

多带分数 Thouless 泵

Marius Jürgensen,^{1,*} Jacob Steiner,² Gil Refael,² and Mikael C. Rechtsman¹

¹*Department of Physics, The Pennsylvania State University, University Park, Pennsylvania 16802, USA*

²*Department of Physics and Institute for Quantum Information and Matter,
California Institute of Technology, Pasadena, California 91125, USA*

(10Dated: April 17, 2025)

粒子传输的量子化是拓扑物理学的核心。在 Thouless 泵浦——整数量子霍尔效应的维度简化版本中——量子化由单带 Wannier 状态的整数缠绕决定。在这里，我们展示了排斥相互作用可以驱动从整数到分数量子化的 Thouless 泵浦（在固定的整数填充下）通过稳定一个多带 Wannier 状态晶体，每个状态具有分数缠绕。我们在少粒子系统中数值地说明了这一概念，并表明动态 Hartree-Fock 近似能定量再现泵浦相图。

Thouless 泵 [1] 是一维的时间周期系统，它们的拓扑特性通过维度缩减从二维 Chern 绝缘体继承而来，即通过用一个时间周期调制替换一个波矢量维度。拓扑保护表现为粒子传输的量化：如果调制是绝热的，则每个泵循环中有一个整数个粒子被输运经过任意一点，由占据能带的 Chern 数 [1] 给出。Thouless 泵已经在多种平台 [2] 上实现，包括晶格中的费米子和玻色子超冷原子 [3–6]、机械系统 [7, 8]、表面等离激元 [9] 以及光子波导阵列 [10–12]。最近，有人建议拓扑泵浦可以在量子信息处理中找到应用，使稳健的状态依赖光学传输 [13] 成为可能。

早期，牛和索尔斯证明了整数化的泵送电子电荷量化对相互作用是稳健的，只要基态是唯一的，并且系统在整个泵循环中都保持有隙状态 [14, 15]。最近的实验研究试图克服这些限制，并调查由于相互作用而导致的量化破坏 [16]，以及相互作用引起的量化 [17, 18]。虽然非相互作用的索尔斯泵在它们与整数量子霍尔效应的类比方面已经被很好地理解，但相互作用的索尔斯泵的理解及其可能与分数量子霍尔效应 [19] 的联系仍在发展中。

先前的研究 [20–22] 表明，在具有排斥相互作用的交互 Thouless 泵中，分数填充可以导致分数泵送。这源于电荷密度波的形成，这有效地增加了晶格周期性。然而，对于弱相互作用的情况，此类系统不会表现出量子化的泵送。在合成 Brillouin 区域具有额外对称性的非相互作用系统中也观察到了性质截然不同的分数泵送，在泵送循环的分数周期 [23] 发生这种情况。

在这里，我们提出了一种 Thouless 泵浦装置，它显示了固定整数填充下的整数和分数泵浦现象，这与相互作用强度有关。我们的动机来自于最近在光子波导阵列中的实验，这些实验表现出孤子的分数泵浦 [24, 25]，其中每周

期的分数位移是由于多带 Wannier 态的分数缠绕 [26] 造成的。下面，我们将介绍一个基于类似机制展示分数泵浦现象的费米子模型：多带 Wannier 态的自发极化。关键成分包括（1）一组能量上隔离的拓扑带，这些带带小能隙隔开，并且其 Chern 数之和不能被该组中的带数量整除以及（2）跨越多个位点的有限范围排斥相互作用，这种相互作用足够强以耦合这些带。这两项要求在源于共振 Rydberg 激发的相互作用的冷原子系统中是可行的。超过临界相互作用强度后，多带 Wannier 态的占据相对于未配对带的 Wannier 态在能量上更有利，因为前者具有更好的局域性。

为了说明所提出的效应，我们专注于最简单的实现方式，即在单位填充下的拓扑能带对。通过数值技术和一个简化的玩具模型，我们展示在中间的绝热区域发生了分数泵浦，并且没有破坏格子平移对称性。我们认为对于尺寸小于临界值的系统，传输电荷量化为一个分数，其修正项与相互作用强度和该能带对总带宽之比呈指数级小的关系，即使经过许多驱动周期后也是如此。我们预期在大系统中近似的分数泵浦会持续存在，但仅限于某个预热时间尺度之前。最后，我们表明这一效应很好地被平均场方法所捕捉。我们使用这种方法来展示，随着相互作用强度的增加，泵送电荷从弱相互作用时的整数量化过渡到中间态的非量化再到强相互作用下的分数量化。

模型。我们选择的模型是相互作用、无自旋、非对角线版本的 Aubry-André-Harper (AAH) 模型 [27, 28]。哈密顿量由 $H(t) = H_0(t) + H_{\text{int}}$ 给出：

$$H_0(t) = - \sum_j J_j(t) \hat{c}_{j+1}^\dagger \hat{c}_j + \text{h.c.},$$
$$H_{\text{int}} = \sum_{j,r \geq 1} U_r \hat{n}_j \hat{n}_{j+r}, \quad (1)$$

