q-变形海森伯图景方程

Julio Cesar Jaramillo Quiceno

Abstract

在这篇论文中，我们介绍了 q-变形的海森堡图像方程。我们考虑了一些示例，如：无自旋粒子、电子与磁场相互作用和 q-变形谐振子。本文末尾给出了任意动力函数的 q-海森堡图像方程。

1 介绍

在量子力学中通常遇到的图像是：薛定谔图像和海森堡图像。让我们考虑依赖于时间的 q-厄米哈密顿算子 $\hat{H}_q$，该算子明确地依赖于时间，但算子本身不依赖。薛定谔图象方程

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi_q(t)\rangle = \hat{H}_q|\psi_q(t)\rangle, \tag{1}$$

其中 $|\psi_q(t)\rangle$ 表示系统在薛定谔图象中的 q 状态，可以通过时间演化算符表示，记为 $\hat{U}(t,t_0)|\psi_q(t_0)\rangle$，即

$$\hat{U}(t,t_0) = \exp\left[-i(t-t_0)\hat{H}_q/\hbar\right], \tag{2}$$

并且满足某些性质（见 [6]）

$$\hat{U}(t,t_0) = I, \tag{3}$$

$$\hat{U}^\dagger(t,t_0) = \hat{U}(t_0,t). \tag{4}$$

对于海森堡图像，通过应用（2）从薛定谔图像获得。$|\psi_q(t)\rangle_H$

$$|\psi_q(t)\rangle_H = \exp\left[it\hat{H}_q/\hbar\right]|\psi_q(t)\rangle, \tag{5}$$

因此，让我们看看算子 $\hat{\mathcal{B}}$ 在状态 $|\psi_q(t)\rangle$ [6] 中的期望值，进而可以引入海森堡图景作为时间依赖物理可观测量的平均值。$\hat{\mathcal{B}}$

$$\langle\psi_q(t)|\hat{\mathcal{B}}|\psi_q(t)\rangle =_H \langle\psi_q(t)|\hat{\mathcal{B}}^H(t)|\psi_q(t)\rangle_H, \tag{6}$$

其中 $\hat{\mathcal{B}}^H(t)$ 由下式给出 [6]

$$\hat{\mathcal{B}}^H(t) = \hat{U}^\dagger\hat{\mathcal{B}}\hat{U}. \tag{7}$$

$\mathcal{B}(t)$ 的时间演化，即海森堡运动方程或海森伯图景方程，因此具有通常的形式

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{B}}^H}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{\mathcal{B}}^H, \hat{H}_q\right]. \tag{8}$$

注意交换子 $\left[\hat{\mathcal{B}}^H, \hat{H}_q\right]$ 不变，这意味着这些关系服从规范的时间依赖海森堡代数，例如坐标和动量 $\hat{x}(t)$ 和 $\hat{p}(t)$ 满足 [5]

$$[\hat{x}(t), \hat{p}(t)] = i\hbar, \tag{9}$$

$$[\hat{x}(t), \hat{x}(t)] = [\hat{p}(t), \hat{p}(t)] = 0. \tag{10}$$

参考文献 [2,3] 的作者描述了由两个生成元 $\tilde{x}$ 构成的 q 变形海森堡代数。$\tilde{p}$

$$[\tilde{x}, \tilde{p}]_q = i\tilde{\Lambda}_q, \tag{11}$$

$$\tilde{\Lambda}_q\tilde{x} = q^{-1}\tilde{x}\tilde{\Lambda}_q, \tag{12}$$

$$\tilde{\Lambda}_q\tilde{p} = q\tilde{p}\tilde{\Lambda}_q, \tag{13}$$

$$[\tilde{x}, \tilde{p}]_q = q^{1/2}\tilde{x}\tilde{p} - q^{-1/2}\tilde{p}\tilde{x}. \tag{14}$$

本工作旨在尝试激发对海森堡图像方程变形的研究，其组织方式如下：在第 2 节中，我们展示了 q-变形的海森堡图像方程及其相关公式。而第 3 节则涉及一些物理应用：无自旋粒子（子节 3.1），电子与磁场相互作用（子节 3.2），以及 q-变形的谐振子（子节 3.3）。最后在第 4 节还提到了任何动力学函数的 q-海森堡图像方程。

