

大规模黑洞双星源混淆对太极任务空间引力波探测参数估计不确定性的影响*

Qing Diao¹, Hongxin Wang², He Wang¹, Jun Nian¹, Peng Xu^{3,4,5,*}, Minghui Du^{3,*}

¹International Centre for Theoretical Physics Asia-Pacific,

University of Chinese Academy of Sciences, 100190 Beijing, China

²School of Software, Northwestern Polytechnical University, Xian 710072, China

³Taiji Laboratory for Gravitational Wave Universe (Beijing/Hangzhou),

University of Chinese Academy of Sciences, 100049 Beijing, China

⁴Center for Gravitational Wave Experiment, National Microgravity Laboratory,

Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China

⁵Key Laboratory of Gravitational Wave Precision Measurement of Zhejiang Province,

Hangzhou Institute for Advanced Study, University of Chinese Academy of Sciences, Hangzhou 310024, China

我们系统地研究了源混淆对大型黑洞双星 (MBHBs) 参数估计的影响, 这一研究是在太极空间引力波任务的背景下进行的。考虑了三种代表性的 MBHB 群体模型——PopIII、Q3d 和 Q3nod。通过执行高精度数值模拟, 并使用费舍尔信息矩阵和马尔可夫链蒙特卡罗 (MCMC) 技术, 我们定量评估了参数估计中的不确定性。源混淆主要来自于多个信号的重叠时频轨迹。我们发现, 当两个信号在探测器框架下的啁啾质量相对差异极小时 ($\Delta M_z/M_z < 0.2\%$), 参数估计的不确定性显著增加。然而, 通过将高阶模式纳入波形模型中, 可以大大减轻这种恶化。此外, 利用完全贝叶斯推断, 我们展示了高阶模式在减少参数恢复中的系统偏差方面的明显优势。这些结果为未来空间引力波观测的数据分析策略提供了重要指导。

I. 介绍

来自地面观测站如 LIGO 的双黑洞合并产生的引力波 (GWs) 探测开启了引力波天文学的时代, 为探索宇宙开辟了新的途径。与陆地探测器不同, 包括太极、LISA 和天琴在内的空间探测器将在毫赫兹频率范围内运行, 这将使它们能够探测到大质量黑洞双星 (MBHBs) 和其他丰富的天文来源产生的引力波。预计的 MBHB 合并事件率从每年几个到几百个不等, 可能会导致由于检测数据流中信号重叠而产生显著的源混淆问题。这种混淆对天体物理参数的准确估计提出了关键挑战, 影响了单参数估计 (SPE) 和联合参数估计 (JPE)。

激光干涉引力波天文台 (LIGO) 通过恒星级黑洞合并探测到的引力波为引力波天文学开启了新纪元, 从根本上增强了我们探索宇宙现象的能力 [1-2]。然而, 地面探测器由于受到地震和重力梯度噪声的影响而存在固有限制, 主要限制了其对高于几十赫兹频率的敏感性。为了将引力波检测能力扩展到低频范围 (从 0.1

Hz 到 1 Hz), 需要空间基观测台, 它们提供了无与伦比的灵敏度, 并能够探测多种天体物理源, 如 MBHBs、恒星级黑洞双星系统、白矮星双星系统和极端质量比绝热进动 (EMRIs) [3]。

提出的空间引力波探测器, 包括激光干涉空间天线 (LISA)、太极和天琴, 有望为观测宇宙开启新的窗口。具体来说, 由中国科学院发起的太极任务将采用一个臂长为 km 的三角卫星编队, 在类似地球的绕日轨道上运行 [5]。通过激光干涉测量得到的光程差来推断引力波信号。从噪声数据流中提取这些信号需要高度准确的波形模板、精确的探测器响应建模、先进的降噪方法以及基于贝叶斯统计的复杂参数估计算法。

尽管如此, 提高探测器的灵敏度预计将产生大量重叠的引力波信号, 这将使个别事件的识别和分析变得复杂 [7]。重叠信号会在参数估计中引入显著偏差, 从而使得 SPE 和 JPE 方法都变得更加复杂。虽然 JPE 可以同时分析多个信号, 但它需要大量的计算资源。相反, 尽管 SPE 在计算上更有效率, 但在严重混淆的情况下可能会表现出较大的系统偏差。因此, 在采用更耗费计算资源的 JPE 分析之前, 理解 SPE 在混淆条件下的行为至关重要 [13]。

MBHBs, 预计质量范围在至个太阳质量之间, 是

* duminghui@imech.ac.cn

xupeng@imech.ac.cn

空间基础引力波天文学中最有希望的目标之一 [14]。目前对该天文物理群体的质量分布、自旋特性、形成途径和演化轨迹的认识仍不完整。通过观测由 MBHB 合并发出的引力波，特别是那些信噪比高的观测，将显著提高我们对大质量黑洞及其与宿主星系相互作用的了解。

鉴于预测的 MBHB 合并率在不同的人口模型中存在变化 (例如, Pop III 约为每年 174.7 个事件, Q3nod 约为每年 122.44 个事件 [15]), 评估来源混淆及其对参数估计的影响至关重要。之前的来源混淆研究主要集中在地面探测器上, 对空间观测站的考虑相对较少。因此, 本研究系统地探讨了多个人口模型中的 MBHB 来源混淆, 评估其在太极灵敏度频段内的重叠统计和分布及其对参数估计不确定性的含义。

II. 理论框架与仿真设置

A. MBHB 人群模型

超大质量黑洞双星 (MBHB) 群体源自不同的播种机制, 每种机制都有独特的质量分布, 可以通过引力波探测器观测到。三个主要模型——Pop III、Q3d 和 Q3nod——突显了这些差异。

Pop III 模型假设来自第三星族恒星的 MBH 种子, 在高红移处形成“轻种子” (约 $10^2, M_\odot$)。动力学摩擦产生的延迟导致较低质量的双星分布 ($10^4 - 10^6, M_\odot$), 对引力波探测构成挑战。

在大质量种子场景 (Q3d) 中, 直接坍缩形成大量种子 ($10^5, M_\odot$)。合并延迟会降低事件率, 但会产生可被引力波观测站探测到的大量双星系统 ($10^5 - 10^7, M_\odot$)。

Q3nod 反映了 Q3d 的种子形成过程但排除了延迟, 显著提高了合并率同时保留了大量的双星系统。这一场景拓宽了质量光谱并提升了合并频率。

通过引力波观测区分这些质量分布提供了对黑洞形成和星系演化的关键见解。

B. 源混淆的普遍性

在这项研究中, 我们采用了参考文献 [16] 提出的数值模拟方法, 该方法结合了通过观测推断出的局部

合并率与 MBHB 种群模型。黑洞种子形成与其最终合并之间的延迟被明确纳入考虑。在不同的局部合并率假设下, 我们计算每年的合并事件总数 (N_{MBHB}) 以及连续事件之间的时间间隔均值 ($\langle \Delta t_c \rangle$, 以天为单位)。结果总结于表 I 中, 显示了事件统计对假定的合并率具有很强的敏感性。通过调整事件发生率假设, 该方法可以灵活应用于各种探测器配置和 MBHB 种群场景。

