

# 逆交流约瑟夫森效应在约瑟夫森二极管中

Huarong Zhong<sup>1</sup> and Zhi Wang<sup>1,2,\*</sup>

<sup>1</sup>*School of Physics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China*

<sup>2</sup>*Guangdong Provincial Key Laboratory of Magnetoelectric Physics and Devices, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China*

我们研究了由结的  $4\pi$ -周期性和  $2\pi$ -周期性电流相位关系相互作用所诱导出的非互易临界电流的约瑟夫森接头。我们采用了拓扑接头模型，该模型充当具有非互易临界电流的约瑟夫森二极管。对于这个约瑟夫森二极管，我们展示了逆交流约瑟夫森效应，在此效应中，一个纯交流驱动电流诱导出有效的直流电压。我们表明这种逆交流约瑟夫森效应源自系统非互易临界电流的电压整流作用。我们探讨了由交流驱动电流振幅和频率决定的所诱导的直流电压依赖性，并揭示了逆交流约瑟夫森效应的最佳条件。

## I. 介绍

约瑟夫森效应是一种量子隧道现象，其中库珀对在两个超导体之间相干地隧穿 [1]。隧穿过程的量子相干性带来了两个显著特征：直流约瑟夫森效应，即可以在没有电压的情况下流动的直流电流，以及交流约瑟夫森效应，即直流偏置电压驱动交流电流。约瑟夫森效应已被广泛研究以理解宏观尺度上的量子现象 [2–21]。最近，由于基于超导量子比特和量子门的量子计算的进步，它再次引起了人们的兴趣 [5, 22–27]。特别是，由约瑟夫森结构建的超导量子设备因其在大规模电路构造和快速量子操作方面的优势而非常吸引人 [28]。二极管是电子电路中的重要组成部分。超导约瑟夫森二极管可能对量子设备有用 [15, 29]。根据定义，约瑟夫森二极管应具有非互易的超电流 [25, 27, 30–35]。这需要打破时间反演对称性，该对称性会反转超电流 [36, 37] 的方向。此外，结点的电流相位关系应具有多个谐波，因为单个谐波函数的适当相移总能通过欧拉恒等式逆转超电流的符号。因此，时间反演对称性的破坏与多谐波电流相位关系之间的相互作用构成了理解约瑟夫森二极管 [31, 32, 38–55] 的一个简单图景。虽然高次谐波非常适合生成约瑟夫森二极管，但拓扑结点的独特选择是半谐波电流相位关系 [56]。沿着这个方向已经提出了一些方案，包括拓扑超导干涉设备和拓扑长结点 [57, 58]。

拓扑接头表现出独特的传输行为，这是由于其固有的马约拉纳量子比特 [22, 33–35, 59] 特性，如内在的磁滞和抑制第一个沙普罗步骤 [60]。这些行为很好地由量子电阻性和电容性分流接头模型 [61] 描述。在这项工作中，我们提出了一种结构最简单的拓扑二极管，它结合了  $4\pi$  周期马约拉纳接头和传统的  $\varphi$  接头 [2, 59, 62]。我们展示了对

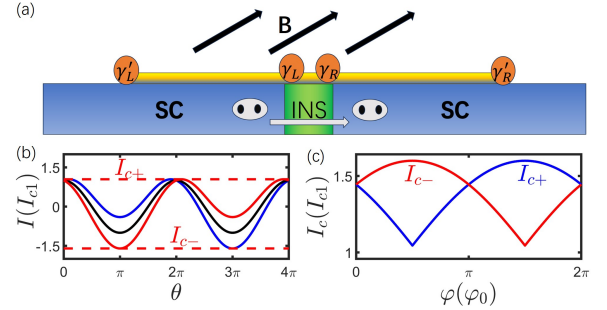


图 1. (a) 拓扑约瑟夫森二极管的示意图，该装置由一维自旋轨道耦合系统组成，并与两个常规 s 波超导体邻近。在存在塞曼能量的情况下会出现马约拉纳零模，这两个马约拉纳零模携带一个  $4\pi$ -周期性的约瑟夫森电流，在塞曼场的方向不平行于一维系统时该电流具有有限的相移  $\varphi$ 。常规的  $4\pi$ -周期性约瑟夫森电流可以在两个 s 波超导体之间传输。(b) 系统在不同相位偏移下的电流-相位关系。非互易的电流-相位关系来自  $4\pi$ -周期性和  $2\pi$  周期性电流-相位关系之间的相互作用。 $\varphi/\varphi_0 = \pi/2$ ，其中  $\varphi_0 = \hbar/2e$  是磁通量子。(c) 相位移作为函数的相应临界电流。在这里，我们取两个方向上的两个临界电流的绝对值进行比较。除了相位移是  $\pi$  的整数倍的情况外，临界电流在方向上是非对称的。

称性破缺与多谐波电流相位关系的相互作用如何在接头中诱导非互易临界电流 [63, 64]。我们关注了带有电流注入时接头的传输，并揭示了一个逆交流约瑟夫森效应，即纯交流注入电流可以驱动直流电压。我们展示了由非互易电流引起的电压整流是这种逆交流约瑟夫森效应的核心成分。我们探索了接头的参数空间以确定逆约瑟夫森效应的最佳条件，并演示了过阻尼和欠阻尼接头的典型动态。

