。

定义 3.3. 设 $\rho : G \to \mathrm{GL}_d(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ 是 G 的一个不可约表示，并令 $\chi = \mathrm{tr}\,\rho$ 表示其特征标。定义元素

$$P_\chi(T) := \frac{Q_\chi(T)}{\chi(1)} = \frac{r\chi(1) - \sum_{t\in S}(1+T)^{\beta(t)}\chi(t)}{\chi(1)}.$$

我称 $P_\chi(T)$ 为与 χ 相关的岩泽函数。它具有如下形式的分解

$$Q_\chi(T) = \varpi^\mu f(T)u(T),$$

其中 $\mu \in \mathbb{Z}$，$f(T) \in \mathcal{O}[T]$ 是一个特殊的多项式，并且 $u(T) \in \mathcal{O}[\![T]\!]^\times$ 是一个单位。我定义

$$\mu_\chi := \mu \quad and \quad \lambda_\chi := \deg f(T),$$

并将 μ_χ 和 λ_χ 分别称为与 $\mathscr{X}$、χ 以及函数 $\beta : S \to \mathbb{Z}_\ell$ 相关的 μ-不变的和 λ-不变量。

当 $\chi = 1$ 是平凡表示的特征时，我得到

$$P_1(T) = r - \sum_{t\in S}(1+T)^{\beta(t)}.$$

我将集合 S 分解为不相交并集

$$S = X \sqcup X^{-1} \sqcup X',$$

其中 $X = \{h_1, \dots, h_k\}$ 由满足 $h_i^2 \neq 1$ 的元素 h_i 组成，而 $X' = \{h_{k+1}, \dots, h_m\}$ 由对合即具有 $h_i^2 = 1$ 性质的元素 h_i 组成。我设定了 $\beta_i := \beta(h_i)$。注意，$\beta(h_i^{-1}) = -\beta(h_i)$，因此如果 $h_i^2 = 1$，则 $\beta_i = \beta(h_i) = 0$。不失一般性地假设对于 $i \leq k$，有 $\beta_i \geq 0$。

引理 3.4. 关于上述符号，T 整除 $P_1(T)$。

证明. 注意到

$$\begin{aligned} P_1(T) &= \sum_{i=1}^k \left(2 - (1+T)^{\beta_i} - (1+T)^{-\beta_i}\right) \\ &= -\sum_{i=1}^k (1+T)^{-\beta_i}\left((1+T)^{\beta_i} - 1\right)^2. \end{aligned}$$

因此，我看到 T 整除 $P_1(T)$。 □

命题 3.5. 关于上述符号，有：

$$\mu_\ell(\mathscr{X}, \alpha) = \frac{1}{e}\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \chi(1)^2\mu_\chi \ and \ \lambda_\ell(\mathscr{X}, \alpha) = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \chi(1)^2\lambda_\chi - 1,$$

其中 $(\ell) = (\varpi^e)$ 作为理想在 $\mathcal{O}$ 中。

证明. 回忆 $f_{\mathscr{X},\alpha}(T) = Tg_{\mathscr{X},\alpha}(T)$，因此，根据定理 3.2

$$g_{\mathscr{X},\alpha}(T) = P_1(T)/T \times \prod_{1\neq\chi\in\mathrm{Irr}(G)} P_\chi(T)^{\chi(1)^2},$$

，从而结果很容易得出。 □

接下来，我研究字符 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ 的 μ 和 λ 不变量。第一个观察涉及 $P_\chi(T)$ 常数系数的一个公式。

引理 3.6. 令 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$，并为简单起见假设 $\ell \nmid \chi(1)$。以下断言成立：

(1) 如果 $\chi \neq 1$，则，

$$Q_\chi(0) = \sum_{t \in S} \big(\chi(1) - \chi(t)\big),$$

和 $\ell \nmid Q_\chi(0)$ 当且仅当 $\mu_\chi = 0$ 和 $\lambda_\chi = 0$。

(2) 如果 $\chi = 1$，则

$$Q_1'(0) = -\sum_{i=1}^{k} \beta_i^2,$$

和 $\ell \nmid Q_1'(0)$ 当且仅当 $\mu_1 = 0$ 和 $\lambda_1 = 1$。

证明. 首先，假设 χ 是非平凡的。在这种情况下，计算 $Q_\chi(0)$ 很直接，留给读者完成。注意，$\ell \nmid Q_\chi(0)$ 当且仅当 $Q_\chi(T)$ 是 $\mathcal{O}[\![T]\!]$ 中的一个单位，并且这个条件等价于 $\mu_\chi = 0$ 和 $\lambda_\chi = 0$。接下来，考虑当 $\chi = 1$ 的情况，在这种情况下，由于 T 整除 $Q_1(T)$，因此得出 $\lambda_1 \geq 1$。注意

$$Q_1(T) = P_1(T) = -\sum_{i=1}^{k} (1+T)^{-\beta_i} \left((1+T)^{\beta_i} - 1\right)^2$$