表 I. 每年的 MBHB 合并事件总数 (N_{MBHB}) 以及连续事件之间的平均时间间隔 ($\langle \Delta t_c \rangle$, 以天为单位), 在不同的局部合并率假设下。所有情况下均包括延迟时间效应。

Rate [$\text{Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$]	N_{MBHB}	$\langle \Delta t_c \rangle$ [days]
0.01	13	13.3
0.05	71	2.5
0.07	100	1.8
0.5	723	0.3
1.0	1444	0.1
5.0	7238	0.03

重要的是要强调, 源混淆不仅仅来自时间或频率上的重叠, 而是来自同时在两个域中的重叠。为了明确表征源混淆统计及其在不同 MBHB 群体中的时间-频率分布, 我们对 PopIII、Q3d 和 Q3nod 模型进行了详细的数值模拟。具体来说, 我们使用了 BBHx 包与 IMRPhenomHM 波形模型, 结合数值轨道演化和第二代时间延迟干涉测量 (TDI) 来在实际任务配置下建模探测器响应。

表 II. 用于模拟的源参数列表及其对应的符号和物理单位。

Parameter	Symbol	Unit
Detector-frame chirp mass	$\mathcal{M}_z$	$M_\odot$
Mass ratio	q	-
Primary spin (aligned)	a_{1z}	-
Secondary spin (aligned)	a_{2z}	-
Coalescence time	t_c	day
Coalescence phase	Φ_c	rad
Luminosity distance	D_L	Mpc
Inclination angle	ι	rad
Ecliptic longitude	λ	rad
Ecliptic latitude	β	rad
Polarization angle	ψ	rad

模拟的源参数包括与基于空间的引力波检测相关的内在和外在量。这些参数及其关联的符号和单位总

结论见表 II。模拟假设局部并合率为 $0.07 \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ ，在一个半年的观测窗口内大约产生 50 个信号。为了减轻由数据截断引起的边缘效应，目标信号的合并时间被放置在观测窗口的中心。

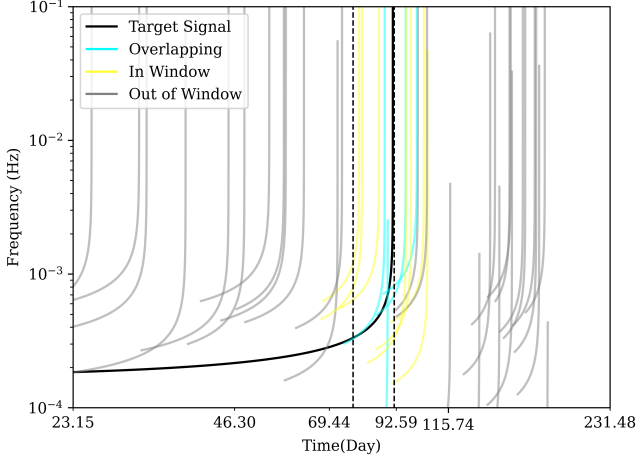


图 1. PopIII 模拟的时间-频率图。黄色轨迹表示与目标信号（黑色）在时间域中重叠的所有信号；蓝色轨迹表示在时间和频率域中同时重叠的信号。

图 1 展示了来自 PopIII 群体的一个典型例子。尽管多个信号（黄色）与目标信号（黑色）在时间域中重叠，但只有少数子集（蓝色）同时在时间和频率上重叠。为了确保统计稳健性，每个群体模型的模拟次数是根据中心极限定理确定的。对于 PopIII 模型，进行了 1285 次模拟，得到平均重叠计数为 2.092（目标误差范围 $\epsilon = 0.1$ ，置信水平 98%）；对于 Q3d 模型，511 次模拟的结果是平均有 0.1565 次重叠（ $\epsilon = 0.05$ ，98% 置信度）；而对于 Q3nod 模型，775 次模拟给出了平均 0.174 次重叠（ $\epsilon = 0.05$ ，98% 置信度）。这些结果表明，在 MBHB 中出现源混淆的情况相对罕见，并且主要限于信号之间的成对相互作用。

C. 参数不确定性量化

为了评估源混淆对大量黑洞双星（MBHBs）参数估计的影响，我们采用了两种互补的方法：费舍尔信息矩阵和马尔可夫链蒙特卡罗（MCMC）采样。费舍尔矩阵方法在高信噪比（SNR）条件下将后验分布近似为高斯分布，并提供参数方差和协方差的快速估计。它广泛用于预测引力波任务中的参数不确定性。

我们首先计算孤立目标信号的第 i 个参数的不确定性 $\Delta\theta^i$ 。然后引入一个与目标部分重叠的第二个信号，并在混淆条件下计算相应的不确定性，记为 $\Delta\Theta^i$ 。不确定性的比率定义为： $\rho = \Delta\Theta^i / \Delta\theta^i$ ，其中， $\Delta\theta^i$ 和 $\Delta\Theta^i$ 均源自各自的费雪信息矩阵。通过解析识别影响 ρ 的关键参数——如合并的时间间隔、啁啾质量的相对差异以及重叠时的特征频率——我们系统地研究了这些量的变化如何影响参数精度的下降。此外，我们将包含高阶模式和不包含高阶模式的情景进行比较，揭示了不同种群模型中源分辨能力的差异。

为了评估在现实数据分析环境中由来源混淆引入的潜在偏差，我们在具有显著退化的代表性案例中进一步应用了使用 MCMC 方法的完全贝叶斯推理。马尔可夫链蒙特卡罗技术是一类基于贝叶斯统计的采样算法，并且通常用于存在复杂后验分布情况下的参数估计。在引力波数据分析中，MCMC 已经成为一个中心工具，特别适用于高维参数空间，在这些空间中后验分布是非高斯的或解析不可处理的。

费舍尔矩阵和 MCMC 方法提供了互补的见解：虽然费舍尔矩阵在高信噪比假设下提供了快速的不确定性估计，但 MCMC 能够完全重构后验景观，捕捉非高斯性和参数简并性等效应。因此，基于费舍尔的预测通常用于早期任务设计和灵敏度研究，而 MCMC 则应用于实际数据分析中的最终验证和精确推理。

1. 费舍尔矩阵方法论

在基于空间的引力波探测器（如 LISA）中，紧致双星的多个信号可以在时频空间重叠，导致源混淆。当信号的时频轨迹交叉时会发生这种现象，从而产生非零互相关性，影响参数估计。