本文组织如下。在第二节中，我们展示了所提出的系统模型并分析了非互易电流相位关系的起源。在第三节中，我们在适当交流电流存在的情况下计算约瑟夫森相位的时间演化和平均直流电压，并演示了典型结参数下的逆交流约瑟夫森效应。在第四节中，我们探索了结的参数空

\* wangzh356@mail.sysu.edu.cn

间以识别优化的逆交流约瑟夫森效应参数。在第五节中，我们进行了讨论并总结。

## II. 马约纳型乔斯佩德二极管模型

马约纳型约瑟夫森二极管由一个常规的约瑟夫森结与一个拓扑结 [65, 66] 并联组成。最小结构如图 1a 所示，其中一维拓扑超导体（例如具有自旋轨道耦合的纳米线和磁子能）置于两个常规 s 波超导体 [67] 之上。通过 s 波超导体之间的绝缘势垒进行库珀对隧穿会产生通常的  $2\pi$  周期约瑟夫森电流，其电流相位关系为  $I = I_{c1} \sin \theta$ ，而超导相位差  $\theta$  跨越结点 [61]。相比之下，通过纳米线的超电流则非常非常规。为了描述电线，我们可以引入结两端超导体的紧束缚哈密顿量为 [68]，

$$\begin{aligned} H_\alpha(\phi_\alpha) = & -t \sum_{(i,j),\alpha,\sigma} c_{i,\alpha,\sigma}^\dagger c_{j,\alpha,\sigma} - \mu \sum_{i,\alpha,\sigma} c_{i,\alpha,\sigma}^\dagger c_{i,\alpha,\sigma} \\ & + \sum_{i,\alpha} \Delta e^{i\phi_\alpha} c_{i,\alpha,\uparrow}^\dagger c_{i,\alpha,\downarrow}^\dagger + \eta \sum_{i,\alpha,\sigma,\sigma'} [c_{i+1,\alpha,\sigma}^\dagger (i\sigma_y)_{\sigma,\sigma'} c_{i,\alpha,\sigma'}] \\ & + \sum_{i,\alpha,\sigma,\sigma'} c_{i,\alpha,\sigma}^\dagger (\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\sigma})_{\sigma,\sigma'} c_{i,\alpha,\sigma'}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $\alpha$  标记左边和右边的超导系统，而  $\phi_\alpha$  代表超导相。为了简化，我们为两个段落取相同的参数，其中  $t$  是近邻跃迁， $\mu$  是化学势， $\eta$  是自旋轨道耦合， $\Delta$  是由邻近效应产生的超导隙幅值， $\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\sigma}$  是从 Zeeman 场  $\mathbf{V}$  产生的 Zeeman 能量。这两个段落通过电子隧穿哈密顿量连接，

$$H_T = T \sum_{\sigma} (c_{L,0,\sigma}^\dagger c_{R,0,\sigma} + c_{R,0,\sigma}^\dagger c_{L,0,\sigma}), \quad (2)$$

其中  $T$  是隧穿能量。该哈密顿量已被研究并表明纳米线成为具有四个马约拉纳零模的拓扑约瑟夫森结，如图 1a 所示。在结的隧穿势垒附近有两个马约拉纳零模  $\gamma_L$  和  $\gamma_R$ 。这两个马约拉纳零模构成了一个马约拉纳量子比特，其量子比特的本征态由  $i\gamma_L\gamma_R|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle$  和  $i\gamma_L\gamma_R|\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle$  [61] 相反的费米子宇称状态定义。此外，在一维拓扑超导体的末端应该至少还有另外两个马约拉纳零模  $\gamma'_L$  和  $\gamma'_R$ 。它们与结点处的马约拉纳零模耦合会翻转量子比特的宇称态。这些马约拉纳零模在存在适当的水平齐曼场 [59, 66, 69] 的情况下携带约瑟夫森电流，具有  $4\pi$  周期性的电流相位关系。除了  $4\pi$  周期的约瑟夫森电流外，纳米线结中的马约拉纳零模还构成一个马约拉纳量子比特，其动力学可能显著影响结 [70–74] 的输运。同时考虑到约瑟夫森相位和马约拉纳量子比特，我们可以得到结的最小约瑟夫森哈密顿量为 [22]，

$$H_M = -E_J \cos(\theta + \varphi) - E_M \sigma_z \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + E'_M \sigma_x, \quad (3)$$

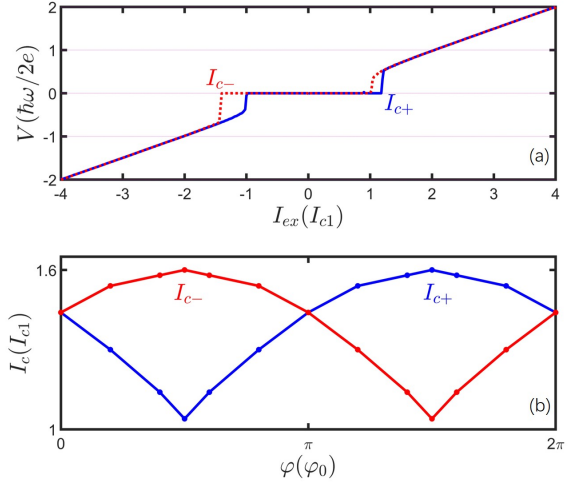


图 2. (a) 结的 I-V 曲线表现出滞后行为和非互易临界电流。(b) 两个方向上的临界电流作为  $2\pi$ -周期性和  $4\pi$ -周期性约瑟夫森电流之间相位移的函数。在这里我们取两个方向上两个临界电流的绝对值来进行比较。