其中，h.c. 表示厄米共轭， $\hat{c}_j^\dagger(\hat{c}_j)$ 是位点 j 的费米子创建（湮灭）算符， $\hat{n}_j = \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j$ 是相关的粒子数算符，而

* marius.juergensen@gmail.com

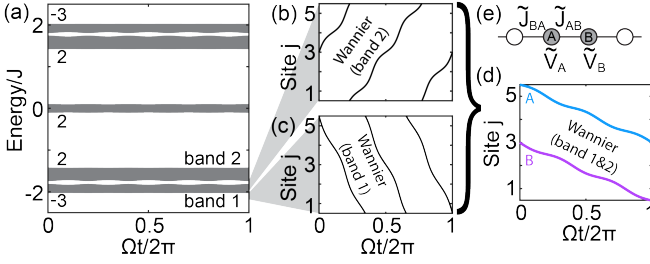


Figure 1. 非相互作用 AAH 模型的性质。(a) 非相互作用 AAH 模型的能带结构，包含陈数。第 1 和第 2 能带在能量上接近，并且与其他所有能带明显分开。(b-c) 第 1 个能带 (c) 和第 2 个能带 (b) 的单带 Wannier 中心，其缠绕数目等于该能带的陈数。(d) 最低两个能带的最大局域化多带 Wannier 状态的 Wannier 中心。请注意，在每个原胞中有两个这样的 Wannier 中心，分别记为 A 和 B，各自具有分数缠绕，但总的缠绕是整数。(e) 最低两个能带的有效两站点模型，其中每个站点代表一个 Wannier 状态。参数： $K/J = 0.7$ ，其中 J 是最邻近跃迁强度， K 是跃迁调制的强度。

U_r 描述了最近邻 ($r=1$)、次近邻 ($r=2$) 等位点上费米子之间的相互作用强度。非相互作用哈密顿量， $H_0(t)$ ，描述了一个托尔斯泵；我们选择一个每单位晶胞有五个位点的 AAH 模型，并且具有周期性最近邻跃迁强度 $J_j(t) = J + K \cos(\Omega t + 4\pi j/5)$ 。 $\Omega = 2\pi/T$ 定义了周期为 T 的周期调制频率，在绝热驱动极限下趋近于零。我们工作在单位带填充条件下，即粒子数等于单位晶胞数， N 。

Thouless 泵的行为可以通过瞬时本征态 $H(t)$ 来理解。我们首先考虑非相互作用系统 $H_0(t)$ 。对角线 AAH 模型的能带结构如图 1 (a) 所示，由五个能带组成。选择该模型是因为最低两个能带在能量上相近但与更高能量的能带分离良好，使我们能够专注于前者。泵送电荷的量化与其 Wannier 状态在整个泵送周期内的缠绕紧密相关。特别是，Wannier 中心轨迹的缠绕数等于相关能带的 Chern 数，因此也就是每个周期传输的电荷量。在图 1 (b,c) 中，我们展示了最低两个能带的 Wannier 中心的实空间轨迹，其 Chern 数分别为 $C = -3$ 和 $C = +2$ 。因此，一个 (单带) Thouless 泵可以直观地理解为每个单位晶胞内的 Wannier 状态在一次泵送周期内被占据并移动了 Chern 数值。

现在考虑加入足够强的排斥相互作用，这些相互作用足以耦合能带 1 和 2，但不足以迫使更高能级参与。直观地说，在给定可用状态的情况下，通过尽可能地将电子局域化来最小化相互作用能量。从填充的第一能带开始，其中最大局域化的单带 Wannier 状态提供了最局域化的基底，可以通过混合第二能带的状态进一步减少相互作用的

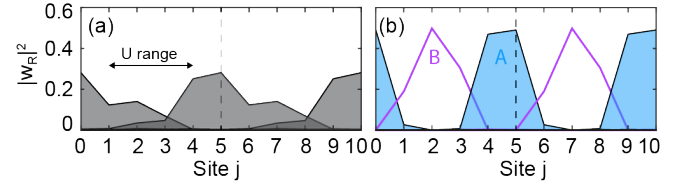


Figure 2. 局域性质和最大局域化 Wannier 态的相互作用能。展示了单带 Wannier 态的概率密度， $|w_R|^2$ ，对于带 1 (a) 以及多带 Wannier 态的带 1 和 2 (b)，来源于图 2，在泵循环中的一个代表性时间点 $\Omega t/2\pi = 0.37$ 。请注意，在多带情况下，每个单位晶胞存在两种类型的 Wannier 态，标记为 A 和 B。在整数填充下，每个单位晶胞有一个 Wannier 态被占据 (阴影部分)。箭头指示了模拟中使用的相互作用范围。

