超越自旋：无自旋量子力学中的扭转变换非线性

Tomoi Koide[1, 2, *] and Armin van de Venn[2, 3, †]

[1] Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 21941-972, Rio de Janeiro, RJ, Brazil
[2] Frankfurt Institute for Advanced Studies (FIAS), Frankfurt am Main, Germany
[3] Physics Department, Goethe University, Max-von-Laue-Str. 1, 60438 Frankfurt am Main, Germany

我们探讨了非相对论性、无自旋粒子在具有挠率的曲面空间中传播之前未被探索过的量子动力学。我们的研究结果表明，尽管挠率主要与自旋相关联，但它也可以通过量子涨落诱导薛定谔方程中的对数非线性来影响无自旋粒子的量子行为，即使是在平坦的空间中也是如此。为了促进曲面空间中的量子化，我们引入了一种新颖的随机变分方法。与规范量子化不同，这种方法自然适合于广义坐标系统，其中量子涨落源于直接受挠率影响的随机过程中的噪声项。通过要求与量子动力学的一致性，我们最终得出了挠率大小的一个上限。我们的研究结果揭示了一个之前未被识别的机制，即如某些广义相对论扩展所预测的那样，挠率可以通过该机制影响量子系统，并可能对早期宇宙物理学和暗物质或能量模型产生影响。

广义相对论（GR）将引力描述为时空的几何属性，并成功解释了各种天文和宇宙现象，如引力透镜效应和宇宙膨胀。然而，标准的基于 GR 的模型在纳入额外的引力效应时遇到了困难，这表明需要对我们的引力理解进行修改。

一个有前景的扩展是度量-仿射引力理论，该理论将连接视为独立场，引入了额外的自由度：挠率和非度规性。挠率解释了时空中平行传输的非交换性，而非度规性量化了连接未能保持度规相容的程度。这种类型的理论解决了广义相对论在解释暗物质和暗能量 [1–4] 等现象方面的局限，提供了一个更广泛的框架来探索经典和量子尺度上的引力效应 [5, 6]。挠率主要是在粒子物理学中的自旋相互作用背景下进行研究的，在那里它自然出现在狄拉克方程 [7–13] 中，但它在无自旋系统中的量子涨落中所起的作用未知之地。

在这封信中，我们证明了即使在没有自旋的情况下，挠率也会影响量子力学，暗示了一种之前被忽视的空间几何与量子波动之间的联系。为了建立这一点，我们将随机变分方法（SVM）[14–18] 扩展到可以考虑具有挠率的系统。SVM 将粒子轨迹建模为布朗运动，通过应用于随机作用量的变分原理来推导量子动力学。例如，当将 SVM 应用于经典牛顿作用量时，薛定谔方程自然出现，位置-动量不确定性源自粒子轨迹固有的不可微性 [19–21]。与仅限于具有无界谱变量（如笛卡尔坐标）的规范量化不同，SVM 可以容纳诸如角变量 [20, 22, 23] 这样的广义坐标。在我们的方法中，即使没有内在自旋，挠率编码的空间（时间）几何也通过改变布朗运动中的噪声项来改变驱动量子行为的随机波动 [1]。

我们采用微分几何的联络形式，这为在弯曲空间中工作提供了便利框架 [25]。考虑一个装备有度量张量 g_{ij} 的 D 维弯曲空间，在坐标基下，其中 $i, j = 1, 2, \ldots, D$。相比之下，在局部正交标架下，度量表示为 $\eta_{\hat{a}\hat{b}}$，具有联络指标 $\hat{a}, \hat{b} = 1, 2, \ldots, D$。在这封信中，我们使用帽子符号（即，$\hat{\bullet}$）来指示局部正交标架下的分量。

度量的坐标和正交规范表示通过 vielbein$e^{\hat{a}}{}_i$ 相互关联，即

$$g_{ij} = \eta_{\hat{a}\hat{b}} e^{\hat{a}}{}_i e^{\hat{b}}{}_j \,. \tag{1}$$

连同其对偶 vielbein $e_{\hat{a}}{}^i := g^{ij}\eta_{\hat{a}\hat{b}} e^{\hat{b}}{}_j$，vielbein 满足正交性关系 $\delta^i_j = e_{\hat{a}}{}^i e^{\hat{a}}{}_j$ 和 $\delta^{\hat{a}}_{\hat{b}} = e^{\hat{a}}{}_k e_{\hat{b}}{}^k$。分别用坐标和 vielbein 指标表示的平行输运由仿射联络 Γ 和自旋（洛伦兹）联络 ω 特征化。后者定义为

$$\omega^{\hat{a}}{}_{\hat{b}i} := e^{\hat{a}}{}_j \partial_i e_{\hat{b}}{}^j + e_{\hat{b}}{}^j \Gamma^k{}_{ji} e^{\hat{a}}{}_k \,. \tag{2}$$

从此，我们假设度量兼容性 $\nabla_k g_{ij} = 0$，导致自旋联络在其前两个指标中的反对称性 $\omega_{\hat{a}\hat{b}i} = -\omega_{\hat{b}\hat{a}i}$。

* tomoikoide@gmail.com,koide@if.ufrj.br
† venn@fias.uni-frankfurt.de

[1] 受类似考虑的启发，Rapoport 研究了扭转载体对薛定谔方程的影响，但并未完全确定其后果。[24]