其中  $E_J = \hbar I_{c1}/2e$  是库珀对隧穿的约瑟夫森能量， $E_M = T/4$  是由结周围两个马约拉纳零模之间的直接耦合引起的约瑟夫森能量，[75]， $E'_M$  是结马约拉纳零模与线端远处的马约拉纳零模之间的耦合能，而  $\varphi$  是由自旋场方向  $\mathbf{V}$  引起的相对相移，可以通过数值求解紧束缚哈密顿量 [68] 来确定， $\sigma_z$  和  $\sigma_x$  代表由马约拉纳零模定义的伪自旋算符。

此约瑟夫森哈密顿量提供了非互易的约瑟夫森电流，如果我们忽略马约拉纳量子位的动力学并设置为  $\sigma_z = 1$ ，则可以轻松识别这一点。那么，总结点的约瑟夫森电流由  $I = I_{c1} \sin(\theta + \varphi) + I_{c2} \sin(\theta/2)$  给出，其中  $I_{c1} = 2eE_J/\hbar$  是库珀对隧穿产生的超电流，而  $I_{c2} = eE_M/\hbar$  是通过马约拉纳量子位进行半对隧穿产生的超电流。我们在图 1b 中绘制了这种电流相位关系的三个典型相移，并发现明确的方向不对称性。为了更清楚地揭示非互易的约瑟夫森电流，我们计算了两个方向上的临界电流作为相移的函数，如图 1c 所示。我们发现除了  $\varphi = n\pi$  之外，临界电流具有方向不对称性。临界电流必须对  $\varphi = n\pi$  对称，因为约瑟夫森电流在反转约瑟夫森相位时会改变符号。

约瑟夫森哈密顿量包含两个自由度：约瑟夫森相位  $\theta$  和马约拉纳量子比特的伪自旋状态。适当的动态方程应该包括结点传输中这两个自由度的时间演化。这已经被量子电阻和电容旁路结模型很好地描述了。在这个模型中，约瑟夫森相位的动力学被设定为一个在波纹状势场下运动的粒子的经典运动方程来描述，并且马约拉纳量子比特的量子态作为有效势的一部分进入方程。同时，马约拉纳量

量子比特的动力学由有效的朗道-利弗席兹-吉尔伯特定律描述，其中约瑟夫森相位作为一个伪磁场出现。该模型基于路径积分方法 [22] 从最小哈密顿量推导而来，得到的运动方程为，

$$I_{ex} = C\ddot{\theta} + \frac{\dot{\theta}}{R} + I_{c1} \sin(\theta + \varphi) + I_{c2} s_z \sin(\frac{\theta}{2}) + \mathbf{B}_f \cdot \dot{\mathbf{s}}, \quad (4)$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{h} \times \mathbf{s} + \dot{\theta} \mathbf{B}_f \times \mathbf{s} + (\tilde{\mathbf{N}} \cdot \dot{\mathbf{s}}) \times \mathbf{s}, \quad (5)$$

其中  $I_{ex}$  表示实验中施加的可调电流， $\theta$  是约瑟夫森相位， $I_{c1} = 2eE_J/\hbar$  是从库珀对隧穿产生的超流，而  $I_{c2} = eE_M/\hbar$  则是通过马约拉纳量子比特半对隧穿产生的超流。 $C$  和  $R$  是有效电容和电阻， $\mathbf{s}$  是伪自旋， $x, y, z$  分别代表三个方向上的相应分量。 $\mathbf{h} = (E'_M, 0, -E_M \cos(\theta/2))$  是齐曼场， $\mathbf{B}_f$  是约瑟夫森相位与量子比特之间的环境介导耦合场， $\tilde{\mathbf{N}}$  表示对量子比特的环境诱导耗散。

利用这些运动方程，可以验证注入直流电流 [76] 时的约瑟夫森二极管行为。我们可以用  $I_{ex}$  计算接头的 I-V 特性，该值从零逐渐增加到有限电流，然后再减小到零，如图 2a 所示。我们注意到即使在考虑过阻尼接头时，I-V 曲线中也存在固有的滞后现象。这是由于伪自旋  $s_z$  的时间演化影响所致。因此，我们可以定义一个“临界电流”，即在电流增加阶段（蓝色线）的最大零电压电流。我们也可以定义一个“重新捕获电流”，即在电流减少阶段（红色线）的最大零电压电流。从 I-V 曲线中，我们可以提取出接头的两个方向上的临界电流和重新捕获电流。我们在图 2b 中绘制了两个方向的临界电流作为相移的函数，并发现结果与图 1b 所示的结果相似。这是可以理解的，因为 I-V 曲线的临界电流由约瑟夫森相位和马约拉纳量子比特变化决定的最大约瑟夫森电流所确定。