能量，从而进一步局域化这些态。我们将在下面看到，如果所有费米子占据一种风味的最大局域化多带 Wannier 状态 [26]，

$$|w_{R,\alpha}(t)\rangle = \sum_{k,m \in \{1,2\}} \mathcal{U}_{m\alpha}(k,t) \frac{e^{-ikR}}{\sqrt{N}} |\phi_{k,m}(t)\rangle, \quad (2)$$

，其中酉矩阵 $\mathcal{U}_{m\alpha}(k,t)$ 决定了局域性质且 $|\phi_{k,m}(t)\rangle$ 表示瞬时 Bloch 态。每个晶胞中有两种这样的 Wannier 状态，记为 $\alpha \in \{A, B\}$ ，在这里被称为风味。它们的局域化程度与第一带的 Wannier 状态相比，如图 2 所示。虽然相互作用的确切形式并不关键，但它必须具有足够的范围以在最大程度上使单带 Wannier 状态和不同类型的多带 Wannier 状态之间产生显著排斥。这里，我们使用了次近邻相互作用 (见图 2)。

与单带 Wannier 中心不同，多带 Wannier 中心在经历一个周期后不需要回到自身位置，而是可以连接到另一个不同的多带 Wannier 中心，因此它的绕数只有在多个驱动周期之后才能定义。我们将其称为分数绕数。在图 1 (d) 中，我们展示了最低两个能带的最局域化多带 Wannier 态的 Wannier 中心轨迹。每种类型都显示出分数绕数，并且在一个周期后，这些类型会互换位置。然而，这两个多带 Wannier 态一起显示了一个 -1 的绕数，这等于最低两个能带的 Chern 数之和 $C_{1,2} = -3 + 2 = -1$ 。

我们得到以下结果：强相互作用有利于占据一个多带沃尼尔状态的一个味，比如 $|\Psi_B(t)\rangle = \prod_R \hat{w}_{R,B}^\dagger(t) |\emptyset\rangle$ ，其中 $\hat{w}_{R,\alpha}^\dagger(t)$ 创建了状态 $|w_{R,\alpha}(t)\rangle$ 而 $|\emptyset\rangle$ 是真空。从这个状态初始化系统，并假设在整个泵循环过程中占据情况不发生变化，经过一个周期后，现在状态变为 $|\Psi_B(t+T)\rangle = |\Psi_A(t)\rangle = \prod_R \hat{w}_{R,A}^\dagger(t) |\emptyset\rangle$ 。直到这一点被抽运的电荷不是量子化的。然而，在第二个周期之后，状态返回到 $|\Psi_B(t)\rangle$ ，所有占据的沃尼尔状态都移动了 $C_{1,2} = -1$ 。这构成了一种分数汤普斯泵：每个周期内时间平均传输的电荷为