2 q-变形海森伯图景方程

基于上述性质，我们现在有了将可观测量的定义一般化并在 q-变形理论框架内引入 q-变形海森堡图像方程的方法。与标准量子力学一致，在量子力学中有许多波函数和算子的表示形式。各种表示之间的联系由幺正变换提供。每一类表示，也称为一个图片，在处理系统 [6] 的时间演化方式上与其他类不同。这种表示在描述具有时间依赖的 q-变形哈密顿量的现象时非常有用。现在我们推导在海森堡图像中调控算符时间演化的 q-形变运动方程。设 $\hat{\mathcal{B}}_q$ 为一个不显式依赖于时间的 q-厄米线性算符，并且由于 $\hat{U}_q(t)$ 是幺正的。因此，q-形变海森堡图像方程由给出

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathcal{B}}^H}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{\mathcal{B}}^H, q\hat{H}_q\right]_q, \tag{15}$$

其中 $\hat{\mathcal{B}^H}_q = \hat{U}_q^\dagger(t)\hat{\mathcal{B}}_q\hat{U}_q(t)$. 该表达式必须与标准量子力学一致。另一方面，我们假设变形相空间中的动力学类似于经典力学，通过以下 q-变形演化方程描述，并根据 (15) 以如下形式书写

$$\frac{\mathrm{d}\hat{x}_H}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{x}(t), q\hat{H}_q\right]_q, \tag{16}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{p}^H}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{p}(t), q\hat{H}_q\right]_q, \tag{17}$$

以及运算符 $\hat{x}, \hat{p}$

$$q\hat{x}\hat{H}_q - q\hat{H}_q\hat{x} = \left[\hat{x}(t), q\hat{H}_q\right]_q, \tag{18}$$

$$q\hat{p}\hat{H}_q - q\hat{H}_q\hat{p} = \left[\hat{p}(t), q\hat{H}_q\right]_q. \tag{19}$$

的 q-海森伯代数在此形式主义中，让我们讨论一些示例。

3 一些示例

3.1 无自旋粒子

作为一个简单的第一个示例，我们考虑一个无自旋质量为 m 的粒子，它在一维无限势阱中运动。对于这种情况，由于粒子的哈密顿量完全是动能，因此这

是 $\hat{H}_q = \frac{\hat{p}^2}{2m}$。我们有 $[\hat{p}(t), q\hat{H}_q]_q = 0$，并通过在 [1,2] 中提出的 q-Heisenberg 代数的关系，得到

$$\left[\hat{x}(t), q\hat{H}_q\right]_q = \frac{q}{2m}\left[\hat{x}, \hat{p}^2\right] = \frac{i\hbar}{2m} q(q+1)\hat{p}\hat{\Lambda}_q,$$

使用 (16) 和 (17) 并进行积分，我们获得

$$\hat{x}_H = \hat{x} + \frac{1}{2m} q(q+1)\hat{p}\hat{\Lambda}_q t, \quad \hat{p} = \hat{p}_H(t). \tag{20}$$

3.2 电子与磁场的相互作用

另一个例子，我们考虑由于质量为 m、电荷为 e 且自旋为 $\hat{\mathbf{S}}$ 的电子与沿 $z-$轴的磁场相互作用而产生的 q-Hamiltonian 是 $\hat{H}_q = -(qeB/m_e c)\hat{S}_z$。$q$-海森伯格群可以从自旋算符的分量立即推断出 $\hat{H}$ 的相关信息。

$$\left[\hat{S}_x, \hat{S}_y\right]_q = -i\hbar\hat{\Lambda}_q\hat{S}_z, \quad \left[\hat{S}_y, \hat{S}_z\right]_q = i\hbar\hat{\Lambda}_q\hat{S}_x, \quad \left[\hat{S}_x, \hat{S}_z\right]_q = -i\hbar\hat{\Lambda}_q\hat{S}_y, \tag{21}$$

$$\left[\hat{S}_z, \hat{H}_q\right]_q = 0, \quad \left[\hat{S}_x, q\hat{H}_q\right] = \frac{i\hbar eB}{m_e c} q^2\hat{\Lambda}_q\hat{S}_y, \quad \left[\hat{S}_y, q\hat{H}_q\right] = -\frac{i\hbar eB}{m_e c} q^2\hat{\Lambda}_q\hat{S}_x, \tag{22}$$