总数据流由平稳的高斯噪声 $Noise(t)$ 和多个信号 $h_n(t; \theta_n)$ 组成：

$$s(t) = \sum_{n=1}^N h_n(t; \theta_n) + Noise(t), \quad (1)$$

其中 θ_n 表示每个单独信号参数集。

该模型的似然函数由下式给出：

$$p(s|\Theta) \propto \exp \left[-\frac{1}{2} (s - H(\Theta))^\top (s - H(\Theta)) \right], \quad (2)$$

其中, $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$ 是完整的参数集, 加权噪声内积定义为:

$$(h|g) = 4 \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\tilde{h}(f)\tilde{g}^*(f)}{S_n(f)} df. \quad (3)$$

这里, $S_n(f)$ 是单边噪声功率谱密度, 波浪线表示傅里叶变换。

费舍尔矩阵提供了参数不确定性的近似值, 由以下公式给出:

$$\Gamma_{ij} = \left(\frac{\partial H}{\partial \theta^i} \middle| \frac{\partial H}{\partial \theta^j} \right). \quad (4)$$

协方差矩阵决定了参数的不确定性, 通过求复合费舍尔矩阵的逆来获得:

$$\Sigma = \Gamma^{-1}. \quad (5)$$

参数不确定性比定义为:

$$\rho = \frac{\Delta \Theta^i}{\Delta \theta^i} = \sqrt{\frac{(\Gamma^{-1})_{ii}}{(\gamma^{-1})_{ii}}}, \quad (6)$$

其中 γ 是单个信号的费舍尔矩阵, 而 Γ 是包括源混淆效应的费舍尔矩阵。

在方程 (4) 中定义的复合费雪矩阵由每个信号沿对角线的个体费雪矩阵和由于重叠信号产生的非对角交叉项组成:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{ij}^{(1)} & C_{ij}^{(12)} \\ C_{ij}^{(21)} & \gamma_{ij}^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

这些非对角项描述了重叠信号之间的耦合, 由下式给出:

$$C_{ij}^{(12)} = \left(\frac{\partial h_1}{\partial \theta^i} \middle| \frac{\partial h_2}{\partial \theta^j} \right), \quad (8)$$

并影响整体参数估计精度。

为了评估两个信号对总体参数不确定性的影响, 考虑交叉项积分:

$$I = (h'_1 | h'_2) = 4 \Re \int \frac{h'_1(f) h'^*_2(f)}{S_n(f)} df, \quad (9)$$

其中 $h'_i(f)$ 表示波形相对于给定参数的导数, 而 $S_n(f)$ 是噪声功率谱密度。

为克服积分中与高频振荡相关的困难, 采用了驻相近似 (SPA)。在此方法中, 通过施加

$$\left. \frac{d\Delta\Psi}{df} \right|_{f=f_F} = 0. \quad (10)$$

来确定相位差 $\Delta\Psi(f)$ 的驻点 f_F 。在 SPA 下, 交叉项积分大约由关键方程 (E7) 给出 (见 Ref. [16]):

$$I \approx 4 \Re \left[\exp \left\{ i\Delta\Psi(f_F) + i\frac{\pi}{4} \operatorname{sign} \left(d^2\Delta\Psi/df^2(f_F) \right) \right\} \times \frac{|A(f_F)|}{S_n(f)} \sqrt{\frac{2\pi}{|d^2\Delta\Psi/df^2(f_F)|}} \right] \quad (11)$$

费雪稳定点 f_F 并不等于时间-频率轨迹交叉时的频率 f_{ov} , 即,

$$\left. \frac{d(\Phi_1 - \Phi_2)}{df} \right|_{f=f_{ov}} = 0. \quad (12)$$

然而, 在实际操作中, 它们之间的差异大约在 $O(10^{-2})$ 赫兹的数量级。尽管方程 (11) 使用 f_F 自洽地求解, 在正文中基本上忽略了 f_F 和 f_{ov} 之间的区别。

方程 (11) 表明交叉项的贡献主要由以下因素决定:

1. 时间频率轨迹重叠的频率 f_{ov} ,
2. 信号在 f_{ov} 的振幅 $|A(f_{ov})|$;
3. 相位 $d^2\Delta\Psi/df^2(f_{ov})$ 的二阶导数;
4. 相位偏移 $\Delta\Psi(f_{ov})$ 在 f_{ov} 。

因此, 该表达式为定量描述两个重叠信号之间的交叉项如何贡献复合费舍尔矩阵提供了理论基础, 并进而评估当信号在时域和频域都重叠时源混淆对参数不确定性的影响。

III. 源混淆分析通过费雪矩阵的影响

基于第 II.B 节的分析, 空间基引力波观测中 MBHB 源混淆通常只涉及两个重叠信号。因此, 我们的研究重点是两个来源之间的混淆。如第 II.C.1 节中的公式 (11) 所示, 在重叠频率 $A(f_{ov})$ 处的振幅主要由检测器框架内的啁啾质量 $\mathcal{M}_z$ 决定, 而时间-频率轨迹的斜率则取决于 $\mathcal{M}_z$ 和重叠频率 f_{ov} 。随着 f_{ov} 的增加, 轨迹斜率也增大。

在这项工作中, 我们系统地研究了三个关键变量对由来源混淆引起的参数不确定性的影响: 重叠频率 f_{ov} 、重叠时的相位差 $\Delta\Phi(f_{ov}) = \Phi_{c1} - \Phi_{c2}$ 以及啁啾质量差异 $\Delta\mathcal{M}_z = |\mathcal{M}_{z1} - \mathcal{M}_{z2}|$ 。我们进一步探索了空间探测器可访问的一系列啁啾质量尺度 ($10^4 -$

$10^7 M_\odot$), 并将波形建模中有无高阶模式的结果进行了比较。

用于两个模拟信号的参数集如下:

- 参数 1: $\mathcal{M}_z = 10^4$, $q = 0.87$, $a_{1z} = 0.90$, $a_{2z} = 0.92$, $t_c = 30.0$, $\Phi_c = 0.5$, $D_L = 30,200$, $\iota = 0.88$, $\lambda = 3.35$, $\beta = 0.12$, $\psi = 1.56$;
- 参数 2: $\mathcal{M}_z = 10^4$, $q = 0.87$, $a_{1z} = 0.899$, $a_{2z} = 0.921$, $t_c = 30.0$, $\Phi_c = 0.58$, $D_L = 30,210$, $\iota = 0.60$, $\lambda = 3.338$, $\beta = 0.11$, $\psi = 1.68$.