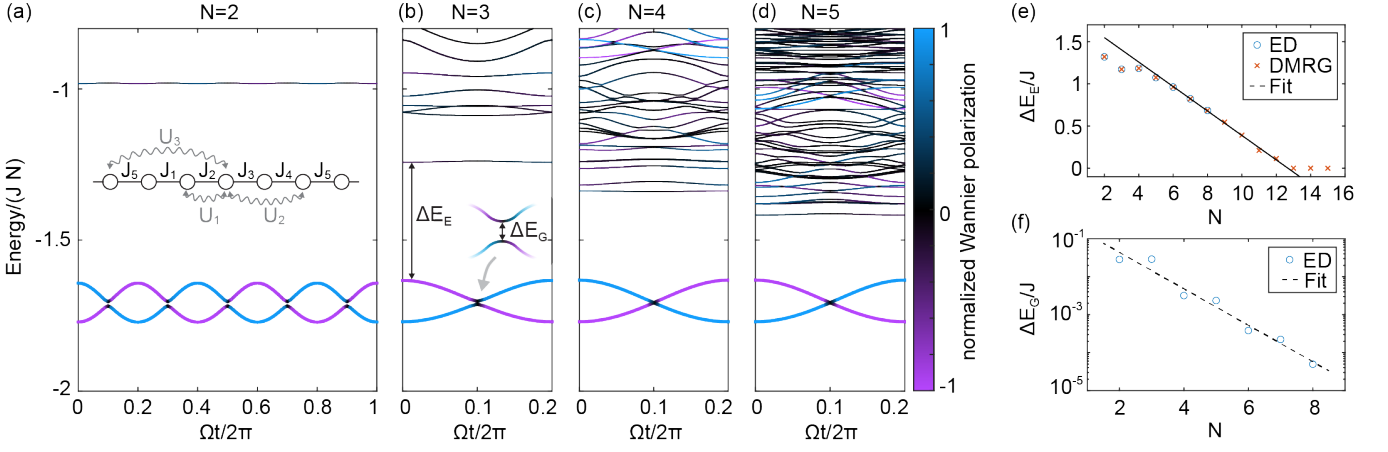


Figure 3. 相互作用 AAH 模型的性质。(a-d) 在泵送循环过程中, $N = 2, 3, 4$ 和 5 粒子及 $5N$ 站点的瞬时多体能量。颜色编码表示状态 (归一化) 极化情况, 基于多带 Wannier 风味。蓝色 (紫色) 表示一个状态仅由两种多带 Wannier 状态中的一种组成。请注意 (b-d) 只显示了泵送循环的五分之一。(a) 中的插图展示了相互作用 AAH 模型的示意图。(b) 中的插图定义了能量间隙, 这些能量间隙在 (e) 和 (f) 中进行了进一步分析。(e) 地面态集合与更高能级状态 ΔE_E 之间的能量间隙呈线性递减, 作为系统大小 N 的函数。圆圈代表精确对角化结果, 叉号代表密度矩阵重正化群计算结果。(f) 极化的低能状态 ΔE_G 之间的能量间隙呈指数递减, 作为 N 的函数。参数与图 1 相同, 但在距离为 r 的邻近点之间增加了相互作用强度: $U_r, U_1/J = 40, U_2/J = 10, U_3/J = 3$ 。

$-1/2$ 。在以下部分, 我们将通过数值方法和平均场近似来验证这一图景, 并确定可能观察到分数泵送的参数范围。

我们注意到, 所提出的机制比这里考虑的简单两能带情况更为普遍。特别是, 在 m 个近简并能带的 Thouless 泵浦模型中, 多能带 Wannier 状态的绕数可能需要多达 m 个周期。假设单带填充, 这表明每周期泵送的电荷分数由近简并能带的 Chern 数之和除以它们的数量给出, 前提是能找到能够稳定多能带 Wannier 状态基态的相互作用。

数值结果。使用精确对角化, 我们找到了方程 (1) 的瞬时多体谱作为泵参数 Ωt 的函数, 并且对于 $N = 2, 3, 4$ 和 5 个粒子的情况, 请参见图 3(a-d)。状态根据它们的多带 Wannier 极化, $\sum_R \langle \Psi(t) | \hat{n}_{R,A}(t) - \hat{n}_{R,B}(t) | \Psi(t) \rangle$, 通过 $\sum_R \langle \Psi(t) | \hat{n}_{R,A}(t) + \hat{n}_{R,B}(t) | \Psi(t) \rangle$ 归一化, 其中 $\hat{n}_{R,\alpha}(t) = \hat{w}_{R,\alpha}^\dagger \hat{w}_{R,\alpha}(t)$ 和 $|\Psi(t)\rangle$ 分别是瞬时多体本征态。我们发现两个几乎完全极化的低能态对应于 $|\Psi_A(t)\rangle$ 和 $|\Psi_B(t)\rangle$ 。它们在整个泵送周期中表现出奇数个反交叉现象, 这是由于多带 Wannier 风味在经过一个周期后发生互换 (请参见 $t = T$ 与 $t = 0$ 的倒置着色)。请注意, 微扰可以消除这些交叉中的所有但一个, 即补充材料 [29]。分数泵送要求跟踪给定风味的状态。这需要 $\Omega \gg \Delta E_G$ (反交叉处的间隙), 而 Ω 必须相对于其他能量尺度是绝热的。这是可行的, 因为 ΔE_G 随系统尺寸增加呈指数级减小, 请参见图 3(f)。

然而, 在系统尺寸较大的情况下, 极化态的能量不再孤立, 因为它们之间的能量差是广泛的。图 3 (e) 显示,

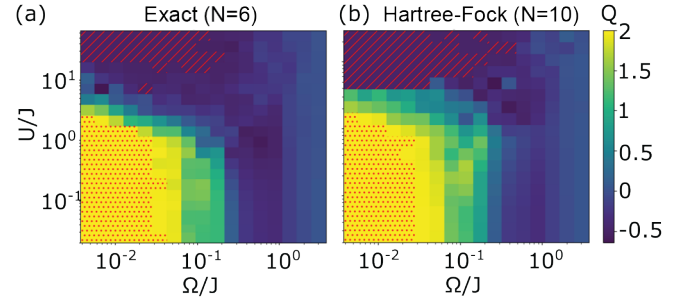


Figure 4. AAH 模型的相互作用相图, 通过精确的时间演化 (a) 和使用 Hartree-Fock 近似的自洽时间演化 (b) 获得。颜色比例尺显示了每个周期泵送的电荷, Q , 作为两个周期平均值的结果。红色交叉影线 (点状) 区域在 1% 的 $Q = -0.5$ ($Q = 2.0$) 范围内。参数: $U_r = U/r$, $1 \leq r \leq 3$ 和 $K/J = -1.5$ 。

在多体谱中第三态的能隙, ΔE_E , 随着系统尺寸线性减小直至在临界尺寸 N_c 处消失。对于 $N > N_c$, 在整个泵循环过程中, 将出现与激发态的附加非共振交叉, 最终导致足够大的系统尺寸下的分数量化失效。对于 $N < N_c$ 没有这样的交叉发生。这允许一个频率窗口存在分数泵送: $\Omega \gg \Delta E_G$, 使得单一风味的多带 Wannier 态被跟踪, 并且 Ω 足够小以确保不产生激发。在此制度——我们称之为中间绝热性——中, 波函数遵循一个多带 Wannier 状态之一 (例如, 图 3 中的紫色线)。重要的是, 由于多带 Wannier 基是 $2T$ 周期性的, 这意味着波函数需要两个周期才能回到自身, 从而产生分数泵浦。