在存在挠率的情况下，仿射联络可以分解为

$$\Gamma^k{}_{ij} = \mathring{\Gamma}^k{}_{ij} + K^k{}_{ij} \,, \tag{3}$$

其中 $\mathring{\Gamma}^k{}_{ij}$ 表示 Levi-Civita 联络，$K^k{}_{ij}$ 表示畸变张量，

$$K^k{}_{ij} := g^{kl}\left(S_{lij} - S_{ilj} - S_{jli}\right) \,, \tag{4}$$

该张量是通过挠率张量定义的，

$$S^k{}_{ij} := \Gamma^k{}_{[ij]} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^k{}_{ij} - \Gamma^k{}_{ji}\right) \,. \tag{5}$$

挠率衡量了向量在沿闭合路径平行移动后未能返回其原始方向的程度。我们将探讨由挠率代表的这一额外自由度如何影响量子动力学。

在 SVM 量化中，量子粒子的运动通过布朗运动来建模，其中噪声代表了量子涨落。为了描述具有扭转的 D 维曲率空间中的量子动力学，我们在这种设置下制定了布朗运动。系统由一个不依赖时间的黎曼度量 g_{ij} 定义，其中粒子位置 $\widetilde{q}^i(t)$ 服从带有一个前向随机微分方程 (SDE) 的 $\mathrm{d}t > 0$ [16, 22, 26]:

$$\mathrm{d}\widetilde{q}^i(t) = u_+^i(\widetilde{q}(t), t)\mathrm{d}t + \sqrt{2\nu}e_{\hat{a}}{}^i \circ \mathrm{d}\widetilde{B}_+^{\hat{a}}(t) \,. \tag{6}$$

这里，$\widetilde{\bullet}$ 表示随机量，$\mathrm{d}\widetilde{A}(t) := \widetilde{A}(t+\mathrm{d}t) - \widetilde{A}(t)$ 为任意随机量 $\widetilde{A}(t)$，而 ν 表征噪声强度。由随机变分确定的光滑向量场 $u_+^i(q,t)$ 并非粒子自身的速度，见方程 (17)。维纳过程 $\mathrm{d}\widetilde{B}_+^{\hat{a}}(t)$ 的倾斜满足以下相关性，

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{d}\widetilde{B}_+^{\hat{a}}(t)\right] = 0 \,, \tag{7}$$

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{d}\widetilde{B}_+^{\hat{a}}(t)\,\mathrm{d}\widetilde{B}_+^{\hat{b}}(t')\right] = \mathrm{d}t\delta^{\hat{a}\hat{b}}\delta_{tt'} \,, \tag{8}$$

其中 $\mathrm{E}[\bullet]$ 表示集合平均值。这些定义在局部笛卡尔坐标中，并使用接腿向量场 $e_{\hat{a}}{}^i = e_{\hat{a}}{}^i(\widetilde{q}(t))$ 投影到弯曲空间上。等式 (6) 的最后一项是所谓的 Stratonovich 乘积，记为 ``$\circ$"，对于任意光滑函数 $F(q,t)$ 和 $G(q,t)$ 定义如下：

$$\begin{aligned} &F(\widetilde{q}(t),t) \circ \mathrm{d}G(\widetilde{q}(t),t) \\ &:= \frac{F(\widetilde{q}(t+\mathrm{d}t), t+\mathrm{d}t) + F(\widetilde{q}(t),t)}{2}\mathrm{d}G(\widetilde{q}(t),t) \,. \end{aligned} \tag{9}$$

在随机微积分中，Leibniz 法则通常不成立，然而通过使用 Stratonovich 定义，它可以形式上被恢复 [27]。为了不用 Stratonovich 乘积表示等式 (6)，我们需要 vielbein 的差。遵循伊藤对随机平行传输 [26] 的定义，我们采用

$$\mathrm{d}e_{\hat{a}}{}^i := -\Gamma^i{}_{jk}e_{\hat{a}}{}^j \circ \mathrm{d}\widetilde{q}^k(t) \,. \tag{10}$$

引入前向 SDE 的时间反向动力学，这对于 SVM 的公式化是必要的，需要讨论粒子概率分布。不变的守恒粒子概率分布由

$$\rho(q,t) = \frac{1}{\sqrt{g(q)}}\int \mathrm{d}^D R\sqrt{g(R)}\,\rho_0(R)\mathrm{E}\left[\delta^{(D)}(q - \widetilde{q}(t))\right] \,, \tag{11}$$

定义，其中 $\delta^{(D)}(q-\widetilde{q}(t)) = \prod_{i=1}^D \delta(q^i - \widetilde{q}^i(t))$,$\rho_0(q) = \rho(q,0)$，$R^i = \widetilde{q}^i(0) = q^i(0)$ 和 $g = \det(g_{ij})$。使用伊藤引理 [27]，即泰勒展开的随机模拟，带挠率的弯曲空间中的福克-普朗克（FP）方程可以表示为

$$\partial_t\rho(q,t) = -\nabla_j\left(\left\{u_+^j(q,t) + \nu K^j\right\}\rho(q,t)\right) + \nu\Delta_{LB}\rho(q,t) \,. \tag{12}$$

这里，∇_i 表示协变导数，$\Delta_{LB} = g^{ik}\nabla_i\partial_k$ 是拉普拉斯-贝尔特拉米算子。收缩挠率张量定义为

$$K_i := K^k{}_{ik} = 2S^k{}_{ik} =: 2S_i \,, \tag{13}$$

它由挠率引起，因此在没有挠率的弯曲空间中消失。前向 SDE 及其对应的 FP 方程表明，通过四维标架，空间几何修改了噪声项，从而影响粒子的统计行为。如后文所述，这种噪声引起的随机性是解释量子涨落的基础。值得注意的是，即使在没有自旋的情况下，挠率也通过其对噪声的影响来影响波动粒子的运动，强调了它在无自旋系统量子动力学中的关键作用。