下表列出的所有参数的单位见表 II。除非另有说明, 我们仅在两个信号之间改变三个参数: 啁啾质量、并合相位和并合时间。通过调整后两者, 我们控制信号在时频域中的相对位置, 从而调整 f_{ov} 和 $\Delta\Phi$ 。

A. chirp 质量幅度和高阶模式的影响

根据之前的研究所述, 当两个信号表现出相似的时间-频率轨迹时, 参数不确定性会显著增加, 这在很大程度上取决于它们的探测器框架下的啁啾质量。具有可比 $\mathcal{M}_z$ 值的信号在更广泛的频率范围内拥有重叠轨迹, 从而增强了互相关性并增加了混淆。理论上, 高阶模式具备不同的时间-频率演化特征, 因此有助于解析重叠源。

图 2 显示了案例 $\Delta\mathcal{M}_z = 0$ 在不同啁啾质量尺度下的参数不确定性比 ρ 。虚线对应仅具有主导模式 (2, 2) 的波形, 而实线包括高阶模式。由于具有不同 $\mathcal{M}_z$ 值的信号跨越不同的频率范围, 所选择的重叠频率 f_{ov} 随着 $\mathcal{M}_z$ 的增加而减小, 而在重叠处的相位差固定为 $\Delta\Psi(f_{\text{ov}}) = 0$ 。

总体而言, 我们观察到 ρ 随着啁啾质量显著增加, 表明高质量系统的参数退化更强。然而, 包含更高阶模式一致地减轻了这种效应。对于大多数参数——除了光度距离 D_L 和倾角 ι ——由于源混淆导致的不确定性增加仍然在与孤立情况相比 $\mathcal{O}(10^1)$ 的一个数量级内。虽然 D_L 和 ι 增加较大, 但它们的不确定性仍低于非混淆情况下 $\mathcal{O}(10^3)$ 的水平, 其中典型的不确定性分别为 $\sim \mathcal{O}(10^{-9})$ 和 $\sim \mathcal{O}(10^{-4})$ 。这些发现表明, 只有当 chirp 质量几乎相同时, 源混淆才会显著影响参数估计, 并且高阶模式提供了一个稳健的缓解策略。

B. 参数不确定性变化及重叠信号中的比值 ρ

我们考虑两个具有代表性的啁啾质量尺度, $\mathcal{M}_z = 10^5$ 和 $\mathcal{M}_z = 10^6$, 并研究啁啾质量差异 $\Delta\mathcal{M}_z$ 对参数不确定性比率 ρ 的影响, 包括是否包含高阶模式。结果如图 3 所示。附加的 $\mathcal{M}_z = 10^4$ 和 10^7 的结果在附录 A 中提供。如明显所示, 由于源混淆导致的参数不确定性最大增加发生在 $\Delta\mathcal{M}_z \rightarrow 0$ 时, 这与现有文献一致。此外, 随着 $\mathcal{M}_z$ 的增加, 高阶模式的不确定性缓解效果变得更加显著。

进一步分析表明, 在与太极任务最相关的啁啾质量范围 (10^4 , 10^5 , 10^6 和 $10^7 M_\odot$) 中, 参数不确定性比 $\rho(-1)$ 仅在相对啁啾质量差异 $\Delta\mathcal{M}_z/\mathcal{M}_z$ 低于 0.2% 时才会超过 $\mathcal{O}(10^1)$ 。即使在这种极端情况下, 不确定性增加仍低于 $\mathcal{O}(10^1)$ 数量级, 与未混淆基线相比。对于较低的啁啾质量 (10^4 – $10^5 M_\odot$), 增加幅度甚至更小, 保持在 $\mathcal{O}(10^0)$ 以内。基于对 PopIII、Q3d 和 Q3nod 种群模型的数值模拟——排除太极灵敏度带外的 MBHBs——我们发现, 与配对中较小质量相比, 具有 $\Delta\mathcal{M}_z < 0.2\%$ 的重叠事件比例对于这三个模型分别为 0.14% (0.08%, 0.12%)。

图 4 进一步说明了 $\rho(-1)$ 与重叠频率 f_{ov} 在不同 $\mathcal{M}_z$ 值下的依赖关系。由于每个质量尺度的频率覆盖范围不同, f_{ov} 的范围也随之变化。对于低质量系统 ($\mathcal{M}_z = 10^4$ 和 10^5), 随着 f_{ov} 的增加, $\rho - 1$ 保持几乎不变, 显示出很小的波动。自旋参数 a_{1z} 和 a_{2z} 的不确定性几乎一致。与之相反, 对于更高质量的系统 ($\mathcal{M}_z = 10^6$ 和 10^7), 特别是当包含更高阶模式时, 不确定性比率随着 f_{ov} 的变化表现出更明显的变化, 在某些频率附近观察到急剧增加。

在 $\mathcal{M}_z = 10^7$ 的极端情况下, 仅使用 (2, 2) 模式可能导致较大的估计误差。

总体而言, 更高阶模式的包含显著抑制了 $\rho - 1$ 的增长, 这是由于源混淆造成的。即使在最坏的情况 $\Delta\mathcal{M}_z = 0$ 下, 结果 $\rho - 1$ 仍然保持在 $\mathcal{O}(10^1)$ 内, 并未超过 $\mathcal{O}(10^2)$ 。

如图 5 所示, $\rho - 1$ 随 $\Delta\Phi \in [0, 2\pi]$ 的变化在区间 $[0, \pi]$ 和 $[\pi, 2\pi]$ 之间表现出几乎对称的镜像图案, 尽管存在数值差异。一般地, $\rho - 1$ 在 $\Delta\Phi = 0$ 处达到局部最大值, 在 $\Delta\Phi = \pi$ 处下降到局部最小值, 然后再次增加, 表明由于相位差导致的时间频率重叠具有周期

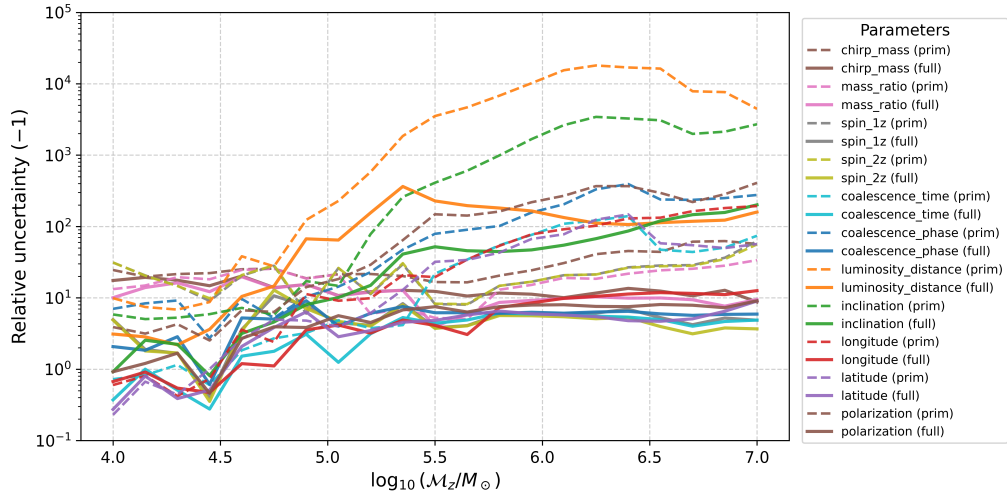


图 2. 参数不确定性比 $\rho(-1)$ 作为 chirp 质量尺度的函数，针对案例 $\Delta M_z = 0$ 。实线代表包含更高阶模式的波形；虚线仅显示主导 (2, 2) 模式的结果。重叠处的相位差是固定的 ($\Delta\phi = 0$)，且时间-频率轨迹中的相对重叠位置保持不变。