我们通过数值求解时间依赖的薛定谔方程 $i\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = H(t)|\Psi(t)\rangle$, 在系统处于基态时初始化, 即在 $t=0$ 。我们利用 $Q = \frac{1}{2} \int_0^{2T} dt i \langle \Psi(t) | J_j(t) \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1} - J_j(t) \hat{c}_{j+1}^\dagger \hat{c}_j | \Psi(t) \rangle$ 计算两个周期内的每周注入电荷。结果使用 $K/J = -1.5$ 如图 4(a) 所示, 其中我们展示了泵送电荷作为相互作用强度 U 的函数 (设定 $U_r = U/r$, $1 \leq r \leq 3$) 和泵频率 Ω 。进一步的结果使用 $K/J = 0.7$ 在补充材料 [29] 中展示。在足够低的泵浦频率下, 我们观察到在低相互作用强度下出现整数量子化泵浦 ($Q = +2$; 点线), 在强相互作用下出现分数泵浦 ($Q = -1/2$; 阴影线)。两者之间存在一个非量子化区域。从量子化到中间非量子化相的转变在 $\Omega \rightarrow 0$ 的极限下是急剧的, 并且发生在泵浦循环的某个点上, 此时平均场解变得不稳定。

线切割和不同系统尺寸的数据可以在补充材料中找到 [29]。这些结果显示, 少粒子分数泵浦确实持续在一个有限频率范围和有限相互作用强度内。

玩具模型。我们现在引入一个简化的模型, 该模型捕捉到了分数汤普斯泵的基本特性。首先, 我们在多带瓦尼尔基中表示 H_0 , 仅保留主导项 (参见图 1(e)), 得到

$$\tilde{H}_0(t) = \tilde{V}(t) \sum_R [\hat{n}_{R,A}(t) - \hat{n}_{R,B}(t)] - \tilde{J}(t) \sum_{\text{n.n.}} \hat{w}_{R,\alpha}^\dagger(t) \hat{w}_{R',\bar{\alpha}}(t). \quad (3)$$

第二项中的求和限制在最近邻 (n.n.), 它们总是具有相反的特性 (我们定义 $\bar{A} = B$ 及其逆) 但可能在同一单位胞 R 中。 $\tilde{V}$ 和 $\tilde{J}$ 分别是现场势能和最近邻跃迁 (参见 [29] 的定义)。一个周期后的风味交换意味着 $\tilde{V}(t+T) = -\tilde{V}(t)$ [30]。同样, 我们只保留主要的相互作用矩阵元。这给出了

$$\tilde{H}_{\text{int}}(t) = \tilde{U}(t) \sum_{\text{n.n.}} \hat{n}_{A,R}(t) \hat{n}_{B,R'}(t), \quad (4)$$

其中最近邻 Wannier 状态之间的有效相互作用强度为 $\tilde{U}$ 。我们忽略了单元内和单元间跃迁及相互作用之间的任何差异。

假设强相互作用 ($\tilde{U} \gg \tilde{V}, \tilde{J}$), 我们将 $\tilde{H}_0$ 视为对 $\tilde{H}_{\text{int}}$ 的微扰 (为了简洁, 我们省略了时间参数)。零阶近似下, 基态由 $|\Psi_A\rangle$ 和 $|\Psi_B\rangle$ 给出。包括原位势能后, 它们的能量分别为 $E_A = N\tilde{V}$ 和 $E_B = -N\tilde{V}$ 。在退化点 ($\tilde{V}(t_0) = 0$) 处, 跳跃 $\tilde{J}$ 杂化了 $|\Psi_A\rangle$ 和 $|\Psi_B\rangle$ 。然而, 由于 $|\Psi_A\rangle$ 和 $|\Psi_B\rangle$ 在每个晶胞中都不同, 这需要一个顺序为 N 的过程, 导致了一个按 $\Delta E_G = |E_A(t_0) - E_B(t_0)| \sim c(N)\tilde{J}^N/\tilde{U}^{N-1} \simeq \tilde{J}e^{-\ln(\tilde{U}/4\tilde{J})N}$ 缩放的间隙, 证实了数值上观察到的指数行为 (在这里, $c(N) \sim 4^N/\sqrt{N}$ 是一个组合因子 [29])。低能量激发在 $|\Psi_A\rangle$ 和 $|\Psi_B\rangle$ 之上是相反风味的区域。不失一般性考虑 $\Delta > 0$ 。最低的激发, 一个翻转了风味的单

