

ARTICLE INFO

摘要

Keywords:

四阶相场模型

高阶 IP-FEM

脆性断裂

FEALPy

本文提出了一种使用内部惩罚有限元方法 (IP-FEM) 解决脆性断裂力学中四阶相场模型的新方法。与传统的二阶相场模型相比, 四阶模型在模拟复杂裂纹路径时提高了数值稳定性和准确性。IP-FEM 为离散化这些模型提供了一个有效的框架, 能够有效地处理非协调试验函数和复杂的边界条件。

在本研究中, 我们利用 FEALPy 框架实现了一个支持高阶 IP-FEM 离散化的灵活计算工具。我们的结果显示, 随着多项式阶数的增加, 相场模型的网格依赖性降低, 提供了更高的精度和更快的收敛速度。此外, 我们探讨了不同多项式阶数和网格大小下的计算成本与精度之间的权衡。这些发现为优化实际工程应用中的脆性断裂数值模拟提供了宝贵的见解。

1. 介绍

近年来, 相场方法作为一种强大的工具用于模拟断裂过程 [21]。在不同的方法中, 四阶相场模型因其能够提高数值稳定性和准确性而受到关注, 特别是在模拟复杂裂纹路径时。与传统的二阶相场模型 [20, 12, 22] 相比, 四阶相场模型通过引入更高阶的导数项来增强数值稳定性和准确性。这种改进在模拟复杂的裂纹路径时尤为明显, 在此情况下, 该模型可以最小化非物理振荡, 从而提高计算可靠性和效率 [5, 19]。相比之下, 二阶相场模型在模拟复杂裂纹传播时往往面临着数值不稳定、强网格依赖性以及高计算成本的问题 [16]。

为解决这些挑战, 第四阶相场建模取得了显著进展。例如, Amiri 等人。[2] 提出了一种利用局部最大熵 (LME) 近似的四阶相场模型。该方法通过构建高阶连续函数直接求解四阶控制方程, 消除了传统双重二阶分解的需要, 并能够在粗网格上有效解决裂纹路径问题。类似地, Borden 等人。[5] 基于变分原理开发了热力学一致的控制方程。这种方法提高了解决方案的平滑度, 加速了数值收敛, 并展示了四阶模型在三维断裂问题中的潜力。此外, 最近的研究人员采用连续和不连续伽辽金方法结合的混合求解策略, [15] 显著增强了动态断裂问题的数值稳定性。另外, 自适应无网格算法与网格细化技术相结合, 已成为一种有望降低计算成本同时保持高精度的工具 [14]。

高效的四阶相场模型数值解需要适当的计算技术 [10, 4]。在这方面, 内部惩罚有限元法 (IP-FEM) 提供了一个灵活且有效的框架 [13]。该方法最初由 Douglas 和 Dupont [9] 提出, 通过引入惩罚项解决了高阶椭圆方程中非一致试函数的挑战。这种方法已被证明是解决涉及复杂边界和界面问题的稳健解决方案。Wheeler [18] 的后续进展深入分析了惩罚参数对解稳定性和收敛性的影响。Arnold [3] 进一步统一了不连续 Galerkin 框架, 并展示了 IP-FEM 在处理高阶导数问题方面的优越性能。

本工作探讨了通过利用 FEALPy 软件包 [17] 的功能, 将 IP-FEM 应用于求解四阶相场模型的应用。实现了一个通用的编程框架来支持任意高阶 IP-FEM 离散化, 为解决四阶相场断裂模型提供了一种强大且高效的工具。通过严格的数值实验, 我们验证了 IP-FEM 在处理复杂断裂问题中的优越效率和准确性。值得注意的是, 随着有限元次数的增加, 四阶相场模型的网格依赖性进一步减少, 突显了它们的优势。最后, 在不同的多项式阶数和网格分辨率下进行了全面的性能比较与分析。本研究为实现

<Corresponding author

 tiantian@smail.xtu.edu.cn (T. Tian); cbtxs@smail.xtu.edu.cn (C. Chunyu); weihuyai@xtu.edu.cn (H. Wei)