### III. 逆交流约瑟夫森效应

运动方程在驱动电流从直流切换到交流时包含许多丰富的现象。特别是，当纯交流驱动电流诱导出有效直流电压时，可以期待出现逆交流约瑟夫森效应。这一效果可以通过检查图 2a 所示的 I-V 曲线来理解。相反方向的临界电流是不对称的。因此，幅度在两个临界电流之间的近零频率交流驱动电流会在一个方向上诱导出电压，而在另一个方向上无耗散地流动。然后对电压随时间演化的长时间平均会给出一个有限的直流分量，该分量偏向于具有较小临界电流的方向。原则上，这种逆交流约瑟夫森效应应该是约瑟夫森二极管 [9, 14, 77] 的一种普遍效应。

此图是通过近似绝热交流驱动电流获得的。可以通过数值求解方程 (4) 和方程 (5) 来获得合理频率的实际交流

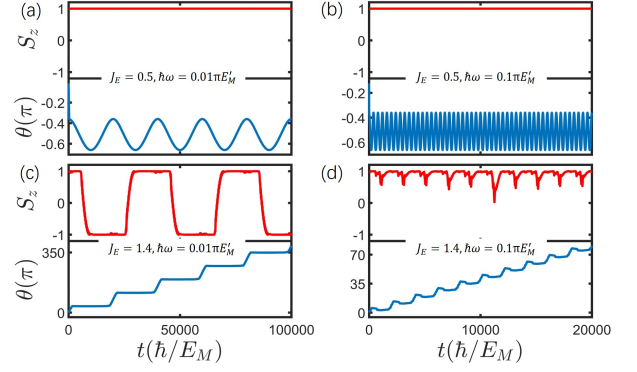


图 3. 约瑟夫森相位和伪自旋在过阻尼结中随两个典型频率和驱动交流电流幅值的时间演化。(a, b) 在小的驱动电流下，约瑟夫森相位振荡且平均电压为零。(c) 在低驱动频率下，平均电压不为零，而伪自旋沿瞬时基态近似绝热地演变。(d) 在高驱动频率下，平均电压不为零，而伪自旋几乎保持在初始状态。参数取为  $I_{c2}/I_{c1} = 0.6, 16e^2 I_{c1}/E_J^2 C = 1, E_J/2eI_{c1}R = 0.1, \varphi/\varphi_0 = 2\pi/3, \mathbf{B}_f = 0.01\hat{x}, \tilde{\mathbf{N}} = 0.001\mathbf{I}$ ，其中  $\mathbf{I}$  是单位矩阵。

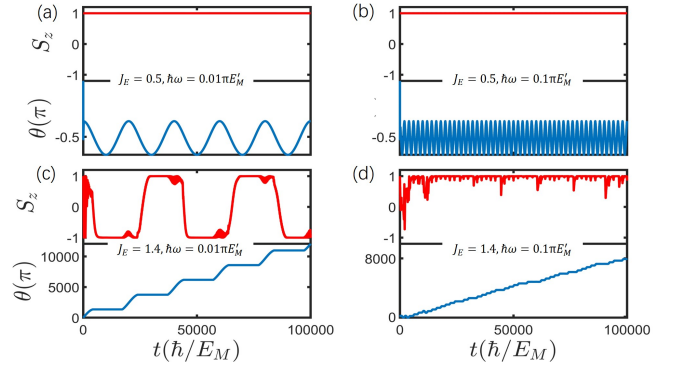


图 4. 约瑟夫森相位和伪自旋在欠阻尼接头中随两个典型频率和驱动交流电流幅度的时间演化。(a, b) 当驱动电流较小时，约瑟夫森相位振荡且平均电压为零。(c) 平均电压非零，而伪自旋在低驱动频率下沿着瞬时基态进行绝热演化。(d) 平均电压非零，而在高驱动频率下，伪自旋几乎保持初始状态不变。参数取为  $e^2 I_{c1}/E_J^2 C = 4, E_J/2eI_{c1}R = 1$ ，其他参数与图 3 中相同。

驱动电流。具体来说，我们在方程 (4) 中考虑一个外部纯交流电流  $I_{ex} = J_E \cos(\omega t)$ ，其中  $J_E$  和  $\omega$  是控制输入电流振幅和频率的参数，然后使用标准四阶龙格-库塔方法计算约瑟夫森相位  $\theta$  及伪自旋  $\mathbf{s}$  的时间演化。经过足够长时间的演化后，我们对约瑟夫森相位进行时间积分以获得平均直流电压  $\bar{V} = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T (\hbar \dot{\theta}(t)/2e) dt = \hbar(\theta(T) - \theta(0))/2eT$ 。通过这一过程，我们可以改变外部交流电流的振幅和频率，并从结点处获取平均直流电压响应。