个单元晶胞, 其能量为 $E_E = (-N+2)\tilde{V} + \tilde{U}$ 。然后, 到激发态的能量间隙是 $\Delta E_E = E_E - E_B = \tilde{U} - 2\tilde{V}(N-1)$, 即, 它随着 N 线性减小, 正如前一节所观察到的。因此, 状态 $|\Psi_A\rangle$ 和 $|\Psi_B\rangle$ 仅在 $N < N_c \simeq \tilde{U}/(2\tilde{V}_{\text{max}})$ 时才与类似畴的激发能量分离, 其中 $\tilde{V}_{\text{max}} = \max_t \tilde{V}(t)$ 。对于这样的有限系统, 我们期望分数量化的泵送直到来自极化状态之间的朗道-曾纳跃迁引起的校正。该校正可以估计为 $\delta Q \sim \tilde{J}/(N\sqrt{\Omega\tilde{V}_{\text{max}}}) \exp\{-\ln(\tilde{U}/4\tilde{J})N\}$ [29]。我们注意到, 只有在泵循环过程中从 $|\Psi_A\rangle$ 转移到 $|\Psi_B\rangle$ 的权重导致了这一修正: 具有 a, b 时间独立的状态 $a|\Psi_A\rangle + b|\Psi_B\rangle$ 也是一个分数泵。这表明对于 $N < N_c$, 泵送保持分数量化直到指数小的修正。

对于 $N > N_c$, 极化状态在泵循环过程中穿过类似域的激发。这种激发中最小的一个长度为 $\ell_{\text{min}} = U/(2\tilde{V}_{\text{max}}) \gg 1$, 并且从极化状态以指数级抑制的速度 ℓ_{min} [31, 32] 产生。我们预期分数泵送将持续到生成大量此类域, 从而定义了一个预热时间尺度。关于这个预热分数 Thouless 泵的寿命的定量理论超出了本工作的范围。

平均场理论。上述简单图景仅在强相互作用极限下有效。对于中等强度的相互作用, 我们通过平均场方法获得见解 (详情见 [29])。为此, 我们将相互作用项解耦

$$\tilde{H}_{\text{int}}(t) \rightarrow \tilde{H}_{\text{mf}}(t) = \delta\tilde{V}(t) \sum_R [\hat{n}_{R,A}(t) - \hat{n}_{R,B}(t)], \quad (5)$$

$$\delta\tilde{V}(t) = 2\tilde{U}(t) \langle \hat{n}_{R,B}(t) - \hat{n}_{R,A}(t) \rangle. \quad (6)$$

(瞬时) 自洽场 $\delta\tilde{V}(t)$ 有效地让 $\tilde{V}(t) \rightarrow \tilde{V}(t) + \delta\tilde{V}(t)$ 进一步降低了主导味的能级。我们引入一个有用的类比: 在 $\tilde{V} = 0$ 处, 两种味道是等价的, $\delta\tilde{V}$ 是与自发极化相关的序参量, 类似于伊辛磁体的磁化强度。 $\tilde{V}$ 偏好一种极化, 因此像磁场一样起作用。对于较小的 $\tilde{U}$ (对应于顺磁相), 只有一个解 $\delta\tilde{V} \propto \tilde{V}$ 。这意味着 $\tilde{H}_{\text{mf}}(t) = \tilde{H}_{\text{mf}}(t+T)$, 从而整数泵送。对于较大的 $\tilde{U}$ (对应于铁磁相), 我们找到了两个稳定的解, 代表两种极化状态, $\delta\tilde{V} > 0$ 和 $\delta\tilde{V} < 0$ 。在对称性破缺场 $\tilde{V}$ 的存在下, 这些解中的一个变为亚稳态, 并且如果 $\tilde{V}/\tilde{U}$ 变得过大, 它最终会消失。然而, 在整个泵循环过程中, $\tilde{V}(t)$ 并不会超过某个值。因此, 如果相互作用足够强, 则这两个解在整个泵循环中都保持亚稳态。忽略类似域激发的产生, 系统将沿其中一个解进行绝热演化, 使得平均场哈密顿量现在仅在 $\tilde{H}_{\text{mf}}(t) = \tilde{H}_{\text{mf}}(t+2T)$ 上周期性变化。这种周期翻倍加上 $|\Psi_A(t)\rangle = |\Psi_B(t+T)\rangle$ 意味着分数泵送。对于中等强度的相互作用, 对称性破缺场 $\tilde{V}(t)$ 会导致亚稳态极小值在泵循环中的某些时刻消失, 使得无法跟随平均场解。这导致非量化泵送, 意味着整数和分数泵送之间的转变并非直接。

为了确认这一平均场图像确实捕获了分数泵的关键

特性, 我们计算了平均场时间演化中的泵送电荷 [29, 33]。为了获得定量正确的结果, 并捕捉到编码 Wannier 状态运动的关键带间过程, 我们对完整模型 $H(t)$ 采用 Hartree-Fock 近似, 而不是简化的模型。结果如图 4(b) 所示: 显然, 泵送相图的所有关键特性都被重现了。我们注意到平均场理论没有假设系统的大小: 尽管平均场理论是一种过度简化, 例如忽略了类似域的激发的产生, 但我们基于物理原理预期它在短时间内 (几个泵循环) 也给出了正确的行为, 在情况 $N > N_c$ 下也是如此。