前向 SDE 的右侧 (6) 描述了无穷小时间间隔 $\mathrm{d}t$ 内 $\widetilde{q}^i(t)$ 的变化。然而，这并不对应于传统的粒子速度，因为随机轨迹可以是连续但处处不可微分的，即使在极限 $\mathrm{d}t \to 0$ 下也是如此。也就是说，左极限和右极限通常不同：$\lim_{\mathrm{d}t\to 0+}\mathrm{d}\widetilde{q}^i(t)/\mathrm{d}t \neq \lim_{\mathrm{d}t\to 0-}\mathrm{d}\widetilde{q}^i(t)/\mathrm{d}t$。为了考虑两个极限的差异，Nelson 引入了两个时间导数 [14]：一个是均向前导数，

$$\mathrm{D}_+ f(\widetilde{q}(t)) := \lim_{\mathrm{d}t\to 0+}\mathrm{E}\left[\frac{f(\widetilde{q}(t+\mathrm{d}t)) - f(\widetilde{q}(t))}{\mathrm{d}t}\Big|\mathcal{P}_t\right] \,, \tag{14}$$

另一个是均向后导数

$$\mathrm{D}_- f(\widetilde{q}(t)) := \lim_{\mathrm{d}t\to 0-}\mathrm{E}\left[\frac{f(\widetilde{q}(t+\mathrm{d}t)) - f(\widetilde{q}(t))}{\mathrm{d}t}\Big|\mathcal{F}_t\right] \,. \tag{15}$$

这些期望值是从条件平均值得出的，其中 $\mathcal{P}_t(\mathcal{F}_t)$ 表示一组固定了 $\widetilde{q}(t')$ 的轨迹对于 $t' \le t(t' \ge t)$。为了定义概率，我们选择一个适当的（可测）轨迹子集，该子集满足 σ-代数。然后 $\mathcal{P}_t(\mathcal{F}_t)$ 表示一组递增（递减）的

子-σ-代数。这两个均值导数在随机分部积分中起互补作用。具体来说，对于任意随机过程 $\widetilde{A}(t)$ 和 $\widetilde{B}(t)$，我们发现

$$\int_a^b \mathrm{d}s\,\mathrm{E}\left[\widetilde{B}(s)\mathrm{D}_+\widetilde{A}(s)\right] = -\int_a^b \mathrm{d}s\,\mathrm{E}\left[\widetilde{A}(s)\mathrm{D}_-\widetilde{B}(s)\right] + \int_a^b \mathrm{d}s\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathrm{E}\left[\widetilde{A}(s)\widetilde{B}(s)\right]. \tag{16}$$

应用上述定义到前向 SDE (6)，我们可以很容易地计算出均值前向导数，

$$\mathrm{D}_+\widetilde{q}^i(t) = u_+^i(\widetilde{q}(t),t) - \nu\Gamma^i{}_{kj}\,g^{kj}. \tag{17}$$

这里，$\Gamma^i{}_{kj}$ 和 g^{kj} 在 $\widetilde{q}(t)$ 处评估因此它们本身就是随机量。我们无法从正向随机微分方程 (6) 计算 $\mathrm{D}_-\widetilde{q}(t)$，因为 $\mathrm{d}\widetilde{B}_+^{\hat{a}}(t)$ 仅对 $\mathrm{d}t > 0$ 定义。我们需要引入一个随时间反向演化的等效方程。

引入另一个向量场 $u_-(q,t)$，此反向 SDE 由

$$\mathrm{d}\widetilde{q}^i(t) = u_-^i(\widetilde{q}(t),t)\mathrm{d}t + \sqrt{2\nu}e_{\hat{a}}{}^i \circ \mathrm{d}\widetilde{B}_-^{\hat{a}}(t), \tag{18}$$

定义，其中 $\mathrm{d}t < 0$ 和 $\mathrm{d}\widetilde{B}_-^{\hat{a}}(t)$ 表示额外的维纳过程的倾斜度，其特征为

$$\mathrm{E}[\mathrm{d}\widetilde{B}_-^{\hat{a}}(t)] = 0, \tag{19}$$

$$\mathrm{E}[\mathrm{d}\widetilde{B}_-^{\hat{a}}(t)\mathrm{d}\widetilde{B}_-^{\hat{b}}(t')] = |\mathrm{d}t|\delta^{\hat{a}\hat{b}}\delta_{tt'}. \tag{20}$$

第二个相关性中出现的绝对值是由于 $\mathrm{d}t < 0$。同样地，$u_-^i(q,t)$ 是通过随机变化确定的。由于反向随机微分方程描述了正向随机微分方程的时间逆过程，向量场 $u_-^i(q,t)$ 与 $u_+^i(q,t)$ 相关。为了找到这种关系，我们使用反向随机微分方程计算 FP 方程：

$$\partial_t\rho(q,t) = -\nabla_j\left(\left\{u_-^j(q,t) - \nu K^j\right\}\rho(q,t)\right) - \nu\Delta_{LB}\rho(q,t). \tag{21}$$

方程 (21) 的右侧必须等同于方程 (12) 的右侧。因此，两个向量场 $u_\pm^i(q,t)$ 是通过以下一致性条件 [17] 相关的：

$$u_+^i(q,t) - u_-^i(q,t) = -2\nu K^i + 2\nu g^{ik}\partial_k\ln\rho(q,t), \tag{22}$$