首先，我们考虑品质因子为  $Q = R\sqrt{I_{c1}C}$  小于一的



过阻尼结。在这个区域内，约瑟夫森相位的动力学可以通过无质量粒子的运动来理解，其方程实际上是一个一阶微分方程。这显著简化了动力学。我们在图 3 中展示了四个典型参数下的约瑟夫森相位和伪自旋的时间演化。我们首先检查低频注入电流以及振幅小于传统结的最大电流的情况，即  $J_E \leq I_{c1}$ 。注入电流完全由超导电流通道传输，而约瑟夫森相位如图 3a 所示，呈现纯周期性变化，并且平均直流电压为零。当注入电流切换到更高频率时，约瑟夫森相位的振荡频率变高，如图 3b 所示。然而，定性特征保持不变。平均直流电压仍然为零。但是，对于更大的电流，平均直流电压开始出现。如图 3c 所示，稍大于传统通道最大电流的电流能够驱动约瑟夫森相位随时间增加，并且平均直流电压变得非零。注入电流频率较低；因此，马约拉纳量子比特的演化接近绝热。我们注意到伪自旋的方向发生了切换，在量子比特的两个本征能级每次避免交叉时都会发生这种情况。这正是朗道-曾尼尔过渡 [74, 78] 的绝热行为。当注入电流的交流频率变大时，如图 3d 所示，伪自旋保持在一个方向上，这意味着在避免交叉处兰道-策尔纳跃迁的概率接近于一。这是马约拉纳量子比特动力学的非绝热极限。尽管马约拉纳量子比特经历了不同的动态过程，但约瑟夫森相位的动力学行为是相似的。它随时间增加，给出一个有限的平均直流电压。这些结果表明逆交流约瑟夫森效应是约瑟夫森二极管的一种普遍行为。

为了普遍性，我们也探索了品质因子大于一的欠阻尼区域。在此区域内，约瑟夫森相位具有显著的电容，这为约瑟夫森相位的动力学带来了有效的惯性。乍一看，这种额外的电容应该会使结点的动力学行为复杂化。然而，与这个简单的图景相反，详细的数值分析表明，附加的电容并没有给约瑟夫森相位的动力学增加额外的复杂性。实际上，它简化了伪自旋的动力学行为。我们在图 4 中展示了欠阻尼结点的约瑟夫森相位和伪自旋的时间演化情况。与过阻尼场景相同，我们考虑了四种典型的注入电流参数。当施加的电流小于传统结的最大电流值时， $s_z$  保持在初始状态，约瑟夫森相位如图 4a 和图 4b 所示振荡。平均直流电压为零，这与过阻尼结的结果相同。当电流幅度超过传统通道的最大电流值时，如图 4c 和图 4d 所示，约瑟夫森相位开始随时间增加，给出了有限的平均直流电压。这看起来与过阻尼结的行为相似。然而，平均电压完全不同，因为约瑟夫森相位增长得快得多。

现在在低驱动频率下的近绝热行为消失了， $s_z$  不再在相反方向之间振荡而是保持在一个方向。这是由于来自电容的约瑟夫森相位的有效质量带来的惯性加速了约瑟夫森相位的速度，以至于即使对于小频率的驱动电流它也会达到非绝热区域。

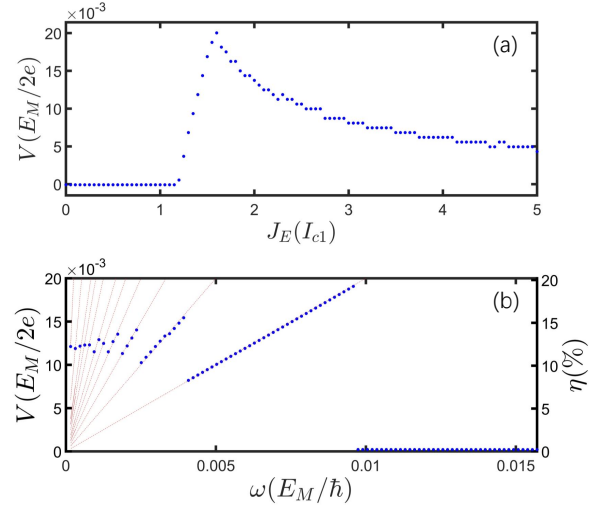


图 5. (a) 平均电压作为施加的交流电流幅值的函数。在驱动电流达到阈值后出现非零平均电压。(b) 平均电压作为施加的交流电流频率的函数。在低频时，行为类似于交流约瑟夫森关系。参数与图 3 中相同。

#### IV. 驱动参数和效率

我们现在探讨在不同驱动电流下的平均电压的依赖性。我们将平均电压作为交流驱动电流幅度  $I_{ex}$  的函数进行计算，并将结果显示在图 5a 中。我们发现对于小于下临界电流的小交流驱动电流，平均电压为零。当驱动电流超过下临界电流时，平均电压突然跳到一个有限值，然后随着电流幅度的增加而逐渐减小。

然后我们考虑驱动交流电流频率  $\omega$  下的平均电压，如图 5b 所示。我们发现当频率超过某一临界值时，平均电压为零。低于该临界频率时，平均电压遵循关系式  $2eV = n\hbar\omega$ ，这已在图中以红色虚线标出。实际上这是与交流约瑟夫森效应相同的关系，但驱动力和响应信号的位置互换。为了研究关于约瑟夫森二极管的物理效应，讨论一个有效的效率是有意义的。在当前的研究中，定义效率的一种方法是取产生的直流电压  $V$  与有效输入交流电压  $J_E R / \sqrt{2}$  的比值。然后我们展示了逆向约瑟夫森效应的效率作为驱动交流电流频率  $\omega$  的函数，如图 5b 所示。我们发现对于较小的频率，效率相当可观。为了最大化效率，应该选择合适的驱动电流频率。