讨论。我们展示了相互作用费米子 Thouless 泵浦中的分数电荷输运。对于超过带隙的合适有限范围相互作用, 多带 Wannier 态会自发占据以更好地局域化费米子。可能的实现是在冷原子系统 [4, 16, 17] 中增加长程相互作用, 例如通过里德堡激发。多带 Wannier 态的分数缠绕则意味着如果极化态被动态跟踪, 则会发生分数泵浦。我们关注的是小系统, 在这种情况下这可以达到指数级小的系统尺寸校正。未来的工作将定量研究大规模系统

的预热分数泵浦。我们注意到, 长程相互作用甚至在超过预热时间 [34] 的情况下也可以稳定分数泵浦。与其它工作 [20–22, 35, 36] 不同, 在这里, 分数泵浦发生而没有破坏格子平移对称性, 但在整数带填充下, 并且在较低的相互作用强度下过渡到一个整数量化的泵浦相。我们注意到这两种方法都与二维分数量子霍尔效应 [37–39] 的薄环极限有关: 在我们的例子中, 部分填充的朗道能级的角色由复合带 1+2 扮演。我们的工作将最近观察到的孤子 (吸引玻色子) 的分数 Thouless 泵浦和具有排斥相互作用的费米系统中的分数泵浦联系起来, 两者都依赖于多带 Wannier 态的分数缠绕。

ACKNOWLEDGMENTS

我们感谢 AFOSR MURI 项目以及 ONR MURI 项目的资助, 协议号分别为 FA9550-22-1-0339 和 N00014-20-1-2325。

-
- [1] D. J. Thouless, Quantization of particle transport, *Physical Review B* **27**, 6083 (1983).
 - [2] R. Citro and M. Aidelsburger, Thouless pumping and topology, *Nature Reviews Physics* **5**, 87 (2023).
 - [3] M. Lohse, C. Schweizer, O. Zilberberg, M. Aidelsburger, and I. Bloch, A Thouless quantum pump with ultracold bosonic atoms in an optical superlattice, *Nature Physics* **12**, 350 (2016).
 - [4] S. Nakajima, T. Tomita, S. Taie, T. Ichinose, H. Ozawa, L. Wang, M. Troyer, and Y. Takahashi, Topological Thouless pumping of ultracold fermions, *Nature Physics* **12**, 296 (2016).
 - [5] H.-I. Lu, M. Schemmer, L. M. Aycock, D. Genkina, S. Sugawa, and I. B. Spielman, Geometrical pumping with a bose-einstein condensate, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 200402 (2016).
 - [6] D. Dreon, A. Baumgärtner, X. Li, S. Hertlein, T. Esslinger, and T. Donner, Self-oscillating pump in a topological dissipative atom-cavity system, *Nature* **608**, 494 (2022).
 - [7] I. H. Grinberg, M. Lin, C. Harris, W. A. Benalcazar, C. W. Peterson, T. L. Hughes, and G. Bahl, Robust temporal pumping in a magneto-mechanical topological insulator, *Nature communications* **11**, 974 (2020).
 - [8] Y. Xia, E. Riva, M. I. N. Rosa, G. Cazzulani, A. Erturk, F. Braghin, and M. Ruzzene, Experimental observation of temporal pumping in electromechanical waveguides, *Phys. Rev. Lett.* **126**, 095501 (2021).
 - [9] Z. Fedorova, H. Qiu, S. Linden, and J. Kroha, Observation of topological transport quantization by dissipation in fast thouless pumps, *Nature communications* **11**, 3758 (2020).
 - [10] Y. E. Kraus, Y. Lahini, Z. Ringel, M. Verbin, and O. Zilberberg, Topological States and Adiabatic Pumping in Quasicrystals, *Physical Review Letters* **109**, 106402 (2012).
 - [11] Y. Ke, X. Qin, F. Mei, H. Zhong, Y. S. Kivshar, and C. Lee, Topological phase transitions and thouless pumping of light in photonic waveguide arrays, *Laser & Photonics Reviews* **10**, 995 (2016).
 - [12] A. Cerjan, M. Wang, S. Huang, K. P. Chen, and M. C. Rechtsman, Thouless pumping in disordered photonic systems, *Light: Science & Applications* **9**, 178 (2020).
 - [13] Z. Zhu, Y. Kiefer, S. Jele, M. Gächter, G. Bisson, K. Viebahn, and T. Esslinger, Quantum circuits based on topological pumping in optical lattices, *arXiv preprint arXiv:2409.02984* (2024).
 - [14] Q. Niu and D. J. Thouless, Quantised adiabatic charge transport in the presence of substrate disorder and many-body interaction, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **17**, 2453 (1984).
 - [15] A. Hayward, C. Schweizer, M. Lohse, M. Aidelsburger, and F. Heidrich-Meisner, Topological charge pumping in the interacting bosonic Rice-Mele model, *Physical Re-*