导致

$$\mathrm{D}_-\widetilde{q}^i(t) = u_+^i(\widetilde{q}(t),t) + 2\nu K^i - 2\nu g^{ik}\partial_k\ln\rho(\widetilde{q}(t),t) + \nu\Gamma^i{}_{kj}\,g^{kj}. \tag{23}$$

利用一致性条件，我们发现两个 FP 方程简化为相同的连续性方程

$$\partial_t\rho(q,t) = -\nabla_j(\rho(q,t)v^j(q,t)), \tag{24}$$

其中

$$v^i(q,t) := \frac{u_+^i(q,t) + u_-^i(q,t)}{2}. \tag{25}$$

与 $u_\pm^i(q,t)$ 不同，$v^i(q,t)$ 平行于概率流因此自然可以将其解释为粒子速度场。

我们现在开发一个广义的 SVM 方案，以推导具有挠率的弯曲空间中无自旋粒子的量子动力学。我们从质量为 m 的非相对论性粒子的经典拉格朗日开始，该粒子在具有挠率的弯曲空间中运动，

$$L = \frac{m}{2}g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j - V(q), \tag{26}$$

其中 $V(q)$ 代表势能，$\dot{q}^i := \mathrm{d}q^i/\mathrm{d}t$。请注意，这个拉格朗日式不显式地依赖于挠率。利用扭量的性质，该拉格朗日可以重新表示为局部笛卡尔坐标中的形式：

$$L = \frac{m}{2}\eta_{\hat{a}\hat{b}}\dot{q}^{\hat{a}}\dot{q}^{\hat{b}} - V(q), \tag{27}$$

其中 $\eta_{\hat{a}\hat{b}} = \mathrm{diag}(1,1,\cdots)$。为了实现随机变化，$\dot{q}^{\hat{a}}$ 应替换为相应的随机量。在量化背景下，已知动能项被其均向前向后导数的对称平均值所替代：[17, 22, 28]：

$$\eta_{\hat{a}\hat{b}}\dot{q}^{\hat{a}}\dot{q}^{\hat{b}} \longrightarrow \eta_{\hat{a}\hat{b}}\frac{(\mathrm{D}_+\widetilde{q}^{\hat{a}})(\mathrm{D}_+\widetilde{q}^{\hat{b}}) + (\mathrm{D}_-\widetilde{q}^{\hat{a}})(\mathrm{D}_-\widetilde{q}^{\hat{b}})}{2}. \tag{28}$$

这种对称替换确保了随机拉格朗日量中的时间反演不变性。违反此对称会导致黏性效应 [17, 21, 23, 28]。因此，相应的随机拉格朗日量由以下给出：

$$L_{sto}(\widetilde{q},\mathrm{D}_+\widetilde{q},\mathrm{D}_-\widetilde{q}) = \frac{m}{4}\eta_{\hat{a}\hat{b}}\{(\mathrm{D}_+\widetilde{q}^{\hat{a}})(\mathrm{D}_+\widetilde{q}^{\hat{b}}) + (\mathrm{D}_-\widetilde{q}^{\hat{a}})(\mathrm{D}_-\widetilde{q}^{\hat{b}})\} - V(\widetilde{q}). \tag{29}$$

由于个别随机轨迹本质上是随机的，我们不会针对单个轨迹优化作用量。相反，我们会优化定义在任意时间间隔 $t_i \le t \le t_f$ 上的系综平均随机作用量

$$I_{sto}[\widetilde{q}] = \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t\,\mathrm{E}\left[L_{sto}(\widetilde{q},\mathrm{D}_+\widetilde{q},\mathrm{D}_-\widetilde{q})\right], \tag{30}$$

。粒子轨迹的变化由下式定义

$$\widetilde{q}^{\hat{a}}(t) \longrightarrow \widetilde{q}^{\hat{a}}(t) + \delta f^{\hat{a}}(\widetilde{q}(t),t), \tag{31}$$

其中无穷小的光滑函数满足以下边界条件：

$$\delta f^{\hat{a}}(q,t_i)=\delta f^{\hat{a}}(q,t_f)=0\,. \tag{32}$$

要求方程 (30) 的随机变化对于任意选择的 $\delta f(q,t)$ 和随机事件 $\mathrm{d}\widetilde{B}^{\hat{a}}_{\pm}(t)$ 消失，我们发现速度场 $v^i(q,t)$（不是粒子速度 $v^i(\widetilde{q}(t),t)$）由以下流体力学方程决定，

$$\begin{aligned}&\partial_t v^i+v^k\nabla_k v^i+\frac{1}{m}g^{ik}\partial_k V\\&=\nu^2 g^{ik}\left\{2\nabla_k\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\Delta_{LB}\sqrt{\rho}\right)-R_{jk}g^{jl}\partial_l\ln\rho\right\}+\Sigma^i\,,\end{aligned} \tag{33}$$

其中 $R_i{}^k=g^{kj}R_{ij}=g^{jk}R^l{}_{jkl}$ 是里奇张量并且

$$\begin{aligned}\Sigma^i:=\nu^2g^{in}&\left\{2g^{kl}(\partial_l\ln\rho)S^m{}_{nk}(\partial_m\ln\rho)\right.\\&-2g^{kl}(S^m{}_{kn}\nabla_m\partial_l\ln\rho-\nabla_l(S^m{}_{nk}\partial_m\ln\rho))\\&+2g^{kl}(\partial_l\ln\rho)S^m{}_{nk}(\partial_m\ln\rho)\\&\left.-2g^{kl}(S^m{}_{kn}\nabla_m\partial_l\ln\rho-\nabla_l(S^m{}_{nk}\partial_m\ln\rho))\right\}\,.\end{aligned} \tag{34}$$

