

双网格参数选择方法在图像去模糊中的应用

Markus Juvonen^{1*}, Bjørn Jensen¹, Ilmari Pohjola¹,
Yiqiu Dong² and Samuli Siltanen¹

¹ 芬兰赫尔辛基大学

² 丹麦技术大学, 丹麦

2025 年 4 月

摘要

不适定反问题的变分正则化基于最小化数据保真项和正则化项之和。它们之间的平衡通过一个正的正则化参数进行调整，其自动选择通常仍是一个开放性问题。引入了一种新的参数选择方法，基于为同一反问题使用两个略有不同的计算模型。小参数值应给出两种非常不同的重建结果，因为噪声被放大。大参数值会导致两个相同但平凡的重建结果。最优参数在极端之间通过将两种重建图像的相似度与预定义值匹配来选择。新方法的有效性通过使用测量数据和两种不同正则化的图像去模糊得到了证明。

1 介绍

变分正则化是求解不适定反问题的基本解决方案。其基本思想是最小化一个包含两项的惩罚泛函：数据保真项和正则化项，前者确保解保持接近测量数据，后者建模未知 [7] 的先验的信息。这两项之间的平衡通过使用正值正则化参数来调整，其自动选择在一般情况下仍然是一个开放性问题。我们介绍了一种基于使用两种略有不同的计算模型的选择参数的新方法。

考虑一个正问题模型

$$m = \mathcal{A}(f) + \varepsilon, \quad (1)$$

*email: markus.juvonen@helsinki.fi

其中 m 是观测测量数据, f 是底层未知的真实目标, ε 是测量噪声, $\mathcal{A}$ 是测量模型。我们提出的变分正则化公式为

$$\arg \min_f \|m - \mathcal{A}(f)\|_2^2 + \alpha \mathcal{R}(f) \quad (2)$$

其中 $\alpha > 0$ 是正则化参数。数据保真项 $\|m - \mathcal{A}(f)\|_2^2$ 对不匹配测量数据的向量 f 进行惩罚, 而正则化项 $\mathcal{R}$ 应该被选择或设计为使得对于任何不符合任何先验的信息预期的 f , 值 $\mathcal{R}(f) > 0$ 更大。我们专注于以最优方式自动选择 α 。

许多方法已在文献中被提出: 差异原则 [1, 25, 21], 交叉验证 [12, 26], L-曲线法 [9], 稀疏性匹配 [8, 18, 17, 13], 多重网格法 [14], 残差白化原则 [16] 和其他方法 [4, 6, 3, 11, 5]。然而, 尽管上述某些方法可能适用于给定的应用程序, 但对于稍有不同的应用程序可能并不适用。实际上, 自动参数选择仍然是一个挑战。

我们引入了一个新的参数选择原则, 其精神类似于 [14] 中的多分辨率思想, 但更简单、更通用。我们的想法是使用两个正向模型, 这两个模型都是为同一数据 m 编写的, 但是使用不同的计算网格来表示未知数 f 。然后我们针对两个网格求解相同的问题, 并使用多个参数值 α 比较两个解决方案的结构相似性, 采用 SSIM[24] 进行比较。如果参数太小, 我们可以预期解决方案之间的相似度会很低, 因为在不适定重建过程中噪声会被放大。然而, 当问题被稳定化时, 随着 α 的增加, 相似度应该增长。我们可以设置一个合适的 SSIM 值目标阈值, 并在达到该阈值时找到重建的良好参数值。

在本文中, 我们研究了图像去模糊背景下的新方法。我们的方法独立于正则化项, 因此我们使用两种不同的方式进行测试: Tikhonov 正则化 [20, 10] 和总变差 (TV) 正则化 [19, 22, 15, 23]。我们用模拟数据和真实数据测试了该方法, 并将新算法与经典的误差原理进行了比较。

2 材料与方方法

2.1 图像去模糊的双网格模型

让我们通过使用二维卷积

$$m = p * f = \int_{\mathbb{R}^2} f(x - y)p(y)dy \quad (3)$$

作为模型问题来更详细地解释我们的方法。在 (3) 中，测量数据再次用 m 表示，未知数是 f ，而 p 是一个点扩散函数。找到 f 当给定 p 并测量 m 是称为脱卷的逆问题。