#### V. 效应的普遍性

在上一节中，我们将一维拓扑结作为现实的约瑟夫森二极管的模型，然而，马约拉纳零模可能是脆弱的，并且只能在一个非常狭窄的能量区域内存活。对于高频驱动电

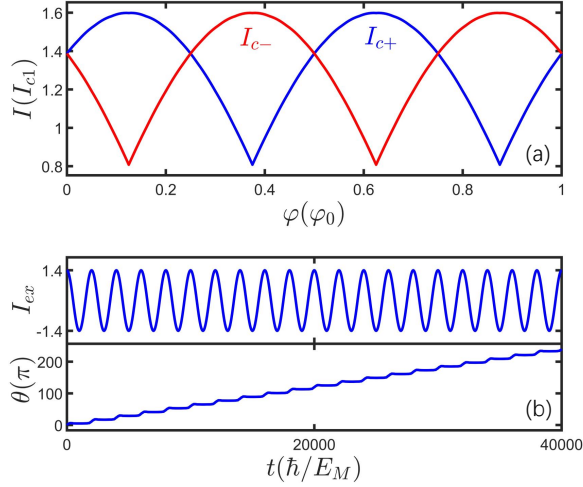


图 6. (a) 两个相反方向的临界电流的绝对值。(b) 交变驱动电流和约瑟夫森相位的时间演化。约瑟夫森相位随时间增加，表明存在直流电压。参数与图 3 中取相同。

流，二极管效应可能会显著减弱，提出的信号可能难以观察。

另一方面，我们注意到本文提出的逆交流约瑟夫森效应实际上对约瑟夫森二极管是普遍存在的。它的存在依赖于非互易临界电流而不是马约拉纳零模。为了证明这一点，我们考虑一个更简单的模型，这个模型虽然数学化但直观。最简单的约瑟夫森二极管模型之一是结合不同谐波

的约瑟夫森电流。我们以具有二次谐波的结为例，电流相位关系写作  $I = I_{c1} \sin(\theta + \varphi) + I_{c2} \sin(2\theta)$ 。这种电流相位关系表现出非互易临界电流，如图 6a 所示。对于这个结，约瑟夫森相位的动力学由教科书中的电阻并联结模型决定，

$$I_{ex} = \frac{\dot{\theta}}{R} + I_{c1} \sin(\theta + \varphi) + I_{c2} \sin(2\theta). \quad (6)$$

对于该系统，我们实现了一个纯交流驱动电流。如图 6b 所示，约瑟夫森相位随时间增加，并产生直流电压。这一结果证明了所提出的逆交流约瑟夫森效应的普遍性。

## VI. 结论

综上所述，我们研究了由常规结和拓扑结构成的约瑟夫森二极管。通过量子电阻电容并联结模型，我们表明结的非互易临界电流诱导了一种逆交流约瑟夫森效应，在这种效应中，纯交流驱动电流导致平均直流电压。我们研究了约瑟夫森相位的动力学，并展示了平均电压对驱动交流电流的依赖性。

## 致谢

本工作得到国家自然科学基金（批准号 12174453 和 92165204）和广东省磁电物理与器件重点实验室（编号 2022B1212010008）的支持。

- 
- [1] B. D. Josephson, *Rev. Mod. Phys.* **46**, 251 (1974).
  - [2] H. J. Kwon, K. Sengupta, and V. M. Yakovenko, *European Physical Journal B* **37**, 349 (2004).
  - [3] C. Lei, H. Chen, and A. H. MacDonald, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 227701 (2018).
  - [4] C. Schrade and L. Fu, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 267002 (2018).
  - [5] D. Razmadze, E. C. T. O'Farrell, P. Krogstrup, and C. M. Marcus, *Phys. Rev. Lett.* **125**, 116803 (2020).
  - [6] K. Misaki and N. Nagaosa, *Phys. Rev. B* **103**, 245302 (2021).
  - [7] A. A. Kopasov, A. G. Kutlin, and A. S. Mel'nikov, *Phys. Rev. B* **103**, 144520 (2021).
  - [8] C. Baumgartner, L. Fuchs, A. Costa, S. Reinhardt, S. Gronin, G. C. Gardner, T. Lindemann, M. J. Manfra, P. E. F. Junior, and D. Kochan, *Nature nanotechnology*, 17 (2022).
  - [9] M. Davydova, S. Prembabu, and L. Fu, *Science Advances* **8**, eabo0309 (2022).
  - [10] J.-D. Pillet, S. Annabi, A. Peugeot, H. Riechert, E. Arrighi, J. Griesmar, and L. Bretheau, *Phys. Rev. Res.* **5**, 033199 (2023).
  - [11] C. Ciaccia, R. Haller, A. C. C. Drachmann, T. Lindemann, M. J. Manfra, C. Schrade, and C. Schönenberger, *Phys. Rev. Res.* **5**, 033131 (2023).
  - [12] Y.-F. Sun, Y. Mao, and Q.-F. Sun, *Phys. Rev. B* **108**, 214519 (2023).
  - [13] Y.-J. Wei, J.-J. Wang, and J. Wang, *Phys. Rev. B* **108**, 054521 (2023).
  - [14] Z. Liu, L. Huang, and J. Wang, *Phys. Rev. B* **110**, 014519 (2024).
  - [15] A. S. Osin, A. Levchenko, and M. Khodas, *Phys. Rev. B* **109**, 184512 (2024).
  - [16] P. Virtanen and T. T. Heikkilä, *Phys. Rev. Lett.* **132**, 046002 (2024).
  - [17] J. Cayao, N. Nagaosa, and Y. Tanaka, *Phys. Rev. B* **109**, L081405 (2024).