导致方程 (33) 的详细步骤在附录中提供。在噪声趋于零的极限下，$\nu\to 0$，公式（33）简化为牛顿第二定律。测地线方程随后由 $\mathrm{d}q^i(t)/\mathrm{d}t = v^i(q(t),t)$ 和 $\mathrm{d}v^i(q(t),t)/\mathrm{d}t=(\partial_t+v^k(q(t),t)\partial_k)v^i(q(t),t)$ 得出。正如在文献 [15–17, 22, 28] 中讨论并在稍后的公式（41）所示，噪声强度 ν 由普朗克常数决定，从而再现量子力学。因此，右侧的所有项均源自量子效应。右边的第一项对应于玻姆量子位势的梯度，而第二项则反映了量子涨落和空间曲率，如参考文献 [22] 所示。新引入的项 Σ^i 捕捉了量子涨落与挠率之间的相互作用。在此开发的扩展 SVM 公式和流体动力学方程（33）是本研究的关键贡献。

在我们的方案中，带有挠率的曲面空间中的量子动力学由量子流体动力学方程控制，公式 (24) 和 (33)。为了有效分析挠率效应，这些方程必须被简化。运用宇宙原理以及能量-动量守恒和标准的宇宙膨胀限制了挠率的形式为一个特殊的完全反对称张量 [4, 29] 的形式。在一个三维空间中，这种约束使挠率与空间的均匀性和各向同性性质一致，表示为

$$S_{abc}=s(t)\epsilon_{abc}\,, \tag{35}$$

其中 $s(t)$ 是标量场而 ϵ_{abc} 表示三维 Levi-Civita 张量。这直接来自于 Hodge 对偶关系 $\star S_{a_1\ldots a_{D-3}} = \epsilon^{b_1b_2b_3}{}_{a_1\ldots a_{D-3}}S_{b_1b_2b_3}/3!$ 对于 $D=3$ 。这里，Hodge 星由标量场 $s(t)$ 给出。在这个表述中，挠率满足 $S_i=0$ 并等价于畸变张量，即，$K_{ijk}=S_{ijk}$ 。从度规-仿射引力的角度来看，这种挠率的选择也是优选的，因为它允许挠率消失的连续极限，从而恢复 GR[30]。

我们的速度方程 (33) 简化为

$$\begin{aligned}&\partial_t v^i+v^k\mathring{\nabla}_k v^i+\frac{1}{m}g^{ik}\partial_k V-2\nu^2g^{ik}\partial_k\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\mathring{\Delta}_{LB}\sqrt{\rho}\right)\\&=-\nu^2g^{ik}\left\{2(\partial_k\ln\rho)s^2+\mathring{R}_{lk}g^{lj}\partial_j\ln\rho+(\partial_j\ln\rho)\mathring{\nabla}_lS^{lj}{}_k\right\},\end{aligned} \tag{36}$$

其中 $\mathring{R}_{ik}$，$\mathring{\nabla}_i$ 和 $\mathring{\Delta}_{LB}$ 分别是仅基于 Levi-Civita 连接的 Ricci 张量、协变导数和 Laplace-Beltrami 算子。因此所有挠率效应都由方程 (36) 的右侧引起。在此推导中，我们使用了

$$R_{ik}=\mathring{R}_{ik}-\mathring{\nabla}_jS^j{}_{ik}+S^j{}_{lk}S^l{}_{ij}\,, \tag{37}$$

$$S^b{}_{ak}S^{ai}{}_b=2s^2\delta^i_k\,. \tag{38}$$

为了将流体动力学方程改写成薛定谔方程的形式，并由此过渡到我们系统的量子力学描述，我们进一步考虑一个具有挠率的平坦空间（$\mathring{R}_{ik}=0$）。在此设定下，方程 (36) 右侧的第二项和第三项消失，仅留下第一项。一个复函数 $\Psi(q,t)$ 被引入：

$$\Psi(q,t)=\sqrt{\rho(q,t)}e^{\mathrm{i}\theta(q,t)}\,, \tag{39}$$

其中相位 $\theta(q,t)$ 对应于速度势：

$$v^i(q,t)=2\nu g^{ij}\partial_j\theta(q,t)\,. \tag{40}$$

选择 $\nu=\hbar/(2m)$，复函数的方程，波函数，由非线性薛定谔方程给出：

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t\Psi=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V+\frac{\hbar^2}{2m}s^2\ln|\Psi|^2\right]\Psi\,, \tag{41}$$

在挠率消失的情况下简化为薛定谔方程。该方程验证了我们的猜想，即挠率和量子涨落从根本上通过引入非线性修改了无自旋的量子力学。这是本工作的另一个重要结果。

非线性薛定谔方程的修改在各种情境下得到了广泛研究，包括孤子动力学、波函数坍缩模型以及量子力学的替代表述 [19, 31–48]。我们的发现自然地扩展了这些现象学方法。例如，在经典耗散系统的现象量

化过程中出现了对数非线性项，尽管它们通常具有纯虚系数 [19, 31, 35, 40, 47]。在平坦空间中研究了量子力学的非线性扩展 [32, 33]，其中对数非线性项被认为是可行候选者。我们的方程(41)与此结果一致，保留了诸如波恩规则和埃伦费斯特定理等基本量化性质，从而确保经典-量子对应关系。与参考文献 [32, 33] 不同，后者将对数系数视为自由参数，我们的表述明确地从扭量推导出了它。然而，如参考文献 [32, 33] 所建议的那样，我们非线性项的正号表明由此产生的非线性方程可能缺乏稳定解——引发了关于波函数稳定性的问题。