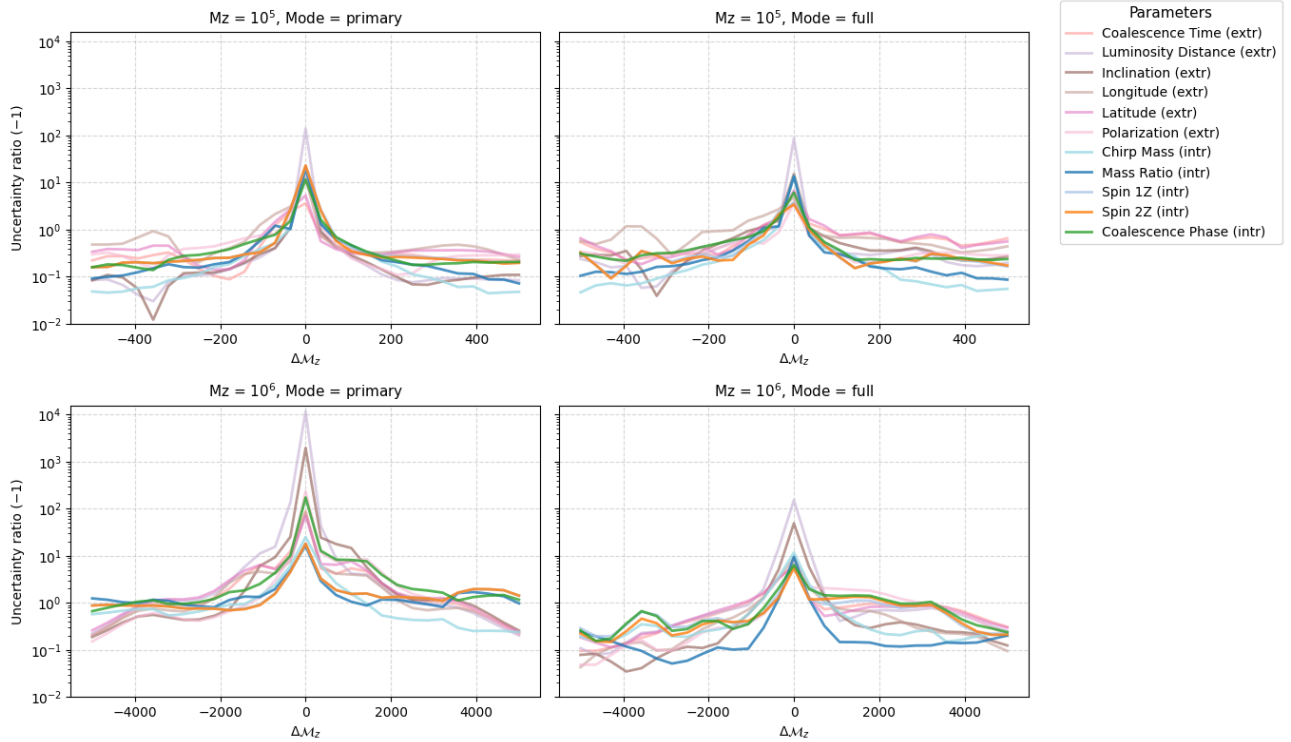


图 3. 参数不确定性比 $\rho(-1)$ 作为 chirp 质量差 ΔM_z 的函数对于 $M_z = 10^5$ (顶部) 和 $M_z = 10^6$ (底部)。左面板仅考虑主要的 (2, 2) 模式，而右面板包括高阶模式。 ΔM_z 的范围占各自 M_z 的 1%，且 $\Delta\Phi = 0$ 在时频轨迹中具有固定相对位置。

性调制。 a_{1z} 和 a_{2z} 的不确定性在整个过程中几乎保持相同，这表明源混淆以高度相似的方式影响它们。

尽管本节重点讨论了 $\Delta M_z = 0$ 的极端情况，结果显示即使在这种条件下，包含高阶模式也能使 $\rho - 1$ 大部分保持在 $\mathcal{O}(10^1)$ 内，并且始终低于 $\mathcal{O}(10^2)$ 。在

$M_z = 10^7$ 情况中观察到的大幅波动可能归因于高质量系统的时频演化范围较窄，这增强了特定相位差下的信号重叠和交叉相关效应。这种敏感性突显了高阶模式在准确建模和参数推断中的关键作用。