令 $s \in \mathbb{R}^2$ 为一个称为移动的位移向量。定义移位图像 f_s 和移位点扩散函数 p_{-s} 如下：

$$f_s(x) = f(x + s), \quad p_{-s}(x) = p(x - s).$$

将 $\lambda = y + s$ 代入 (3) 我们得到移位恒等式

$$(p * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} f_s(x - \lambda) p_{-s}(\lambda) d\lambda = (p_{-s} * f_s)(x). \quad (4)$$

现在考虑另一个使用移位点扩散函数的正向模型：

$$m = p_{-s} * g. \quad (5)$$

假设（不现实地）我们可以完美解决逆问题 (3) 和 (5)，并且两种情况下的测量值相同 m 。然后 (4) 意味着恢复的图像通过一个位移相关： $g = f_s$ 。

让我们转向一个更现实的模型。给定一个模糊的像素图像 $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，我们使用具有周期性边界条件的离散计算模型：

$$\mathbf{m} = \mathbf{p} \star \mathbf{f} + \mathbf{e} = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\mathbf{p}) \cdot \mathcal{F}(\mathbf{f})) + \mathbf{e}, \quad (6)$$

其中 $\mathcal{F}$ 是离散傅立叶变换， $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是在同一像素网格上定义的清晰图像（给定 $\mathbf{m}$ 的位置，即相机传感器像素）， $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是离散点扩散函数， $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 建模随机测量噪声。另外，“ $\cdot$ ”在 (6) 中表示逐像素的 Hadamard 乘积。

用 $h > 0$ 表示我们网格中正方形像素的边长。在本研究的其余部分，我们将移位向量固定为

$$\mathbf{s} = [h/2, h/2]^T \in \mathbb{R}^2.$$

定义与移位向量 $\mathbf{s}$ 相关的“半像素移位核”：

$$\mathbf{d}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & \mathbf{1/4} & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_{-s} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1/4} & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其中需要根据图像大小适当添加零元素。核的中心元素用粗体表示。

考虑两种计算模型：相机网格模型

$$\mathbf{m} = \mathbf{p} \star \mathbf{f} + \mathbf{e}, \quad (7)$$

和移位模型

$$\mathbf{m} = \mathbf{p}_{-s} \star \mathbf{g} + \mathbf{e}, \quad (8)$$

其中 $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是所需的清晰图像 在一个偏移的像素网格上 和 $\mathbf{p}_{-s} = \mathbf{p} \star \mathbf{d}_{-s}$ 是移位的点 Spread 函数。注意数据 $\mathbf{m}$ 在两个模型 (7) 和 (8) 中是相同的。

求解逆问题 (7) 和 (8)，采用正则化参数 $\alpha > 0$ 和正则化器 $\mathcal{R} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ，得到重构

$$\mathbf{f}^{(\alpha)} = \arg \min_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{n \times n}} \|\mathbf{m} - \mathbf{p} \star \mathbf{f}\|_F^2 + \alpha \mathcal{R}(\mathbf{f}), \quad (9)$$

$$\mathbf{g}^{(\alpha)} = \arg \min_{\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{n \times n}} \|\mathbf{m} - \mathbf{p}_{-s} \star \mathbf{g}\|_F^2 + \alpha \mathcal{R}(\mathbf{g}), \quad (10)$$

其中 $\|\cdot\|_F$ 表示 Frobenius 范数。上述关于连续问题的讨论表明，对于任意足够大的 $\alpha > 0$ ，我们应有 $\mathbf{g}^{(\alpha)} \approx \mathbf{f}^{(\alpha)} \star \mathbf{d}_s$ 。因此，这两幅图像的结构相似性应该很高： $\text{SSIM}(\mathbf{g}^{(\alpha)}, \mathbf{f}^{(\alpha)} \star \mathbf{d}_s) \approx 1$ 。