在 SVM 量化中，非线性项的形式和系数都依赖于拉格朗日量的选择。一个违反时间反演对称性的时变拉格朗日会产生具有纯虚数系数的 [19, 40] 的不同非线性项。同时，选择超球面会得到与里奇标量 [22] 相关联的负实数系数的对数非线性项。值得注意的是，通过理想流体拉格朗日 [28] 的 SVM 量化可以获得 Gross-Pitaevskii 方程。这些例子强调了作为扩展量子理论非线性的自然框架，SVM 的适应性。

我们的结果对挠率的大小提供了一个限制。在平坦空间中，挠率可能会导致氢原子能级的小偏移，尽管这些偏移与库仑势相比可能微不足道。通过在波尔半径 R_B 处评估位能，并使用 $\ln|\Psi(R_B)|^2 \sim 1$，我们推导出了挠率大小的上限：

$$s \ll \sqrt{2\alpha \frac{m_e}{\hbar^2 R_B}} \approx 5.3\times 10^{-3}\ \mathrm{MeV} \sim 10^{-2}\, m_e, \quad (42)$$

其中 α 是精细结构常数，m_e 是电子质量。我们推导出的界限并不与来自 Ref.[49] 的实验限制相矛盾，这些限制在假设洛伦兹对称性破坏的情况下表明 $s \leq 10^{-31}$ GeV。

扭率已被证明会在狄拉克方程 [8, 50–53] 中诱导非线性。然而，这种非线性本质上与这里检查的类型不同。正如在 Ref.[54] 所示，在非相对论极限下，狄拉克方程中的非线性可以反过来导致薛定谔-牛顿方程中的非线性。然而，这种非线性源自引力势而非扭率，突显了驱动这两种效应的不同机制。

未来的研究方向包括研究扭转对不确定性原理 [19–21]、霍金温度以及贝肯斯坦-霍金熵 [55] 的影响。将支持向量机扩展到相对论系统 [56]，包括在扭转背景下的狄拉克和克莱因-戈登场，可能为理解扭转在基础物理学中的作用提供更深层次的见解。鉴于其与度规-仿射引力和暗物质模型的相关性，由扭转引起的量子效应也可能对早期宇宙物理学产生影响。研究这些问题有望深化我们对扭转在量子力学和引力物理学中重要性的理解。

ACKNOWLEDGMENTS

T.K. 感谢与 T. Kodama 及法兰克福歌德大学理论物理研究所和弗兰克福高级研究院 (FIAS) 的理论小组进行富有成果的讨论。T.K. 感谢 CNPq（编号：305654/2021-7）的资金支持。T.K. 和 A.vdV. 感谢 Fueck-Stiftung 的支持。这项工作的一部分是在 INCT-核物理及应用项目（编号：464898/2014-5）下完成的；

附录 A: 附录

正如正文中的公式所示，SVM 与传统变分方法之间最显著的区别在于虚拟轨迹的不可微性。

特别地，因为势能项不包含 $\widetilde{q}(t)$ 的微分，其变分遵循标准的变分法。为了更仔细地检查差异，我们详细说明动能项的变分如下：

$$\begin{aligned}
&\delta \int_{t_i}^{t_f} dt \mathrm{E}\left[\eta_{\hat{a}\hat{b}}(D_\pm \widetilde{q}^{\hat{a}}(t))(D_\pm \widetilde{q}^{\hat{b}}(t))\right] \\
&= 2\int_{t_i}^{t_f} dt \eta_{\hat{a}\hat{b}} \mathrm{E}\left[u_\pm^{\hat{a}}(\widetilde{q}(t),t)(D_\pm \delta f^{\hat{b}}(\widetilde{q}(t),t))\right] \\
&= -2\int_{t_i}^{t_f} dt \eta_{\hat{a}\hat{b}} \mathrm{E}\left[\delta f^{\hat{b}}(\widetilde{q}(t),t) D_\mp u_\pm^{\hat{a}}(\widetilde{q}(t),t)\right] \\
&= -2\int_{t_i}^{t_f} dt \mathrm{E}\left[\delta f^{\hat{b}}(\widetilde{q}(t),t) g_{ik} e_{\hat{b}}{}^{k} e_{\hat{a}}{}^{i} D_\mp u_\pm^{\hat{a}}(\widetilde{q}(t),t)\right] .
\end{aligned} \quad (A1)$$

在第一个等式中，我们利用了向前和向后平均导数的定义。在第二个等式中，我们应用了随机积分的部分公式。为进一步的计算，我们使用以下结果：

$$\begin{aligned}
e^i_{\hat{a}} D_+ A^{\hat{a}} &= e^i_{\hat{a}} \frac{1}{dt} E[de^{\hat{a}}_j \circ A^j + e^{\hat{a}}_j \circ dA^j | \mathcal{F}_t] \\
&= \partial_t A^i + u_+^k \nabla_k A^i + \nu g^{jk} \nabla_j \nabla_k A^i , \quad (A2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^i_{\hat{a}} D_- A^{\hat{a}} &= e^i_{\hat{a}} \frac{1}{dt} E[de^{\hat{a}}_j \circ A^j + e^{\hat{a}}_j \circ dA^j | \mathcal{P}_t] \\
&= \partial_t A^i + u_-^k \nabla_k A^i - \nu g^{lk} \nabla_k \nabla_l A^i . \quad (A3)
\end{aligned}$$