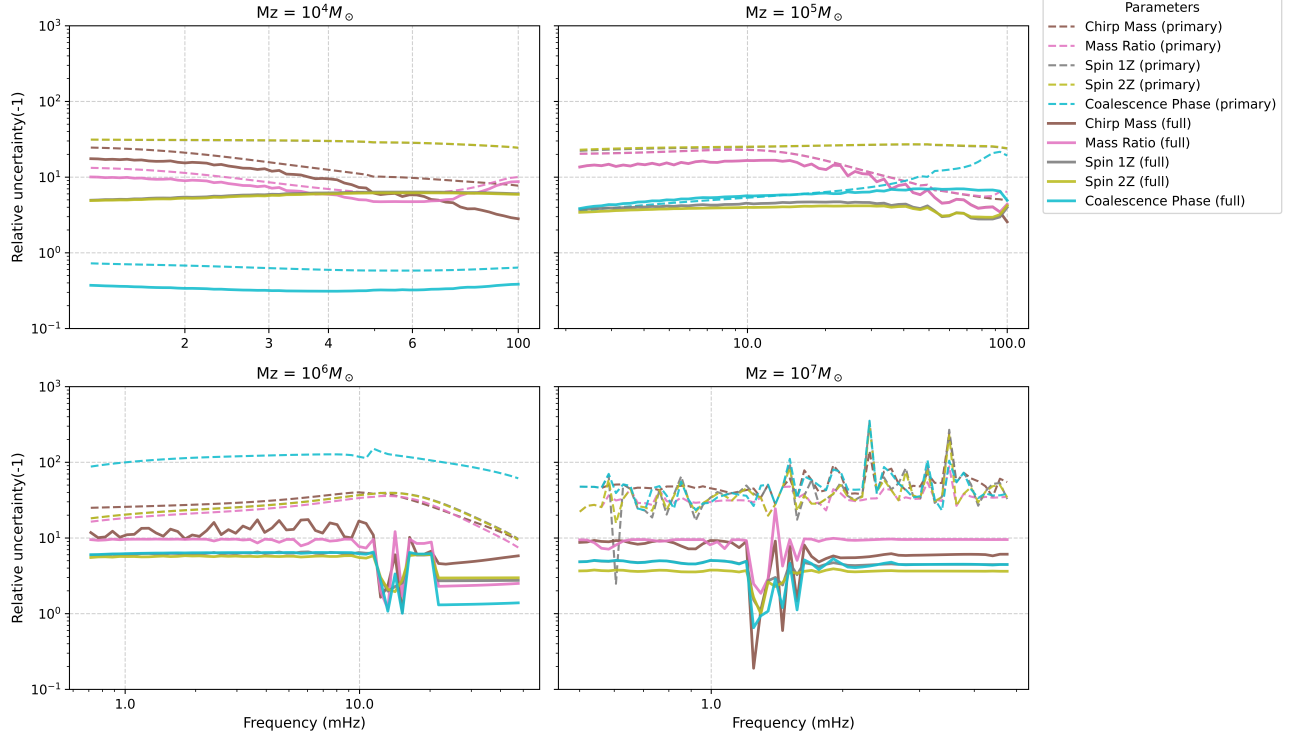


图 4. 参数不确定性比率 $\rho(-1)$ 随着重叠频率 f_{ov} 增加的变化，针对不同的啁啾质量尺度。仅显示内在参数。虚线表示只有主导模式 (2, 2) 的波形；实线包括更高阶模式。所有情况均使用 $\Delta\mathcal{M}_z = 0$ 和 $\Delta\Phi = 0$ 。

C. 完全贝叶斯推理与重叠的 MBHB 信号

基于之前的统计分析，我们选择了一对表现出强烈源混淆的 MBHB 信号来进行全贝叶斯推理，使用 MCMC 采样。这两个信号的参数集如下：

- 参数 1: $\mathcal{M}_z = 10^5$, $q = 0.52$, $a_{1z} = 0.90$, $a_{2z} = 0.92$, $t_c = 30.0$, $\Phi_c = 0.5$, $D_L = 30,200$, $\iota = 0.82$, $\lambda = 3.35$, $\beta = 0.045$, $\psi = 1.56$;
- 参数 2: $\mathcal{M}_z = 10^5$, $q = 0.50$, $a_{1z} = 0.90$, $a_{2z} = 0.92$, $t_c = 29.9999998$, $\Phi_c = 0.3004$, $D_L = 30,200$, $\iota = 0.80$, $\lambda = 3.50$, $\beta = 0.10$, $\psi = 1.50$.

所有参数的物理单位列于表 II 中。

1. 单信号估计与分析

我们首先使用完整的 MCMC 采样独立分析每个信号，以估计源参数的后验分布。图 6 显示了一个代表

性的 MBHB 信号的角图。轮廓表示边缘化后验分布的 1σ 和 2σ 可信区间。使用包括更高阶模式的波形获得的结果用红色表示，而仅使用主导 (2, 2) 模式的结果用蓝色表示。

2. 两个波形模板匹配双信号

图 7 显示了使用两个波形模板匹配两个信号的 MCMC 结果的角图。轮廓代表边缘后验分布的 1σ 和 2σ 置信区间。包含高阶模式的波形所得结果用红色表示，而仅使用主导 (2, 2) 模式的则用蓝色表示。这些结果显示，纳入高阶模式可以显著降低参数不确定性，并有助于解决波形建模中出现的参数退化问题。

IV. 结论

在这项研究中，我们系统地调查了源混淆对大规模黑洞双星 (MBHBs) 参数估计的影响，特别是在基于空间的引力波探测背景下，具体针对太极任务。虽然 MBHBs 之间的源混淆可能发生，但主要是限于两

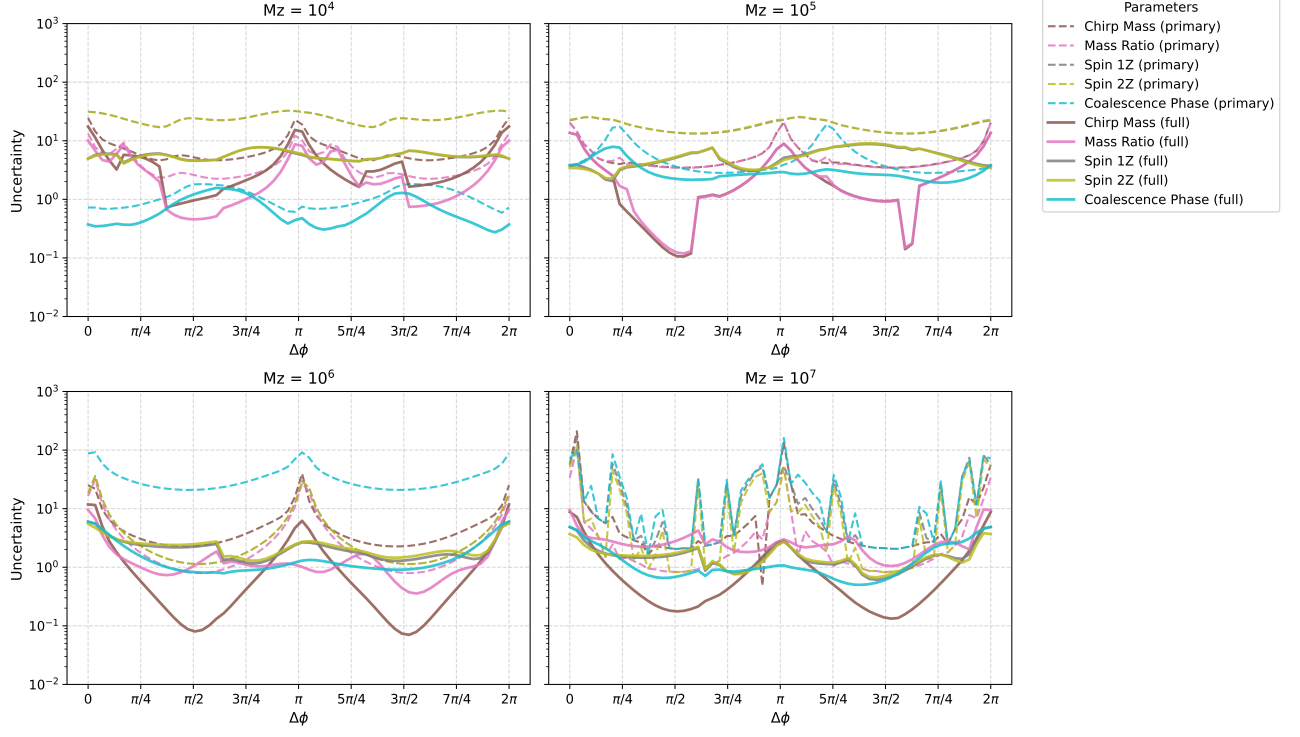


图 5. 参数不确定性比 $\rho - 1$ 作为相位差 $\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$ 的函数，其中 Φ_1 和 Φ_2 是 TDI-X2 通道中的信号相位。仅显示内在参数。虚线表示只有 (2, 2) 模式的波形；实线包括高阶模式。这里， $\Delta\mathcal{M}_z = 0$ 。