此外，在 SSIM 下，通过对适当正则化的图像 $\mathbf{f}^{(\alpha)}$ 进行 $\mathbf{d}_s$ 卷积不会使图像有太大变化。因此我们得到

$$\text{SSIM}(\mathbf{g}^{(\alpha)}, \mathbf{f}^{(\alpha)}) \approx 1.$$

然而，当参数 $\alpha > 0$ 过小时，在重建过程中测量中的噪声会被无法控制地放大，导致 $\mathbf{g}^{(\alpha)}$ 和 $\mathbf{f}^{(\alpha)}$ 中的像素值变得异常。由于两次重建中的噪声成分预期是不同的，因为 随机性行为。

我们得出研究假设：

- 如果正则化参数 $\alpha > 0$ 过小，则 $\text{SSIM}(\mathbf{g}^{(\alpha)}, \mathbf{f}^{(\alpha)})$ 是远小于 1，这表明由于不稳定反演过程中噪声的放大， $\mathbf{f}^{(\alpha)}$ 和 $\mathbf{g}^{(\alpha)}$ 是两个非常不同的图像。
- 如果 $\alpha > 0$ 足够大，那么 $\text{SSIM}(\mathbf{g}^{(\alpha)}, \mathbf{f}^{(\alpha)})$ 接近 1。然后 $\mathbf{g}^{(\alpha)}$ 和 $\mathbf{f}^{(\alpha)}$ 大约相等，因此正则化不会太弱。

我们的提议策略是选择最小的 α ，使得 $\text{SSIM}(\mathbf{g}^{(\alpha)}, \mathbf{f}^{(\alpha)}) \geq T$ 成立，其中 $T \in (0, 1)$ 并接近于 1 是由用户定义的图像质量下限。

为了支持该假设，我们在第 3.1 节中报告了数值实验。

2.2 梯诃诺夫正则化

9 和 10 的 Tikhonov 正则化解由两个网格定义为：

$$\mathbf{f}^{(\alpha)} = \arg \min_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{n \times n}} \|\mathbf{m} - \mathbf{p} \star \mathbf{f}\|_F^2 + \alpha \|\mathbf{f}\|_F^2, \quad (11)$$

$$\mathbf{g}^{(\alpha)} = \arg \min_{\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{n \times n}} \|\mathbf{m} - \mathbf{p}_{-s} \star \mathbf{g}\|_F^2 + \alpha \|\mathbf{g}\|_F^2 \quad (12)$$

其中 $\alpha > 0$ 是正则化参数。

我们使用基于 FFT 的算法 [10] 进行重建。

2.3 总变差正则化

我们使用各向同性的总变差定义，因此 9 和 10 的 TV 正则化解由两个网格上的

$$\mathbf{f}^{(\alpha)} = \arg \min_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{n \times n}} \|\mathbf{m} - \mathbf{p} \star \mathbf{f}\|_F^2 + \alpha \sum_{i,j=1}^n \sqrt{(D_x \mathbf{f})_{i,j}^2 + (D_y \mathbf{f})_{i,j}^2}, \quad (13)$$

$$\mathbf{g}^{(\alpha)} = \arg \min_{\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{n \times n}} \|\mathbf{m} - \mathbf{p}_{-s} \star \mathbf{g}\|_F^2 + \alpha \sum_{i,j=1}^n \sqrt{(D_x \mathbf{g})_{i,j}^2 + (D_y \mathbf{g})_{i,j}^2} \quad (14)$$

定义：其中 $\alpha > 0$ 是正则化参数，而 D_x ， D_y 分别表示水平和垂直偏导数算子。

我们使用标准的原对偶去卷积求解器 [2] 计算 TV 重建。

2.4 模拟数据（包含各种几何形状的图片）

我们的测试图像是一个由计算机生成的 512x512 大小的图像，包含多种几何形状，这些形状具有多个方向的边缘和不同的灰度值。参见图 1。

模拟图像模糊是使用在一个圆盘域内具有常数值而在外部为零的卷积核创建的。我们添加了相对于图像范数缩放的高斯噪声。选择了两个不同的噪声水平，一个为 4%，另一个为 8% 的噪声相对比例。