因此 $Q_1'(0) = -\sum_{i=1}^{k} \beta_i^2$。从魏尔斯特拉斯预备定理可以看出，$\mu_\chi = 0$ 和 $\lambda_\chi = 1$ 当且仅当 $\ell \nmid Q_1'(0)$。 □

定义 3.7. 令 $\rho_1, \rho_2 : G \to \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ 为不可约表示，并令 $\bar{\rho}_i : G \to \mathrm{GL}_n(\kappa)$ 表示 ρ_i 模 (ϖ) 的约化。我说如果 $\bar{\rho}_1 \simeq \bar{\rho}_2$，那么 ρ_1 和 ρ_2 是全等。类似地，两个字符 χ_1 和 χ_2 被称为全等如果 $\chi_1 \equiv \chi_2 \pmod{(\varpi)}$。

命题 3.8. 关于上述符号，假设字符 χ_1 和 χ_2 是合同的，并且 $n := \chi_i(1)$ 与 ℓ 互质。那么可以得出

$$\mu_{\chi_1} = 0 \Leftrightarrow \mu_{\chi_2} = 0$$

并且如果上述条件成立，则 $\lambda_{\chi_1} = \lambda_{\chi_2}$。

证明. 若 $\chi_1 \equiv \chi_2 \pmod{(\varpi)}$，则 $Q_{\chi_1} \equiv Q_{\chi_2} \pmod{(\varpi)}$，结果显然成立。 □

一个示例. 让我以一个具体的例子来总结。设 $\mathbb{F}_q$ 是一个有限域，并设 $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 是在 $\mathbb{F}_q$ 上的可逆 2×2 阶矩阵群。设 ℓ 是一个素数，并且令 $\mathcal{K}$ 是 $\mathbb{Q}_\ell$ 的足够大的有限扩张，使得每个不可约表示 $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 都在 $\mathcal{K}$ 上定义。

令 $S := G \setminus \{\mathrm{Id}\}$ 表示 G 中所有非单位元元素的集合。我定义一个函数 $\beta : S \to \mathbb{Z}_\ell$ 如下。首先，我将乘法群 $\mathbb{F}_q^\times$ 分解为

$$\mathbb{F}_q^\times = \{a_1, \ldots, a_k\} \cup \{a_1^{-1}, \ldots, a_k^{-1}\} \cup \{a_{k+1}, \ldots, a_\ell\},$$

其中元素 a_i 被选择使得 $a_i^2 \neq 1$ 对于 $i \leq k$ 成立，并且 $a_i^2 = 1$ 对于 $i > k$ 成立。

现在通过以下规则定义 $\beta : S \to \mathbb{Z}_\ell$：

- 如果 $g \in S$ 不是数量矩阵，则 $\beta(g) := 0$。

- 如果 $g = a_i \cdot \mathrm{Id}$ 与 $i \leq k$，则设置 $\beta(g) := 1$。
- 如果 $g = a_i^{-1} \cdot \mathrm{Id}$ 与 $i \leq k$，则设 $\beta(g) := -1$。
- 如果 $g = a_i \cdot \mathrm{Id}$ 与 $i > k$，则设置 $\beta(g) := 0$。

验证函数 β 满足定义 3.1 的条件是直接的。首先，考虑自然置换表示 G 在射影直线 $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ 上的表现。这给出了一个维度为 $q+1$ 的表示，其中包含了一个平凡表示作为子表示。设 V 是唯一的补 q 维子表示，并设 χ_V 是 V 的特征。然后对于任意的标量矩阵 $a \cdot \mathrm{Id} \in G$，我有

$$\chi_V(a \cdot \mathrm{Id}) = q.$$

因此，相应的多项式变为

$$\begin{aligned} P_{\chi_V}(T) &= (q-2) - \sum_{1 \neq a \in \mathbb{F}_q^\times} (1+T)^{\beta(a \cdot \mathrm{Id})} \chi_V(a \cdot \mathrm{Id}) \\ &= (q-2) - q \sum_{1 \neq a \in \mathbb{F}_q^\times} (1+T)^{\beta(a \cdot \mathrm{Id})}. \end{aligned}$$

我发现：

$$\sum_{1 \neq a \in \mathbb{F}_q^\times} (1+T)^{\beta(a \cdot \mathrm{Id})} = k(1+T) + k(1+T)^{-1} + (q-2-2k),$$

并且所以

$$\begin{aligned} P_{\chi_V}(T) &= (q-2) - \left[k(1+T) + k(1+T)^{-1} + (q-2-2k)\right] \\ &= -T(1+T)(2+T) \cdot k. \end{aligned}$$