个信号之间的重叠。通过采用现实的 MBHB 人口模型 (PopIII、Q3d 和 Q3nod) 并在时频域中模拟重叠事件，我们使用费雪信息矩阵以及马尔可夫链蒙特卡洛 (MCMC) 技术进行全贝叶斯推断来量化混淆的影响。

我们的结果表明，当两个信号的探测器框架啁啾质量差异较小时 ($\Delta\mathcal{M}_z/\mathcal{M}_z \lesssim 0.2\%$)，参数不确定性会显著增加，尤其是在高质量系统中。然而，当引入更高阶波形模式时，这种退化现象明显减轻。更高阶模式不仅降低了整体参数的不确定性，还有助于打破诸如质量比和自旋等内在参数之间的简并性，特别是在强重叠的情况下。

我们进一步表明，即使在最具挑战性的场景（例如 $\Delta\mathcal{M}_z = 0$ ）中，高阶模式的包含也将不确定性增加限制在 $\mathcal{O}(10^1) - \mathcal{O}(10^2)$ 内，突显了它们对精确天体

物理推断的关键重要性。我们的 MCMC 分析证实了这些趋势，并揭示高阶模式也提高了多个重叠源联合参数估计的保真度。

这些发现为未来的空间引力波任务提供了重要的指导。特别是，它们强调了在混淆限制范围内使用包含高阶模式的波形模板的必要性，并突出了将费舍尔预测与完整的贝叶斯推断相结合以进行稳健数据分析的价值。随着下一代探测器旨在解析越来越复杂的源群体，理解和减轻源混淆的影响对于最大化科学回报至关重要。

V. 附录

[16] A. D. Johnson, K. Chatziioannou, and W. M. Farr, “Source Confusion from Neutron Star Binaries in Ground-Based Gravitational Wave Detectors is Minimal,”

arXiv:2402.06836 [gr-qc], (2024). <https://arxiv.org/abs/2402.06836>

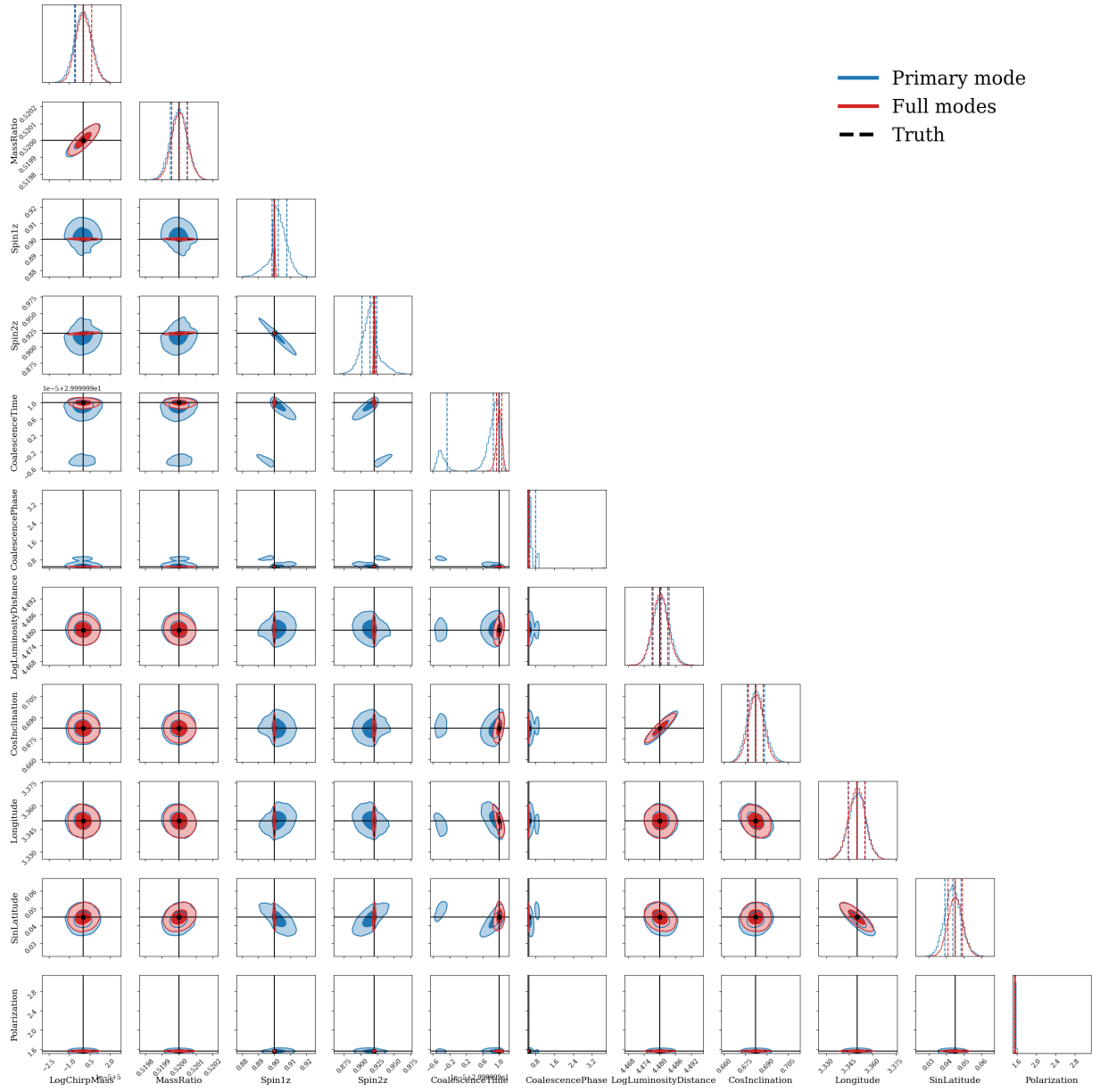


图 6. 后验分布的角图，用于单个双黑洞信号的 MCMC 采样。红色轮廓表示具有高阶模式的结果；蓝色轮廓仅对应于主导 (2, 2) 模式。阴影区域代表 1σ 和 2σ 可信区间。