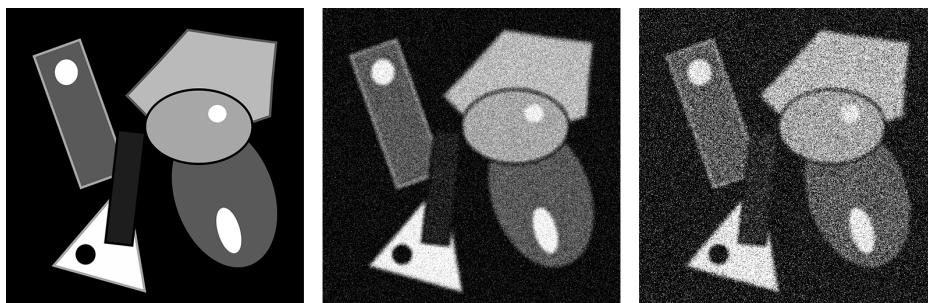


图 1: 左: 无噪声或模糊的模拟真实值。中: 使用半径为 4 的核进行模糊, 并添加了 4% 的噪声。右: 使用半径为 4 的核进行模糊, 并添加了 8% 的噪声。

2.5 真实摄影数据

为了在真实数据上测试我们的方法, 我们使用佳能 EOS 5D Mark IV 相机捕获了两个小型数据集。对于扑克牌数据集, 在相机上安装了一枚佳能 EF 100mm f/2.8 USM 微距镜头; 而对于书籍数据集, 则使用了较新的佳能 EF 100mm f/2.8 USM IS 微距镜头。在这两个数据集中, 我们分别捕获了多个模糊 (镜头对焦不准确) 程度和噪声 (ISO) 级别。每次拍摄场景都正确曝光。为了补偿在增加 ISO 设置时信号强度/曝光的变化, 快门速度相应进行了调整。相机固定在三脚架上且被摄体静止, 因此快门速度的变化没有引入任何额外的运动模糊。对于扑克牌图像, ISO 水平为 ISO100 作为“真实值”, ISO1600 用于较不噪点的图像, 而 ISO6400 用于更噪点的图像。对于书籍图像, ISO 水平分别为 ISO100、ISO6400 和 ISO25600。在这两组数据中, 均使用了模糊无噪声 (ISO100) 的图像来估计模糊量即模糊内核半径的大小。在 3.2 节中, 我们将展示我们的方法在以下真实数据示例上的测试结果。

2.6 真实数据集 1: 纸牌游戏

来自一张普通扑克牌图像的 1024x1024 像素大小的裁剪。我们在图 2 的左侧有一个真实值估计。这是一张对焦准确且使用最低可能 ISO 设置拍摄的真实照片。中间我们有一个稍微模糊并且噪点更多 (ISO1600) 的同一场景版本, 而在右侧则是相同程度的模糊但噪声水平更高 (ISO6400)。



图 2: 左: “真实值”, 几乎无噪点 (ISO100)。中: 略显模糊, 有些许噪声 (ISO1600)。右: 略显模糊, 噪声更多 (ISO6400)。

2.7 真实数据集 2: 书籍

一张由书籍堆叠图像中裁剪出的 1024×1024 像素大小的画面。我们在图 3 的左侧有一个真实值估计。这是一张正确聚焦且使用最低可能 ISO 设置拍摄的真实照片。中间我们有一个稍微模糊且噪声较大的同一场景版本 (ISO6400), 而在右侧则有相同程度的模糊但更高的噪声水平 (ISO25600)。