- [18] C. Schrade and V. Fatemi, *Phys. Rev. Appl.* **21**, 064029 (2024).
- [19] J. Wang, Y. Jiang, J. J. Wang, and J.-F. Liu, *Phys. Rev. B* **109**, 075412 (2024).
- [20] R. Seoane Souto, M. Leijnse, C. Schrade, M. Valentini, G. Katsaros, and J. Danon, *Phys. Rev. Res.* **6**, L022002 (2024).
- [21] P. A. Volkov, E. Lantagne-Hurtubise, T. Tummuru, S. Plugge, J. H. Pixley, and M. Franz, *Phys. Rev. B* **109**, 094518 (2024).
- [22] Z. Wang, J.-J. Feng, Z. Huang, and Q. Niu, *Phys. Rev. Lett.* **129**, 257001 (2022).
- [23] J. J. He, Y. Tanaka, and N. Nagaosa, *New Journal of Physics* **24**, 053014 (2022).
- [24] Y. Zhang, Y. Gu, P. Li, J. Hu, and K. Jiang, *Phys. Rev. X* **12**, 041013 (2022).
- [25] R. S. Souto, M. Leijnse, and C. Schrade, *Phys. Rev. Lett.* **129**, 267702 (2022).
- [26] Q. Cheng and Q.-F. Sun, *Phys. Rev. B* **107**, 184511 (2023).
- [27] D. Debnath and P. Dutta, *Phys. Rev. B* **109**, 174511 (2024).
- [28] H. Kamata, R. S. Deacon, S. Matsuo, K. Li, S. Jeppesen, L. Samuelson, H. Q. Xu, K. Ishibashi, and S. Tarucha, *Phys. Rev. B* **98**, 041302 (2018).
- [29] H. Vakili, M. Ali, and A. A. Kovalev, *Phys. Rev. B* **110**, 104518 (2024).
- [30] N. F. Q. Yuan and L. Fu, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **119**, e2119548119 (2022).
- [31] I. Askerzade, R. Askerbeyli, and I. Ulku, *Physica C: Superconductivity and its Applications* **598**, 1354068 (2022).
- [32] C. Ortega-Taberner, A.-P. Jauho, and J. Paaske, *Phys. Rev. B* **107**, 115165 (2023).
- [33] O. A. Awoga, I. Ioannidis, A. Mishra, M. Leijnse, M. Trif, and T. Posske, *Phys. Rev. Res.* **6**, 033154 (2024).
- [34] O. A. Awoga and J. Cayao, *Phys. Rev. B* **110**, 165404 (2024).
- [35] R. Kumari, B. Seradjeh, and A. Kundu, *Phys. Rev. Lett.* **133**, 196601 (2024).
- [36] J. B. Oostinga, L. Maier, P. Schüffegen, D. Knott, C. Ames, C. Brüne, G. Tkachov, H. Buhmann, and L. W. Molenkamp, *Phys. Rev. X* **3**, 021007 (2013).
- [37] S. Ilić and F. S. Bergeret, *Phys. Rev. Lett.* **128**, 177001 (2022).
- [38] J. Hu, C. Wu, and X. Dai, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 067004 (2007).
- [39] P. Recher, Y. V. Nazarov, and L. P. Kouwenhoven, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 156802 (2010).
- [40] C.-Z. Chen, J. J. He, M. N. Ali, G.-H. Lee, K. C. Fong, and K. T. Law, *Phys. Rev. B* **98**, 075430 (2018).
- [41] C.-Z. Chen, J. J. He, D.-H. Xu, and K. T. Law, *Phys. Rev. B* **98**, 165439 (2018).
- [42] B. Turini, S. Salimian, M. Carrega, A. Iorio, E. Strambini, F. Giazotto, V. Zannier, L. Sorba, and S. Heun, *Nano Letters* **22**, 8502 (2022), pMID: 36285780.
- [43] D. Wang, Q.-H. Wang, and C. Wu, *Symmetry constraints on direct-current josephson diodes* (2022).
- [44] P. K. Sivakumar, C. Pasco, U. Filippozzi, S. S. P. Parkin, Y.-J. Zeng, T. McQueen, and M. N. Ali, *Nature* **604**, 653 (2022).
- [45] B. Pal, A. Chakraborty, P. K. Sivakumar, M. Davydova, A. K. Gopi, A. K. Pandeya, J. A. Krieger, Y. Zhang, M. Date, S. Ju, N. Yuan, N. B. M. Schröter, L. Fu, and S. S. P. Parkin, *Nature Physics* **18**, 1228 (2022).
- [46] S. Matsuo, T. Imoto, T. Yokoyama, Y. Sato, T. Lindemann, S. Gronin, G. C. Gardner, M. J. Manfra, and S. Tarucha, *Nature Physics* **19**, 1636 (2023).
- [47] J.-X. Hu, Z.-T. Sun, Y.-M. Xie, and K. T. Law, *Phys. Rev. Lett.* **130**, 266003 (2023).
- [48] M. Trahms, L. Melischek, J. F. Steiner, B. Mahendru, I. Tamir, N. Bogdanoff, O. Peters, G. Reece, C. B. Winkelmann, F. von Oppen, and K. J. Franke, *Nature* **615**, 628 (2023).
- [49] A. Greco, Q. Pichard, and F. Giazotto, *Applied Physics Letters* **123**, 092601 (2023).
- [50] M. Gupta, G. V. Graziano, M. Pendharkar, J. T. Dong, C. P. Dempsey, C. Palmstrm, and V. S. Pribiag, *Nature Communications* **14**, 3078 (2023).
- [51] A. Costa, J. Fabian, and D. Kochan, *Phys. Rev. B* **108**, 054522 (2023).
- [52] J. F. Steiner, L. Melischek, M. Trahms, K. J. Franke, and F. von Oppen, *Phys. Rev. Lett.* **130**, 177002 (2023).
- [53] A. Dutta, D. A. Jangade, R. Kulkarni, A. Thamizhavel, J. F. Steiner, F. von Oppen, and M. M. Deshmukh, *Nature Materials* **23**, 612 (2024).
- [54] M. Coraiola, A. E. Svetogorov, D. Z. Haxell, D. Sabonis, M. Hinderling, S. C. ten Kate, E. Cheah, F. Krizek, R. Schott, W. Wegscheider, J. C. Cuevas, W. Belzig, and F. Nichele, *ACS Nano* **18**, 9221 (2024).
- [55] S. Reinhardt, T. Ascherl, A. Costa, J. Berger, S. Gronin, G. C. Gardner, T. Lindemann, M. J. Manfra, J. Fabian, D. Kochan, C. Strunk, and N. Paradiso, *Nature Communications* **1**, 4413 (2024).
- [56] F. Liu, H.-Y. Deng, and K. Wakabayashi, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 086804 (2019).
- [57] B. Scharf, A. Braggio, E. Strambini, F. Giazotto, and E. M. Hankiewicz, *Phys. Rev. Res.* **3**, 033062 (2021).