最终，随机作用量的随机变化 $\delta I_{sto}[\widetilde{q}]=0$，导致

$$\mathrm{E}\left[\delta f^j(\widetilde{q}(t),t)g_{ij}(\widetilde{q}(t),t)\left\{m\partial_t v^i(\widetilde{q}(t),t)\right.\right.$$
$$+u^k_-(\widetilde{q}(t),t)\nabla_k u^i_+(\widetilde{q}(t),t)+u^k_+(\widetilde{q}(t),t)\nabla_k u^i_-(\widetilde{q}(t),t)$$
$$\left.\left.-\nu g^{kl}\nabla_k\nabla_l(u^i_+(\widetilde{q}(t),t)-u^i_-(\widetilde{q}(t),t))+g^{ik}\partial_k V(\widetilde{q}(t),t)\right\}\right]$$
$$=0\,. \tag{A4}$$

为了满足任意 $\delta f^j(q,t)$ 和 $\mathrm{d}\widetilde{B}^{\hat{a}}_\pm(t)$ 在 $\widetilde{q}(t)$ 中的这个方程，速度场应满足

$$m\partial_t v^i(q,t)+u^k_-(q,t)\nabla_k u^i_+(q,t)+u^k_+(q,t)\nabla_k u^i_-(q,t)$$
$$-\nu g^{kl}(q)\nabla_k\nabla_l(u^i_+(q,t)-u^i_-(q,t))+g^{ik}\partial_k V(\widetilde{q}(t),t)=0\,. \tag{A5}$$

向量场 $u^i_\pm(q,t)$ 用 $v^i(q,t)$, $\rho(q,t)$ 和 $S^m{}_{kn}$ 通过一致性条件（22）表示，这导致方程（33）。

[1] A. S. Belyaev, M. C. Thomas, and I. L. Shapiro, Torsion as a Dark Matter Candidate from the Higgs Portal, Phys. Rev. D **95**, 095033 (2017), arXiv:1611.03651 [hep-ph].

[2] A. de la Cruz Dombriz, F. J. Maldonado Torralba, and D. F. Mota, Dark matter candidate from torsion, Phys. Lett. B **834**, 137488 (2022), arXiv:2112.03957 [gr-qc].

[3] J. Kirsch, D. Vasak, A. van de Venn, and J. Struckmeier, Torsion driving cosmic expansion, Eur. Phys. J. C **83**, 425 (2023), arXiv:2303.01165 [gr-qc].

[4] A. van de Venn, D. Vasak, J. Kirsch, and J. Struckmeier, Torsional dark energy in quadratic gauge gravity, Eur. Phys. J. C **83**, 288 (2023), arXiv:2211.11868 [gr-qc].

[5] J. Beltrán Jiménez, L. Heisenberg, and T. S. Koivisto, The Geometrical Trinity of Gravity, Universe **5**, 173 (2019), arXiv:1903.06830 [hep-th].

[6] R. Percacci, Towards Metric-Affine Quantum Gravity, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **17**, 2040003 (2020), arXiv:2003.09486 [gr-qc].

[7] F. W. Hehl, P. von der Heyde, and G. D. Kerlick, General relativity with spin and torsion and its deviations from einstein's theory, Phys. Rev. D **10**, 1066 (1974).

[8] F. W. Hehl, P. von der Heyde, G. D. Kerlick, and J. M. Nester, General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects, Rev. Mod. Phys. **48**, 393 (1976).

[9] G. Bäuerle and C. Haneveld, Spin and torsion in the very early universe, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications **121**, 541 (1983).

[10] V. de Sabbata and C. Sivaram, *Spin and Torsion in Gravitation* (WORLD SCIENTIFIC, 1994) https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/2358.

[11] I. Shapiro, Physical aspects of the space – time torsion, Physics Reports **357**, 113 (2002).

[12] N. J. Poplawski, Torsion as electromagnetism and spin, Int. J. Theor. Phys. **49**, 1481 (2010), arXiv:0905.4284 [gr-qc].

[13] A. van de Venn, U. Agarwal, and D. Vasak, Toward singularity theorems with torsion, Phys. Rev. D **110**, 064082 (2024), arXiv:2407.21107 [gr-qc].

[14] E. Nelson, Derivation of the schrödinger equation from newtonian mechanics, Phys. Rev. **150**, 1079 (1966).

[15] K. Yasue, Stochastic calculus of variations, Journal of Functional Analysis **41**, 327 (1981).

[16] J. C. Zambrini, Stochastic dynamics: A review of stochastic calculus of variations, International Journal of Theoretical Physics **24**, 277 (1985).

[17] G. Gonçalves de Matos, T. Kodama, and T. Koide, Uncertainty relations in hydrodynamics, Water **12**, 10.3390/w12113263 (2020).

[18] F. Kuipers, *Stochastic Mechanics: The Unification of Quantum Mechanics with Brownian Motion* (Springer, Switzerland, 2023).

[19] T. Koide and T. Kodama, Generalization of uncertainty relation for quantum and stochastic systems, Physics Letters A **382**, 1472 (2018).

[20] J.-P. Gazeau and T. Koide, Uncertainty relation for angle from a quantum-hydrodynamical perspective, Annals of Physics **416**, 168159 (2020).

[21] T. Koide, Viscous control of minimum uncertainty state in hydrodynamics, Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment **2022**, 023210 (2022).

[22] T. Koide and T. Kodama, Novel effect induced by spacetime curvature in quantum hydrodynamics, Physics Letters A **383**, 2713 (2019).