使用 (15)，导致

$$\frac{\mathrm{d}\hat{S}_x}{\mathrm{d}t} = \frac{Bq^2\hat{\Lambda}_q}{m_e c}\hat{S}_y, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{S}_y}{\mathrm{d}t} = -\frac{Bq^2\hat{\Lambda}_q}{m_e c}\hat{S}_x, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{S}_z}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{23}$$

为了解决（23），我们可以将它们组合成两个更有利的方程

$$\frac{\mathrm{d}\hat{S}_\pm(t)}{\mathrm{d}t} = \pm i\frac{Bq^2\hat{\Lambda}_q}{m_e c}\hat{S}_\pm(t), \tag{24}$$

其中 $\hat{S}_\pm(t) = \hat{S}_x(t) \pm i\hat{S}_y(t)$。因此，(24) 的解导致

$$\begin{aligned}
\hat{S}_x(t) &= \hat{S}_x(0)\cos(\omega_q t) - \hat{S}_y(0)\sin(\omega_q t), \\
\hat{S}_y(t) &= \hat{S}_y(0)\cos(\omega_q t) + \hat{S}_0(0)\sin(\omega_q t), \\
\hat{S}_z(t) &= 0,
\end{aligned}$$

是 $\omega_q = \frac{Bq^2\hat{\Lambda}_q}{m_e c}$。

3.3 q-变形谐振子

q-变形谐振子由 q-哈密顿量描述

$$\hat{H}_q = \frac{\hbar\omega_q}{2}(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}), \tag{25}$$

其中 $\omega_q = \omega[2]_q/2q^2$ 是频率为 $q-$ 的谐振子 [3]，而 $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ 是满足 $q-$ 对易关系 $\hat{a}\hat{a}^\dagger - q\hat{a}^\dagger\hat{a} = 1$ 的创造和湮灭算符。使用 (15) 我们有

$$\frac{\mathrm{d}\hat{a}}{\mathrm{d}t} = -iq\omega_q\hat{a}, \qquad \frac{\mathrm{d}\hat{a}^\dagger}{\mathrm{d}t} = iq\omega_q\hat{a}^\dagger, \tag{26}$$

因此，(26) 的解由以下给出

$$\hat{a}_H(t) = \hat{a}(0)\exp[-iq\omega_q t], \quad \hat{a}^\dagger_H(t) = \hat{a}(0)\exp[iq\omega_q t]. \tag{27}$$

此表示满足 q-对易关系 $\hat{a}\hat{a}^\dagger - q\hat{a}^\dagger\hat{a} = 1$，并在极限 $q \longrightarrow 1$ 下给出标准谐振子表达式。另一方面，考虑到 q 形变量子力学中的坐标和动量算符，在海森伯图景中我们有

$$\hat{x}_H(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_q}}(\hat{a}_H(t) + \hat{a}^\dagger_H(t)) = 2\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_q}}\hat{a}(0)\cos(q\omega_q t), \tag{28}$$

$$\hat{p}_H(t) = i\sqrt{\frac{m\omega_q\hbar}{2}}(\hat{a}_H(t) - \hat{a}^\dagger_H(t)) = 2\sqrt{\frac{m\omega_q\hbar}{2}}\hat{a}^\dagger(0)\sin(q\omega_q t). \tag{29}$$

在以下部分中，我们介绍了任意动力学函数的 $q-$ 海森伯图象方程。

4 q-任何动力函数的海森伯图景方程

令 $\hat{x}, \hat{y}, \tilde{x}, \tilde{y}$ 为生成元，u 为 q-海森伯代数的可观测量

$$q^{1/2}\hat{x}\hat{y} - q^{-1/2}\hat{y}\hat{x} = i\Lambda_q, \tag{30}$$

$$q^{1/2}\tilde{x}\tilde{y} - q^{-1/2}\tilde{y}\tilde{x} = i\tilde{\Lambda}_q, \tag{31}$$

$$\hat{x}\tilde{x} = \tilde{x}\hat{x}, \tag{32}$$

$$\hat{y}\tilde{y} = \tilde{y}\hat{y}, \tag{33}$$

对于任何定义为 $\hat{f}(\hat{x}(u),\hat{y}(u),\tilde{x}(u),\tilde{y}(u))$ 的动力函数，可以通过以下演化方程来描述或 q-海森伯图景方程

$$\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}u}=q\hat{f}\hat{H}_q-q\hat{H}_q\hat{f}, \tag{34}$$