ORCID(s): 0009-0005-3440-9220 (T. Tian)

¹作者受到湘潭大学研究生创新项目的资助 (项目编号: XDCX2023Y135)。

²中国自然科学基金 (国家自然科学基金委员会, NSFC) (资助号: 12371410, 12261131501) 和湖南省创新型省份建设专项 (资助号: 2021GK1010)。

低代价、高精度复杂裂纹扩展路径模拟提供了理论见解和实践指导，为工程应用中复杂裂纹传播的仿真提供了一种强大且高效的方法。

本文的其余部分组织如下：在第 2 节中，我们介绍了四阶相场模型的理论公式和裂纹传播的控制方程。第 3 节专门讨论了使用非线性内罚有限元方法 (IP-FEM) 的数值离散化。第 4 节讨论了数值实验，包括问题设置、边界条件以及来自各种模拟的结果。最后，第 5 节总结了本文并概述了未来研究的潜在方向。

2. 数学模型

2.1. 裂缝扩展的混合模型

相场模型采用连续场变量 $d, x/$ 来表示材料中的裂缝。Borden 等人提出了一个四阶相场模型用于描述裂纹表面密度，表达式为：[6]

$$\gamma, d, (d, d/ = \frac{1}{4l_0}d^2 + \frac{l_0}{2}|(d|^2 + \frac{l_0^3}{32} \cdot ({}^2d : ({}^2d/$$

这里， l_0 是一个控制裂纹宽度的比例因子。我们采用混合模型 [1] 对应变能进行正负分解。在这个模型中，我们定义 [7]：

$$e_s^+, \epsilon/ = e_s, \epsilon/ = \frac{\lambda}{2} \text{tr}, \epsilon//^2 + \mu \epsilon : \epsilon, \quad e_s^*, \epsilon/ = 0.$$

其中， λ 是兰姆第一参数， μ 是兰姆第二参数（剪切模量）。

为了防止可逆开裂，在相场方程中的正应变能项，我们使用了 Miehe 提出的最大历史应变场函数 [11]：

$$H, x, t/ = \max_{s \in [0, t]} e_s^+, \epsilon, x, s//. \quad (1)$$

这里， $e_s^+, \epsilon/$ 表示为： $e_s^+, \epsilon/ = \frac{\lambda}{2} (\text{tr}, \epsilon//)_+^2 + \mu \text{tr}, \epsilon_+^2/$ ，和 $\epsilon, = \sum_{i=0}^{n^*1} \langle \epsilon_i \rangle, \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$ 。其中， ϵ_i 表示特征值， $\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$ 表示特征向量， $\langle \cdot \rangle,$ 表示 Macaulay 括号，定义为： $\langle x \rangle, = \frac{1}{2} (x, |x|/$ 。

所得的控制方程为：

$$\begin{cases} \rho \ddot{\mathbf{u}} * \text{div } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}, \\ 2.1 * d/H * G_c \left[\frac{1}{2l_0} d * l_0 d + \frac{l_0^3}{16} {}^2d \right] = 0. \end{cases} \quad (2)$$

边界条件为：

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g}, & \text{on } \partial_0, \\ d \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{on } \partial. \end{cases}$$

这里， G_c 是临界能量释放率， $\boldsymbol{\sigma}, \epsilon/$ 是应力张量，由以下给出：

$$\boldsymbol{\sigma}, \epsilon/ = g, d/ \frac{\partial e_s, \epsilon/}{\partial \epsilon} = [1 * d/{}^2 + \epsilon] [\lambda \cdot \text{tr}, \epsilon// \mathbf{I} + 2\mu \epsilon],$$

3. 算法设计

在准静态裂纹模型中，忽略加速度项 $\ddot{\mathbf{u}}$ ，得到变分形式：

$$\begin{cases} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, d/, \epsilon, \mathbf{v}// = \cdot \mathbf{f}, \mathbf{v}// + \langle \mathbf{g}, \mathbf{v} \rangle_{\partial_N}, \\ * 2..1 * d/H, \omega/ + \frac{G_c}{2l_0} \cdot d, \omega/ + G_c l_0 \cdot (d, (\omega/ + \frac{G_c l_0^3}{16} \cdot D^2 d, D^2 \omega/ = 0. \end{cases} \quad (3)$$