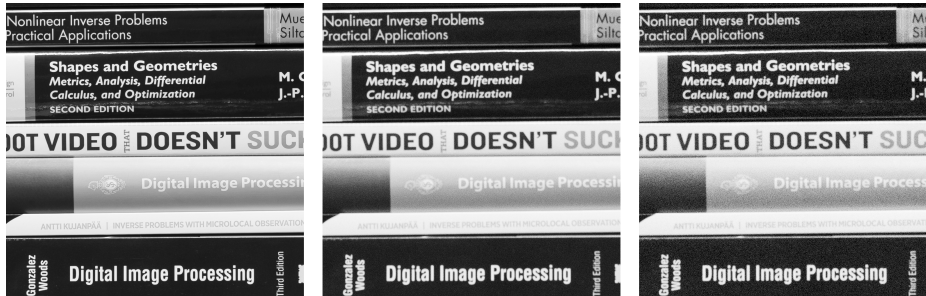


图 3: 左侧为 “真实值” (ISO100)。中间略微模糊且有少量噪声 (ISO6400)。右侧略微模糊且噪声更多 (ISO25600)。

3 结果

3.1 相似假设的数值测试

我们首先计算了一组 230 幅自然图像 f 及其平移版本 $f \star d_s$ 之间的 SSIM。图 4 中的蓝色曲线显示, 根据 SSIM 度量, f 与 $f \star d_s$ 有很大差异。

然后我们对这些 230 幅图像的去噪版本重复了计算。（请注意，在进行去噪之前，我们没有向原始图像添加任何噪声。）图 4 中的红色和橙色曲线显示，通过 Tikhonov 或 TV 正则化平滑后的图像在 SSIM 方面不会因平移而有太大变化。

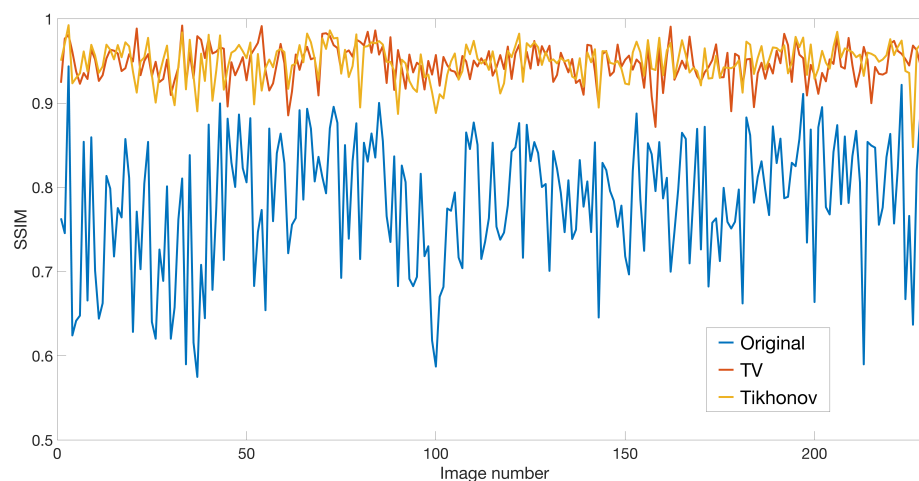


图 4: 两网格图像之间的 SSIM。蓝色曲线表明，对于一张普通的照片，亚像素平移会导致图像在 SSIM 测量下产生显著变化。然而，对于通过 Tikhonov 或总变差去噪处理的图像而言，平移引起的改变要弱得多：它们的 SSIM 值更接近 1。