如下 [3]，事实上，我们很容易回忆起函数 $\hat{f}\in\mathcal{P}$ 的最一般形式可以写成关于变量 q- 变量 $\hat{x}(u),\hat{y}(u),\tilde{x}(u)$ 的多项式 $\tilde{y}(u)$

$$\hat{f}(\hat{x}(u),\hat{y}(u);u)=\sum_{n,m}\alpha_{mn}(u)\,[\hat{x}(u)]^n\,[\hat{y}(u)]^m\,, \tag{35}$$

$$\hat{f}(\tilde{x}(u),\tilde{y}(u);u)=\sum_{n,m}\beta_{mn}(u)\,[\tilde{x}(u)]^n\,[\tilde{y}(u)]^m\,. \tag{36}$$

其中 $\alpha_{mn}(u)$ 和 $\beta_{mn}(u)$ 是可能 $u-$ 相关的 C-数，并且我们假设了可以通过等式 (30) 实现的 $\hat{x},\hat{y}$ 排序规则。其 u 导数变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\sum_{n,m}\alpha_{mn}(u)\,[\hat{x}(u)]^n\,[\hat{y}(u)]^m\right)=\left[\sum_{n,m}\alpha_{mn}(u)\,[x(u)]^n\,[y(u)]^m\,,q\hat{H}_q\right] \tag{37}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\sum_{n,m}\beta_{mn}(u)\,[\tilde{x}(u)]^n\,[\tilde{y}(u)]^m\right)=\left[\sum_{n,m}\beta_{mn}(u)\,[\tilde{x}(u)]^n\,[\tilde{y}(u)]^m\,,q\hat{H}_q\right]. \tag{38}$$

现在，作为一个应用示例，我们考虑一个由 q-哈密顿量描述的任意系统，形式为 $\hat{H}_q=b\hat{x}+c\hat{y},b,c\in\mathbb{R}$。对于 $n=1,m=0$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(\alpha_{10}(u)\hat{x}(u)) &= [\alpha_{10}(u)\hat{x}(u),q(b\hat{x}(u)+c\hat{y}(u))]_q\,,\\ &= ic\alpha_{10}(u)\Lambda_q q^{1/2},\end{aligned} \tag{39}$$

求解 (39) 得到 $u=0$ 和 $u=t$

$$\alpha_{10}(t)\hat{x}(t)=\alpha_{10}(0)\hat{x}(0)\exp\left[i\Lambda_q q^{1/2}c\int_0^t\alpha_{10}(u)\mathrm{d}u\right]. \tag{40}$$

现在，对于 $n=0,m=1$，微分方程由以下给出

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\alpha_{01}(u)\hat{y}(u)\right) = & \left[\alpha_{01}(u)\hat{y}(u), q(b\hat{x}(u)+c\hat{y}(u))\right]_q , \\
= & -ibq^{3/2}\Lambda_q\alpha_{01}(u)
\end{aligned} \tag{41}
$$

与上述情况相同的方式，它们各自的解可以表示为

$$
\alpha_{01}(t)\hat{y}(t) = \alpha_{01}(0)\hat{y}(0)\exp\left[-i\Lambda_q q^{3/2} b\int_0^t \alpha_{10}(u)\mathrm{d}u\right]. \tag{42}
$$

而对于一般情况我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n,m}\alpha_{nm}(t)x^n(t)y^m(t) = \\
&\sum_{n,m}\alpha_{nm}(0)x^n(0)y^m(0) + i\Lambda_q\int_0^t\sum_{n,m}\alpha_{n,m}(u)\left[q^{3/2}c[n]_q\hat{x}^{n-1}(u) - q^{1/2}[m]_q b\hat{y}^{m-1}(u)\right]\mathrm{d}u.
\end{aligned} \tag{43}
$$

其中已采用公式 (30)，并且我们引入了 q-基本数

$$
[n]_q = \frac{q^{2n}-1}{q^2-1}, \quad [m]_q = \frac{q^{2m}-1}{q^2-1}. \tag{44}
$$