- view B **98**, 245148 (2018).
- [16] A.-S. Walter, Z. Zhu, M. Gächter, J. Minguzzi, S. Roschinski, K. Sandholzer, K. Viebahn, and T. Esslinger, Quantization and its breakdown in a Hubbard–Thouless pump, *Nature Physics*, 1 (2023).
 - [17] K. Viebahn, A.-S. Walter, E. Bertok, Z. Zhu, M. Gächter, A. A. Aligia, F. Heidrich-Meisner, and T. Esslinger, Interactions enable thouless pumping in a nonsliding lattice, *Phys. Rev. X* **14**, 021049 (2024).
 - [18] J. Argüello-Luengo, M. J. Mark, F. Ferlino, M. Lewenstein, L. Barbiero, and S. Julià-Farré, Stabilization of Hubbard–Thouless pumps through nonlocal fermionic repulsion, *Quantum* **8**, 1285 (2024).
 - [19] D. C. Tsui, H. L. Stormer, and A. C. Gossard, Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit, *Physical Review Letters* **48**, 1559 (1982).
 - [20] F. Grusdt and M. Hönig, Realization of fractional Chern insulators in the thin-torus limit with ultracold bosons, *Physical Review A* **90**, 053623 (2014).
 - [21] T.-S. Zeng, W. Zhu, and D. N. Sheng, Fractional charge pumping of interacting bosons in one-dimensional superlattice, *Physical Review B* **94**, 235139 (2016).
 - [22] L. Taddia, E. Cornfeld, D. Rossini, L. Mazza, E. Sela, and R. Fazio, Topological Fractional Pumping with Alkaline-Earth-Like Atoms in Synthetic Lattices, *Physical Review Letters* **118**, 230402 (2017).
 - [23] P. Marra, R. Citro, and C. Ortix, Fractional quantization of the topological charge pumping in a one-dimensional superlattice, *Physical Review B* **91**, 125411 (2015).
 - [24] M. Jürgensen, S. Mukherjee, and M. C. Rechtsman, Quantized nonlinear Thouless pumping, *Nature* **596**, 63 (2021).
 - [25] M. Jürgensen, S. Mukherjee, C. Jörg, and M. C. Rechtsman, Quantized fractional Thouless pumping of solitons, *Nature Physics* **19**, 420 (2023).
 - [26] D. Vanderbilt, *Berry Phases in Electronic Structure Theory: Electric Polarization, Orbital Magnetization and Topological Insulators* (Cambridge University Press, 2018).
 - [27] P. G. Harper, Single band motion of conduction electrons in a uniform magnetic field, *Proceedings of the Physical Society. Section A* **68**, 874 (1955).
 - [28] S. Aubry and G. André, Analyticity breaking and Anderson localization in incommensurate lattices, *Ann. Israel Phys. Soc* **3**, 18 (1980).
 - [29] Supplemental material.
 - [30] 我们注意到 $\tilde{H}_0(t) = \tilde{H}_0(t + T)$ 作为 $\tilde{V}$ 的符号变化被 $\hat{n}_{R,A} - \hat{n}_{R,B}$ 的符号变化所补偿。
 - [31] S. B. Rutkevich, Decay of the metastable phase in $d = 1$ and $d = 2$ ising models, *Phys. Rev. B* **60**, 14525 (1999).
 - [32] G. Lagnese, F. M. Surace, M. Kormos, and P. Calabrese, False vacuum decay in quantum spin chains, *Phys. Rev. B* **104**, L201106 (2021).
 - [33] J. Liu, B. Wu, and Q. Niu, Nonlinear evolution of quantum states in the adiabatic regime, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 170404 (2003).
 - [34] N. Defenu, T. Donner, T. Macrì, G. Pagano, S. Ruffo, and A. Trombettoni, Long-range interacting quantum systems, *Reviews of Modern Physics* **95**, 035002 (2023).
 - [35] R. Gawatz, A. C. Balram, E. Berg, N. H. Lindner, and M. S. Rudner, Prethermalization and entanglement dynamics in interacting topological pumps, *Physical Review B* **105**, 195118 (2022).
 - [36] I. Esin, C. Kuhlenskamp, G. Refael, E. Berg, M. S. Rudner, and N. H. Lindner, Universal transport in periodically driven systems without long-lived quasiparticles, *Phys. Rev. Res.* **6**, 013094 (2024).
 - [37] R. Tao and D. J. Thouless, Fractional quantization of Hall conductance, *Physical Review B* **28**, 1142 (1983).
 - [38] E. H. Rezayi and F. D. M. Haldane, Laughlin state on stretched and squeezed cylinders and edge excitations in the quantum Hall effect, *Physical Review B* **50**, 17199 (1994).
 - [39] E. J. Bergholtz and A. Karlhede, Quantum Hall system in Tao–Thouless limit, *Physical Review B* **77**, 155308 (2008).