考虑从 Borel 子群诱发出的不可约表示族。设 $\alpha, \beta : \mathbb{F}_q^\times \to \mathcal{K}^\times$ 为两个不同的特征标。设 $B \subset G$ 为由上三角矩阵组成的 Borel 子群

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, c \in \mathbb{F}_q^\times, b \in \mathbb{F}_q \right\}.$$

定义一个特征标 $\alpha \otimes \beta : B \to \mathcal{K}^\times$ 为

$$(\alpha \otimes \beta) \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} := \alpha(a)\beta(c).$$

设 $W_{\alpha,\beta} := \mathrm{Ind}_B^G(\alpha \otimes \beta)$ 为诱导表示。当 $\alpha \neq \beta$ 时，这个表示是不可约的。令 $\chi_{\alpha,\beta}$ 表示其特征。那么对于任意数量矩阵 $a \cdot \mathrm{Id} \in G$，有

$$\chi_{\alpha,\beta}(a \cdot \mathrm{Id}) = (q+1)\alpha(a)\beta(a).$$

因此，相应的多项式变为

$$P_{\alpha,\beta}(T) = (q-2) - \sum_{1 \neq a \in \mathbb{F}_q^\times} (1+T)^{\beta(a \cdot \mathrm{Id})} \cdot \alpha(a)\beta(a).$$

声明.

利益冲突: 不适用，没有需要报告的利益冲突。

数据和材料的可用性: 在获得本文结果的过程中没有生成或分析任何数据。

资金来源: 没有需要报告的资金来源。

References

[BN07] Matthew Baker and Serguei Norine. Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph. *Adv. Math.*, 215(2):766–788, 2007.

[CP18] Scott Corry and David Perkinson. *Divisors and sandpiles*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2018. An introduction to chip-firing.

[DLRV24] Cédric Dion, Antonio Lei, Anwesh Ray, and Daniel Vallières. On the distribution of Iwasawa invariants associated to multigraphs. *Nagoya Math. J.*, 253:48–90, 2024.

[DV23] Sage DuBose and Daniel Vallières. On $\mathbb{Z}_\ell^d$-towers of graphs. *Algebr. Comb.*, 6(5):1331–1346, 2023.

[FD93] Benson Farb and R. Keith Dennis. *Noncommutative algebra*, volume 144 of *Grad. Texts Math.* New York, NY: Springer-Verlag, 1993.

[Gon21] Sophia R. Gonet. *Jacobians of finite and infinite voltage covers of graphs*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2021. Thesis (Ph.D.)–The University of Vermont and State Agricultural College.

[Gon22] Sophia R. Gonet. Iwasawa theory of Jacobians of graphs. *Algebr. Comb.*, 5(5):827–848, 2022.

[GR25] Sohan Ghosh and Anwesh Ray. On the Iwasawa theory of Cayley graphs. *Res. Math. Sci.*, 12(1):Paper No. 2, 20, 2025.

[HMSV24] Kyle Hammer, Thomas W. Mattman, Jonathan W. Sands, and Daniel Vallières. The special value $u = 1$ of Artin-Ihara L-functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 152(2):501–514, 2024.

[KM22] Sören Kleine and Katharina Müller. On the growth of the Jacobian in $\mathbb{Z}_p^l$-voltage covers of graphs. *Preprint, arxiv:2211.09763*, 2022.

[LM24] Antonio Lei and Katharina Müller. On the zeta functions of supersingular isogeny graphs and modular curves. *Arch. Math. (Basel)*, 122(3):285–294, 2024.

[MV23] Kevin McGown and Daniel Vallières. On abelian ℓ-towers of multigraphs II. *Ann. Math. Qué.*, 47(2):461–473, 2023.

[MV24] Kevin McGown and Daniel Vallières. On abelian ℓ-towers of multigraphs III. *Ann. Math. Qué.*, 48(1):1–19, 2024.

[Nor98] Sam Northshield. A note on the zeta function of a graph. *J. Combin. Theory Ser. B*, 74(2):408–410, 1998.

[RV22] Anwesh Ray and Daniel Vallières. An analogue of Kida's formula in graph theory. *Preprint, arXiv:2209.04890*, 2022.

[Ter11] Audrey Terras. *Zeta functions of graphs*, volume 128 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2011. A stroll through the garden.

[Val21] Daniel Vallières. On abelian ℓ-towers of multigraphs. *Ann. Math. Qué.*, 45(2):433–452, 2021.

(Ray) Chennai Mathematical Institute, H1, SIPCOT IT Park, Kelambakkam, Siruseri, Tamil Nadu 603103, India
Email address: `anwesh@cmi.ac.in`