- [58] S.-K. Jian and S. Yin, [Phys. Rev. B \*\*103\*\*, 134514 \(2021\)](#).
- [59] A. Y. Kitaev, [Physics-Uspekhi \*\*44\*\*, 131 \(2001\)](#).
- [60] Y.-H. Li, J. Song, J. Liu, H. Jiang, Q.-F. Sun, and X. C. Xie, [Phys. Rev. B \*\*97\*\*, 045423 \(2018\)](#).
- [61] M. Tinkham, *Introduction to superconductivity*, Vol. 1 (Courier Corporation, 2004).
- [62] K. Nakata, J. Zou, J. Klinovaja, and D. Loss, [Phys. Rev. Res. \*\*6\*\*, 033207 \(2024\)](#).
- [63] R. Wakatsuki, Y. Saito, S. Hoshino, Y. M. Itahashi, T. Ideue, M. Ezawa, Y. Iwasa, and N. Nagaosa, [Science Advances \*\*3\*\*, e1602390 \(2017\)](#).
- [64] S. Hoshino, R. Wakatsuki, K. Hamamoto, and N. Nagaosa, [Phys. Rev. B \*\*98\*\*, 054510 \(2018\)](#).
- [65] Y. Oreg, G. Refael, and F. von Oppen, [Phys. Rev. Lett. \*\*105\*\*, 177002 \(2010\)](#).
- [66] R. M. Lutchyn, J. D. Sau, and S. Das Sarma, [Phys. Rev. Lett. \*\*105\*\*, 077001 \(2010\)](#).
- [67] F. Setiawan, W. S. Cole, J. D. Sau, and S. Das Sarma, [Phys. Rev. B \*\*95\*\*, 174515 \(2017\)](#).
- [68] H. Huang, Q.-F. Liang, D.-X. Yao, and Z. Wang, [Physica C: Superconductivity and its Applications \*\*543\*\*, 22 \(2017\)](#).
- [69] J. Alicea, Y. Oreg, G. Refael, F. Von Oppen, and M. P. Fisher, [Nature Physics \*\*7\*\*, 412 \(2011\)](#).
- [70] R. M. Lutchyn, E. P. A. M. Bakkers, L. P. Kouwenhoven, P. Krogstrup, C. M. Marcus, and Y. Oreg, [Nature Reviews Materials \*\*3\*\*, 52 \(2018\)](#).
- [71] J.-J. Feng, Z. Huang, Z. Wang, and Q. Niu, [Phys. Rev. B \*\*98\*\*, 134515 \(2018\)](#).
- [72] A. Stern and E. Berg, [Phys. Rev. Lett. \*\*122\*\*, 107701 \(2019\)](#).
- [73] C.-A. Li, J. Li, and S.-Q. Shen, [Phys. Rev. B \*\*99\*\*, 100504 \(2019\)](#).
- [74] J.-J. Feng, Z. Huang, Z. Wang, and Q. Niu, [Phys. Rev. B \*\*101\*\*, 180504 \(2020\)](#).
- [75] H. Huang, Q.-F. Liang, D.-X. Yao, and Z. Wang, [Physics Letters A \*\*381\*\*, 2033 \(2017\)](#).
- [76] Z. Wang, Q.-F. Liang, and X. Hu, [Ratchet potential and rectification effect in majorana fermion squid \(2012\)](#), [arXiv:1204.5616 \[cond-mat.supr-con\]](#).
- [77] A. Daido, Y. Ikeda, and Y. Yanase, [Phys. Rev. Lett. \*\*128\*\*, 037001 \(2022\)](#).
- [78] S. Shevchenko, S. Ashhab, and F. Nori, [Physics Reports \*\*492\*\*, 1 \(2010\)](#).