另一方面，(37) 和 (38) 的通解可以用 q-Hamiltonian 表示为

$$
\sum_{n,m}\alpha_{nm}(t)\hat{x}^n(t)\hat{y}^m(t) = \sum_{n,m}\alpha_{n,m}(0)\hat{x}^n(0)\hat{y}^m(0)\exp\left[q\int_0^t\sum_{n,m}\alpha_{nm}(u)\frac{1}{\hat{x}^n\hat{y}^m}\left[\hat{x}^n\hat{y}^m, q\hat{H}_q\right]_q\mathrm{d}u\right], \tag{45}
$$

$$
\sum_{n,m}\beta_{nm}(t)\tilde{x}^n(t)\tilde{y}^m(t) = \sum_{n,m}\beta_{n,m}(0)\tilde{x}^n(0)\tilde{y}^m(0)\exp\left[q\int_0^t\sum_{n,m}\beta_{nm}(u)\frac{1}{\tilde{x}^n\tilde{y}^m}\left[\tilde{x}^n\tilde{y}^m, q\hat{H}_q\right]_q\mathrm{d}u\right]. \tag{46}
$$

由于 $q-$ 海森堡方程是一阶的，其形式解包含两个常数算子，即 $\sum_{n,m}\alpha_{n,m}(0)\hat{x}^n(0)\hat{y}^m(0)$ 和 $\sum_{n,m}\beta_{n,m}(0)\tilde{x}^n(0)$。请注意，$q$-海森堡方程（37）和（38）的结构与动力函数 $\hat{f}$ 的经典运动方程相似，该函数不显式地依赖于 $u-$ 变量 $\mathrm{d}\hat{f}/\mathrm{d}u = \left\{\hat{f}, \hat{H}_q\right\}$，其中 $\left\{\hat{f}, \hat{H}_q\right\}$ 是 $\hat{f}$ 和 $\hat{H}_q$ [3] 之间的 q-泊松括号。另一方面，在海森堡图景中，u-依赖性从波函数转移到了具有常规 u-依赖性的算子上，因此 (34) 可以表示为

$$-i\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}u}=\left[q\hat{H}_q,\hat{f}\right]_q, \tag{47}$$

由于上述 $\hat{H}_q$ 与 $\hat{f}$ 的对易关系是算子动力函数 $\hat{f}$ 的一个线性变换，它可以用超算子 $q-$，即 $\mathcal{L}_q$，来表示，称为 *动力学函数算子的刘维尔量* $\hat{f}$ (参见非变形情况下的 [4])

$$\mathcal{L}_q\hat{f}\equiv\left[q\hat{H}_q,\hat{f}\right]_q, \tag{48}$$

q-李乌维利安是一个超算子，因为它作用于可观测量或算子的空间上，而不是波函数的空间。如果 $q-$ 哈密顿量是 u-不依赖的，则 q-李乌维利安也是 u-不依赖的，并且 q-海森堡图景方程（47）具有形式解

$$\hat{f}(u)=\exp\left[i\mathcal{L}_q u\right]\hat{f}(0). \tag{49}$$

References

[1] V. Bardek and S. Meljanac. Deformed Heisenberg algebras, a Fock space representation and the Calogero model. *European Physical Journal C*, (17):539–547, 2000.

[2] B. Cerchiai, R. Hinterding, J. Madore, and J. Wess. A calculus based on a q-deformed Heisenberg algebra. *European Physical Journal C*, (3):547– 558, 1999.

[3] A. Lavagno, A. Scarfone, and N. Swamy. Classical and quantum q-deformed physical systems. *European Physical Journal C*, (47):253–261, 2006.

[4] P. O. Löwdin. Some Aspects on the Hamiltonian and Liouvillian Formalism, the Special Propagator Methods, and the Equation of Motion Approach. *Advances of Quantum Chemestry*, (17):285–334, 1985.

[5] Y. Miao and Z. Xu. Investigation of non-hermitian Hamiltonians in the Heisenberg picture. *Physics Letters A*, (380):1805–1810., 2016.

[6] Zettili N. *Quantum Mechanics: concepts and applications.* John Wiley and Sons, Ltd, 2009.