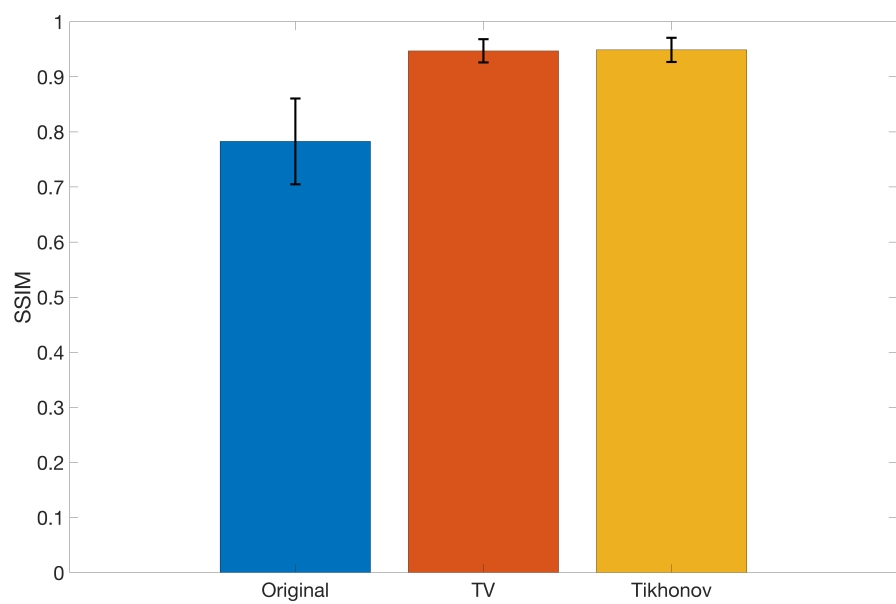


图 5: 两张网格图像之间的平均 SSIM 值和标准差计算结果如图 4 所示的 230 张图像。

3.2 双网格参数选择测试

在本节中，我们展示了双网格参数选择方法对一个模拟和两个实际摄影数据集的一些结果。用于此测试的模拟图像数据在第 2.4 节中给出。实际数据集分别在第 2.6 节和 2.7 节中给出。

3.2.1 模拟图像示例

首先我们在图 1 所示的模拟图像示例上测试双网格方法。对于这些模拟图像，我们知道模糊核半径为 4，但添加的噪声使解决该问题变得不适定。如图 6 所示，两种正则化器都得到了 SSIM 函数的预期行为。我们还观察到，在噪声较低的情况下，所选参数在两种情况下的值均小于噪声较高时的情况。

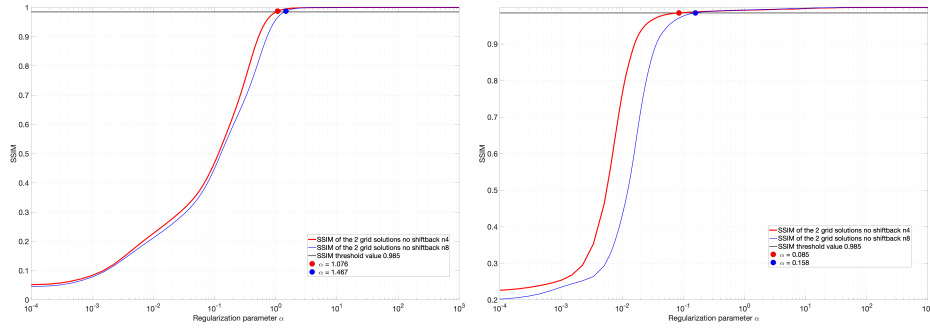


图 6: 双网格方法用于选择模拟图像中参数的情况，如 1 所示。绘制的是两个解之间的 SSIM 函数 $\text{SSIM}(\mathbf{g}^{(\alpha)}, \mathbf{f}^{(\alpha)})$ ，针对两种正则化器和两种噪声振幅。左图：Tikhonov 正则化。所选阈值之后的第一个正则化参数为噪声较少情况下的 $\alpha = 1.076$ （红色曲线）和噪声较高情况下的 $\alpha = 1.467$ （蓝色曲线）。右图：总变差正则化。所选阈值之后的第一个正则化参数为噪声较少情况下的 $\alpha = 0.085$ （红色曲线）和噪声较高情况下的 $\alpha = 0.158$ （蓝色曲线）。