令 \mathcal{V}_h 表示区域的网格集，网格大小为 h ，并且令 V_h 是在 \mathcal{V}_h 上由次数为 $p \geq 2$ 的多项式组成的拉格朗日有限元空间，即，

$$V_h = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\tau} \in P_p(\tau), \forall \tau \in \mathcal{T}_h\}, \quad V_h^0 = \{v \in H_0^1(\Omega) : v|_{\tau} \in P_p(\tau), \forall \tau \in \mathcal{T}_h\},$$

其中 $P_p(\tau)$ 表示每个单元 τ 上的次数为 p 的多项式空间。如果 $e \subset \partial$ ，单位法向量 \mathbf{n}_e 是两个与 e 正交的单位向量之一，方向从 τ_* 到 τ_+ 。在这样的边 e 上，以下定义成立：

$$\left[\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right] \right] = \frac{\partial \mathbf{u}|_{\tau_+}}{\partial \mathbf{n}} * \frac{\partial \mathbf{u}|_{\tau_*}}{\partial \mathbf{n}}, \quad \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}^2} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}|_{\tau_+}}{\partial \mathbf{n}^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}|_{\tau_*}}{\partial \mathbf{n}^2} \right).$$

如果 $e \subset \partial$ ，则下式成立：

$$\left[\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right] \right] = * \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}_e}, \quad \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}^2} \right\} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}_e^2}.$$

双线性形式 $B(\cdot, \cdot)$ 定义为：

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} \int_{\tau} D^2 \mathbf{u} : D^2 \mathbf{v} \, dx + \sum_{e \in \mathcal{E}} \int_e \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}^2} \right\} \left[\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} \right] \right] + \left[\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right] \right] \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}^2} \right\} + \frac{\gamma}{|e|} \left[\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right] \right] \left[\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} \right] \right] \, dx. \quad (4)$$

这里， \mathbf{n} 是单位法向量， τ 是一个元素， e 是一条边， \mathcal{E} 是边的集合， \mathcal{V}_h 是元素的集合，而 γ 是惩罚参数 [8]。

然后我们可以定义残差为：

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0 &= * \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}_h, \mathbf{d}_h \rangle_{\tau} + \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle_{\tau} + \sum_{e \in \mathcal{E}_0} \langle \mathbf{g}, \mathbf{v}_h \rangle_e, \quad \mathbf{v}_h \in [V_h^0]^{\dim}, \\ \mathbf{R}_1 &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} 2 \cdot 1 * d_h / \mathcal{H}, \omega_h / \tau * \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} \frac{G_c}{2l_0} \cdot d, \omega_h / \tau * G_c l_0 \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} (d_h, (\omega_h / \tau * \frac{G_c l_0^3}{16} B \cdot d_h, \omega_h / \tau), \quad \omega_h \in V_h^0. \end{aligned} \quad (5)$$

令 $\{\phi_m\}_{m=0}^N$ 为空间 V_h 的基函数，其中 N 是自由度的数量。令 $\{\phi_{imj}\}_{m=0}^N$ 为空间 $[V_h]^{\dim}$ 的基函数，其中 $i, j = 1, 2, \dots, \dim$ ，且 $\phi_{imj} = \delta_{ij} \phi_m$ ，其中 δ_{ij} 是克罗内克德塔函数。

令 $\mathbf{v}_h = \omega_h = \phi$ 。残差可以表示为：

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0 &= * \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} \langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}_h, \mathbf{d}_h \rangle_{\tau} + \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} \langle \mathbf{f}, \cdot \rangle_{\tau} + \sum_{e \in \mathcal{E}_0} \langle \mathbf{g}, \cdot \rangle_e, \\ \mathbf{R}_1 &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} 2 \left(1 * d_h / \mathcal{H}, \phi / \tau * \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} \frac{G_c}{2l_0} \cdot d, \phi / \tau * G_c l_0 \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} (d_h, (\phi / \tau * \frac{G_c l_0^3}{16} B \cdot d_h, \phi / \tau) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