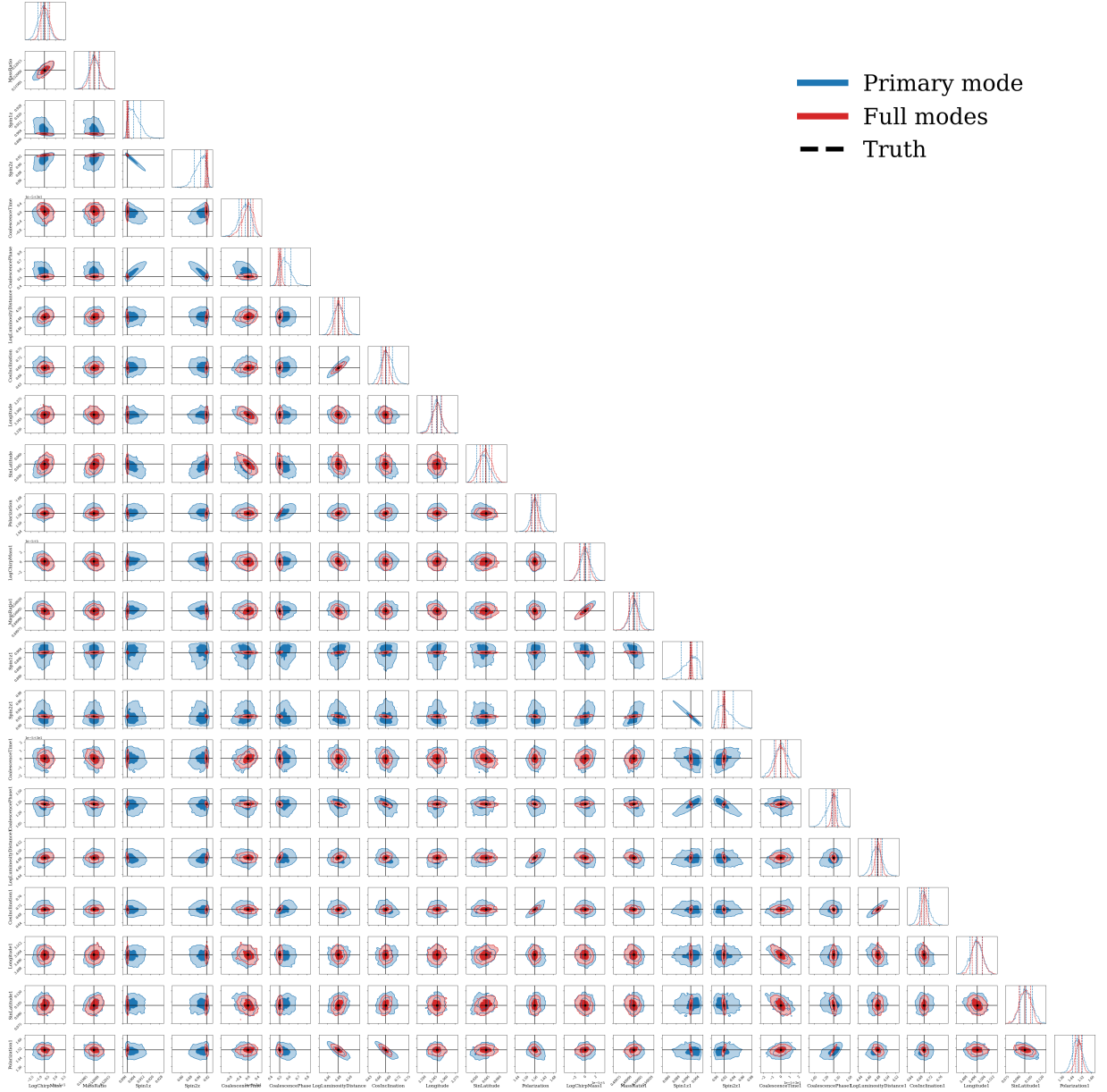


图 7. 后验分布的角图，用于使用 MCMC 采样的两个 MBHB 信号。红色轮廓表示具有高阶模式的结果；蓝色轮廓仅对应于主导 (2,2) 模式。阴影区域代表 1σ 和 2σ 可信区间。

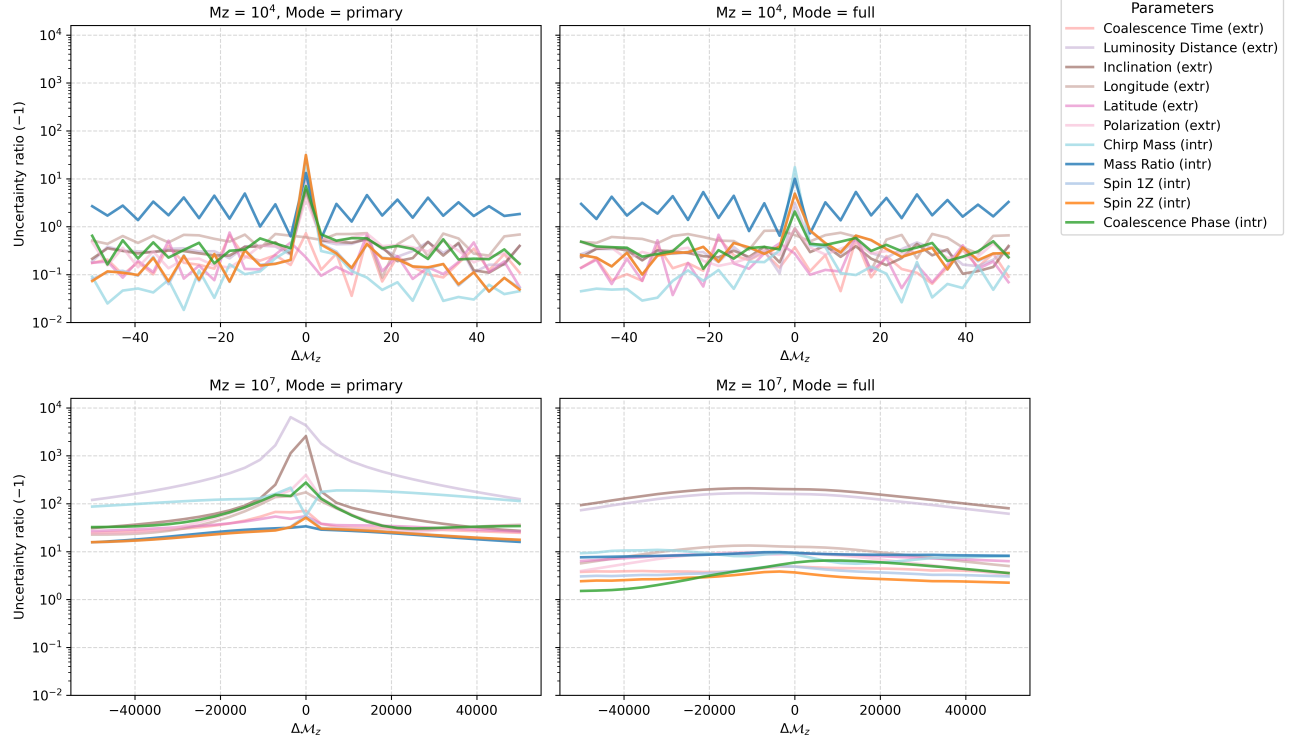


图 8. 影响不同啁啾质量 ΔM_z 对两个信号参数不确定性的影响，这两个信号分别具有 $M_z = 10^4$ 和 10^7 。左侧面板仅使用主要的 (2,2) 模式显示结果，而右侧面板包括更高阶模式。 x 轴跨度为对应啁啾质量的 1%。