[23] T. Koide and T. Kodama, Variational formulation of compressible hydrodynamics in curved spacetime and symmetry of stress tensor, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **53**, 215701 (2020).

[24] D. Rapoport, Torsion fields, brownian motions, quantum and hadronic mechanics, in *Hadron models and re-*

lated New Energy issues, edited by F. Smarandache and V. Christianto (InfoLearnQuest Publisher, USA, 2007) p. 236.

[25] D. Vasak, J. Struckmeier, and J. Kirsch, *Covariant Canonical Gauge Gravity* (Springer, 2023).

[26] K. Itô, Stochastic parallel displacement, in *Probabilistic Methods in Differential Equations*, edited by M. A. Pinsky (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1975) pp. 1–7.

[27] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods for Physcs, Chemistry and the Natural Science* (Springer-Verlag, Berlin, 2004).

[28] T. Koide and T. Kodama, Navier-Stokes, Gross-Pitaevskii and Generalized Diffusion Equations using Stochastic Variational Method, J. Phys. A **45**, 255204 (2012), arXiv:1108.0124 [cond-mat.stat-mech].

[29] M. Tsamparlis, Cosmological principle and torsion, Physics Letters A **75**, 27 (1979).

[30] L. Fabbri and P. D. Mannheim, Continuity of the torsionless limit as a selection rule for gravity theories with torsion, Phys. Rev. D **90**, 024042 (2014), arXiv:1405.1248 [gr-qc].

[31] M. D. Kostin, On the schrödinger-langevin equation, J. Chem. Phys. **57**, 3589 (1972).

[32] I. Bialynicki-Birula and J. Mycielski, Wave equations with logarithmic nonlinearities, Bull. Acad. Pol. Sci. Cl **23**, 461 (1975).

[33] I. Bialynicki-Birula and J. Mycielski, Nonlinear Wave Mechanics, Annals Phys. **100**, 62 (1976).

[34] T. W. B. Kibble, Geometrization of quantum mechanics, Communications in Mathematical Physics **65**, 189 (1979).

[35] H. Dekker, Classical and quantum mechanics of the damped harmonic oscillator, Physics Reports **80**, 1 (1981).

[36] L. Diósi, A universal master equation for the gravitational violation of quantum mechanics, Physics Letters A **120**, 377 (1987).

[37] L. Diósi, Models for universal reduction of macroscopic quantum fluctuations, Phys. Rev. A **40**, 1165 (1989).

[38] S. Weinberg, Precision tests of quantum mechanics, Phys. Rev. Lett. **62**, 485 (1989).

[39] S. Weinberg, Testing quantum mechanics, Annals of Physics **194**, 336 (1989).

[40] T. Misawa, Stochastic variational approach to quantal-dissipative dynamical systems, Phys. Rev. A **40**, 3387 (1989).

[41] J. Polchinski, Weinberg's nonlinear quantum mechanics and the einstein-podolsky-rosen paradox, Phys. Rev. Lett. **66**, 397 (1991).

[42] R. Penrose, On gravbity's role in quantum state reduction, General Relativity and Graviation **28**, 581 (1996).

[43] M. Czachor, Nambu-type generalization of the dirac equation, Physics Letters A **225**, 1 (1997).

[44] M. Czachor, Nonlocal-looking equations can make nonlinear quantum dynamics local, Phys. Rev. A **57**, 4122 (1998).

[45] A. Bassi, K. Lochan, S. Satin, T. P. Singh, and H. Ulbricht, Models of wave-function collapse, underlying theories, and experimental tests, Rev. Mod. Phys. **85**, 471 (2013).

[46] M. Czachor and H.-D. Doebner, Correlation experiments in nonlinear quantum mechanics, Physics Letters A **301**, 139 (2002).

[47] D. Schuch, *Quantum Theory from a Nonlinear Perspective: Riccati Equations in Fundamental Physics* (Springer, Switzerland, 2018).

[48] D. Al-zaleq and L. Alzaleq, Novel soliton solutions and phase plane analysis in nonlinear schrödinger equations with logarithmic nonlinearities, Scientific Reports **14**, 22485 (2024).

[49] V. A. Kostelecký, N. Russell, and J. D. Tasson, Constraints on torsion from bounds on lorentz violation, Phys. Rev. Lett. **100**, 111102 (2008).

[50] A. Zecca, Dirac equation in space – time with torsion, International Journal of Theoretical Physics **41**, 421 (2002).

[51] N. J. Popławski, Nonsingular dirac particles in spacetime with torsion, Physics Letters B **690**, 73 (2010).

[52] N. J. Popławski, Erratum to "nonsingular dirac particles in spacetime with torsion" [phys. lett. b 690 (1) (2010) 73], Physics Letters B **727**, 575 (2013).

[53] L. Fabbri and V. Stefano, A modified theory of gravity with torsion and its applications to cosmology and particle physics, International Journal of Theoretical Physics **51**, 3186 (2012).

[54] S. Khanapurkar, A. Pradhan, V. Dhruv, and T. P. Singh, Nonrelativistic limit of einstein-cartan-dirac equations, Phys. Rev. D **98**, 104027 (2018).

[55] Y. C. Ong, Gup-corrected black hole thermodynamics and the maximum force conjecture, Physics Letters B **785**, 217 (2018).

[56] T. Koide and T. Kodama, Stochastic variational method as quantization scheme: Field quantization of the

complex Klein–Gordon equation, PTEP **2015**, 093A03 (2015), arXiv:1306.6922 [hep-th].