迭代使用牛顿-拉夫森方法求解：

$$\begin{bmatrix} * \frac{\partial \mathbf{R}_0}{\partial \mathbf{u}_h} & * \frac{\partial \mathbf{R}_0}{\partial d_h} \\ * \frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \mathbf{u}_h} & * \frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial d_h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{R}_1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_h^k * \mathbf{u}_h^{k*1}$ 和 $d = d_h^k * d_h^{k*1}$ 。刚度矩阵的分量由以下给出：

$$\left\{ \begin{array}{l} * \frac{\partial \mathbf{R}_0}{\partial \mathbf{u}_h} = \sum_{\tau \in \mathbb{E}_h} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot (\mathbf{T}, \phi / , \\ * \frac{\partial \mathbf{R}_0}{\partial d_h} = \sum_{\tau \in \mathbb{E}_h} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial d_h} \cdot (\mathbf{T}, \phi / , \\ * \frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \mathbf{u}_h} = \sum_{\tau \in \mathbb{E}_h} *2.1 * d_h / \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}_h} \cdot \boldsymbol{\phi}^T, (/ , \\ * \frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial d_h} = \sum_{\tau \in \mathbb{E}_h} 2. \boldsymbol{\phi}^T \mathcal{H}, \phi / + \sum_{\tau \in \mathbb{E}_h} G_c l_0 \cdot (\boldsymbol{\phi}^T, (\phi / + \sum_{\tau \in \mathbb{E}_h} \frac{G_c}{l_0} \cdot \boldsymbol{\phi}^T, \phi / + \frac{G_c l_0^3}{16} \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\phi}, \phi / . \end{array} \right. \quad (8)$$

在稳健的交错策略中，可以忽略 $\frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \mathbf{u}_h}$ 和 $\frac{\partial \mathbf{R}_0}{\partial d_h}$ ，允许位移变量 \mathbf{u}_h 和相场变量 d_h 独立更新。这种独立性简化了问题，并允许这些变量分别更新而无需每一步迭代或时间步长的直接耦合。

4. 数值实验与结果

在数值实验中，惩罚参数设置如下：对于阶数 $p = 2$ ， $\gamma = 5$ ；对于 $p = 3$ ， $\gamma = 10$ ；以及对于 $p = 4$ ， $\gamma = 20$ [10, 3, 4]。

此示例考察在方形板内一个刚性圆形包含物，在顶部表面施加垂直向上位移的情况。域 定义为矩形区域 $[0, 1] \times [0, 1]$ ，其中心位于原点，半径为 0.2 的圆孔，如图 1 所示。材料属性规定如下：临界能量释放速率为 $G_c = 1 \text{ kN/mm}$ ，长度比例因子为 $l_0 = 0.02 \text{ mm}$ ，杨氏模量为 $E = 200 \text{ kN/mm}^2$ ，泊松比为 $\nu = 0.2$ 。边界条件包括在上边界处的 Dirichlet 边界条件 ($y = 1$)，其中位移在前 5 步中增加 $u_y = 1.4 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$ ，然后在接下来的 25 步中增加 $u_y = 2.2 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$ 。此外，在圆形缺口中心处设置位移为零。

在这个示例中，我们研究了不同多项式次数 ($p = 2, 3, 4$) 和网格尺寸 (h_{\min}) 的有限元方法在模拟相场断裂模型时的表现和计算效率。图 2 显示了模型的最终断裂形态。

如图 2 所示，不同多项式次数 ($p = 2, 3, 4$) 和网格尺寸 ($h = 0.01$ 到 $h = 0.05$) 的残余力曲线在数值稳定性和收敛性方面显示出显著差异。

对于低阶有限元方法 ($p = 2$)，残余力曲线表现出显著的波动，特别是在更细网格的情况下 ($h = 0.01$ 到 $h = 0.03$)。在断裂后残余力迅速下降的阶段，这些曲线显示出较差的收敛性，表明低阶方法难以在没有明显更细网格尺寸的情况下提供准确的结果。这种行为在裂纹扩展初期尤为显著，在此期间， $p = 2$ 的残余力曲线与其他高阶方法相比更加明显地发散。这表明低阶方法对网格细化更为敏感，并且需要更精细的网格以实现稳定和准确的结果。

相比之下，高阶方法 ($p = 3$ 和 $p = 4$) 表现出优越的数值稳定性和收敛性。这些方法的残余力曲线在不同的网格尺寸下几乎重合，表明高阶方法对网格细化不太敏感。值得注意的是， $p = 4$ 方法在不同网格尺寸下的一致性非常突出，这表明即使较大的网格尺寸，如 $h = 0.05$ ，仍然能够保持较高的准确性和良好的收敛性。这一点在裂纹扩展后的阶段尤为明显，其中 $p = 4$ 的残余力曲线无论网格尺寸如何都紧密聚集在一起。这种行为突显了高阶方法在处理裂纹扩展复杂性方面的鲁棒性，即使使用较粗的网格也是如此。

高阶方法 ($p = 3$ 和 $p = 4$) 显著提高了相场断裂模拟的数值精度和收敛性，特别是在较大网格尺寸下低阶方法 ($p = 2$) 难以保持稳定的情况下。高阶方法的残余力曲线在不同网格尺寸下表现出显著的一致性，展示了它们在处理复杂裂纹传播问题方面的鲁棒性。

5. 总结

在此研究中，我们调查了使用不同阶次惩罚有限元方法的相场断裂模型数值模拟。我们的结果表明，高阶有限元方法 (带有 $p = 3$ 和 $p = 4$) 即使在较粗的网格尺寸下也能达到高精度，使其成为工程

应用中建模断裂行为的高度有效选项。具体而言,分析显示,在给定的网格尺寸下,与需要更细网格才能达到类似精度的低阶方法($p = 2$)相比,高阶方法表现出优越的一致性和收敛性特性。

然而,结果对网格细化很敏感。较粗的网格引入了一些数值误差,尤其是在高阶有限元方法中。虽然这些误差在大多数实际用途中仍处于可接受范围内,但仔细选择网格大小以平衡计算效率和准确性至关重要。通过优化网格大小和单元顺序,工程师可以实现解精度与计算成本之间的最优权衡。

我们的未来工作将集中在扩展该框架以应用于更复杂的几何结构和动态断裂问题,其中时间相关行为起着重要作用。此外,还将探索材料非线性和自适应细化策略的结合,以进一步提高模拟的准确性和效率。这些进展可以显著提升所提出方法的应用灵活性,使其能够应用于工程学和材料科学中更为广泛的现实断裂问题。

参考文献

- [1] Ambati, M., Gerasimov, T., De Lorenzis, L., 2014. A review on phase-field models of brittle fracture and a new fast hybrid formulation. *Computational Mechanics* 55, 383–405. doi:10.1007/s00466-014-1109-y.
- [2] Amiri, F., Millán, D., Arroyo, M., Silani, M., Rabczuk, T., 2016. Fourth order phase-field model for local max-ent approximants applied to crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 312, 254–275. doi:https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.02.011.
- [3] Arnold, D.N., 1982. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 19, 742–760. URL: https://doi.org/10.1137/0719052, doi:10.1137/0719052.
- [4] Babuška, I., Zlámal, M., 1973. Nonconforming elements in the finite element method with penalty. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 10, 863–875. URL: http://www.jstor.org/stable/2156320.
- [5] Borden, M.J., Hughes, T.J.R., Landis, C.M., Verhoosel, C.V., 2014. A higher-order phase-field model for brittle fracture: Formulation and analysis within the isogeometric analysis framework. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 273, 100–118. doi:https://doi.org/10.1016/j.cma.2014.01.016.
- [6] Borden, M.J., Verhoosel, C.V., Scott, M.A., Hughes, T.J., Landis, C.M., 2012. A phase-field description of dynamic brittle fracture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 217–220, 77–95. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782512000199, doi:https://doi.org/10.1016/j.cma.2012.01.008.
- [7] Bourdin, B., Francfort, G., Marigo, J.J., 2000. Numerical experiments in revisited brittle fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48, 797–826. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509699000289, doi:https://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00028-9.
- [8] Brenner, S.C., Sung, L.Y., 2005. c^0 interior penalty methods for fourth order elliptic boundary value problems on polygonal domains. *Journal of Scientific Computing* 22/23, 83–118. doi:10.1007/s10915-004-4783-1.
- [9] Douglas, J., Dupont, T., 1976. Interior penalty procedures for elliptic and parabolic galerkin methods, in: Glowinski, R., Lions, J.L. (Eds.), *Computing Methods in Applied Sciences*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, pp. 207–216.
- [10] Hughes, T.J., 2012. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Civil and Mechanical Engineering, Dover Publications. URL: https://books.google.com/books?id=CHH2n_qBKOIC.
- [11] Miehe, C., Teichtmeister, S., Aldakheel, F., 2016. Phase-field modelling of ductile fracture: A variational gradient-extended plasticity-damage theory and its micromorphic regularization. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 374, 20150170. doi:10.1098/rsta.2015.0170.
- [12] Nguyen, V.P., Anitescu, C., Bordas, S.P., Rabczuk, T., 2015. Isogeometric analysis: An overview and computer implementation aspects. *Mathematics and Computers in Simulation* 117, 89–116. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378475415001214, doi:https://doi.org/10.1016/j.matcom.2015.05.008.
- [13] Scott, L.R., Zhang, L., 1990. Finite element approximation of higher-order differential equations: The interior penalty method. *Mathematics of Computation* 54, 381–405. doi:10.1090/S0025-5718-1990-1022412-1.
- [14] Shao, Y., Duan, Q., Chen, R., 2024. Adaptive meshfree method for fourth-order phase-field model of fracture using consistent integration schemes. *Computational Materials Science* 233, 112743. doi:https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2023.112743.
- [15] Svolos, L., Mourad, H.M., Manzini, G., Garikipati, K., 2022. A fourth-order phase-field fracture model: Formulation and numerical solution using a continuous/discontinuous galerkin method. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 165, 104910. doi:https://doi.org/10.1016/j.jmps.2022.104910.
- [16] Tanné, E., Li, T., Bourdin, B., Marigo, J.J., Maurini, C., 2018. Crack nucleation in variational phase-field models of brittle fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 110, 80–99. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509617306543, doi:https://doi.org/10.1016/j.jmps.2017.09.006.
- [17] Wei, H., Tian, T., Huang, Y., 2017–2025. Fealpy: Finite element analysis library in python. URL: https://github.com/weihuayi/fealpy.
- [18] Wheeler, M.F., 1978. An elliptic collocation-finite element method with interior penalties. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 15, 152–161. URL: https://doi.org/10.1137/0715010, doi:10.1137/0715010, arXiv:https://doi.org/10.1137/0715010.
- [19] Wu, J.Y., Cervera, M., 2017. Strain localization of elastic-damaging frictional-cohesive materials: Analytical results and numerical verification. *Materials* 10. URL: https://www.mdpi.com/1996-1944/10/4/434, doi:10.3390/ma10040434.

- [20] Wu, J.Y., Huang, Y., Nguyen, V.P., 2020a. On the bfgs monolithic algorithm for the unified phase field damage theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 360, 112704. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782519305924>, doi:<https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.112704>.
- [21] Wu, J.Y., Nguyen, V.P., 2018. A length scale insensitive phase-field damage model for brittle fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 119, 20–42. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509618302643>, doi:<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2018.06.006>.
- [22] Wu, J.Y., Nguyen, V.P., Nguyen, C.T., Sutula, D., Sinaie, S., Bordas, S.P., 2020b. Chapter one - phase-field modeling of fracture, Elsevier. volume 53 of *Advances in Applied Mechanics*, pp. 1–183. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0065215619300134>, doi:<https://doi.org/10.1016/bs.aams.2019.08.001>.

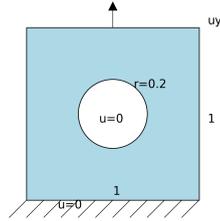


图 1: 带有圆形孔的正方形模型 (单位: 厘米)