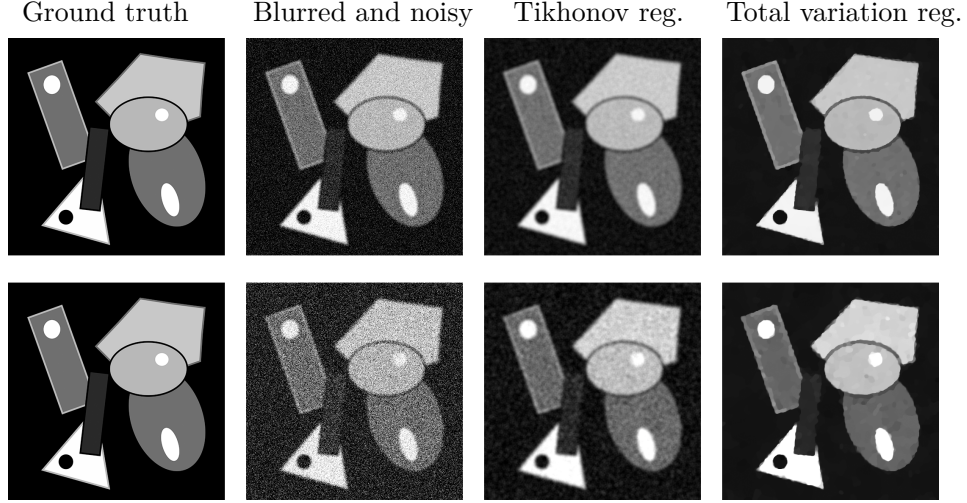


图 7: 几何形状图像及其使用双网格方法选择正则化参数值的重建, 如图 6 所示。第一行: 真实图像, 模糊半径 4 + 噪声 4%, Tikhonov 正则化, TV 正则化。第二行: 真实图像, 模糊半径 4 + 噪声 8%, Tikhonov 正则化, TV 正则化 (Tikh 阈值 0.985, TV 阈值 0.985)。

3.2.2 示例: 玩牌示例

对于第一次真实数据测试, 我们采用了图 2 中所示的扑克牌图像。对于实际数据情况, 我们不知道确切导致模糊的卷积核, 所以我们需要对其进行估计。在这种情况下, 我们通过测量失焦后与清晰无噪声的“地面实况”图像相比明显点扩散的程度得到了一个估算的卷积核半径为 6。对于 Tikhonov 正则化器, 我们在图 8 中看到了相当良好的 SSIM 函数表现。对于 TV 正则化的那些情况, 我们看到 SSIM 函数开始变平的确切点不是很明确。对于这两种正则化器, 我们注意到在噪声较高的情况下实际上得到了一个较小的参数值选择。

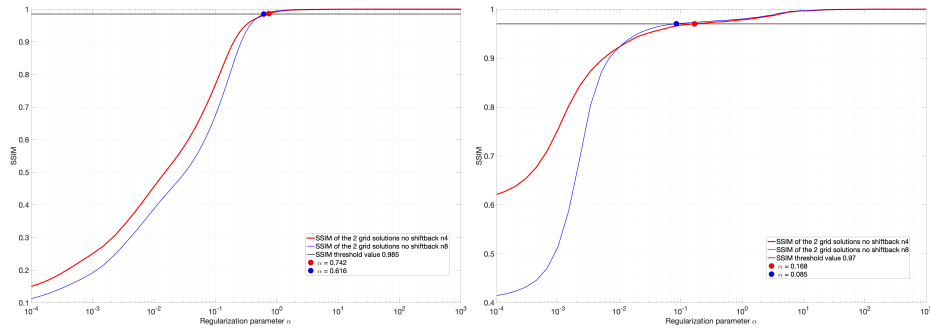


图 8: 双网格方法用于选择如图 2 所示的纸牌图像参数。绘制的是两个正则化器和两种噪声幅度之间的两个解的 SSIM 函数, 即 $\text{SSIM}(\mathbf{g}^{(\alpha)}, \mathbf{f}^{(\alpha)})$ 。左: Tikhonov 正则化。在选定阈值后的第一个正则化参数是对于噪声较少的情况 (红色曲线) 为 $\alpha = 0.742$, 对于噪声较大的情况 (蓝色曲线) 为 $\alpha = 0.616$ 。右: 总变化正则化。在选定阈值后的第一个正则化参数是对于噪声较少的情况 (红色曲线) 为 $\alpha = 0.168$, 对于噪声较大的情况 (蓝色曲线) 为 $\alpha = 0.085$ 。

3.2.3 示例重建

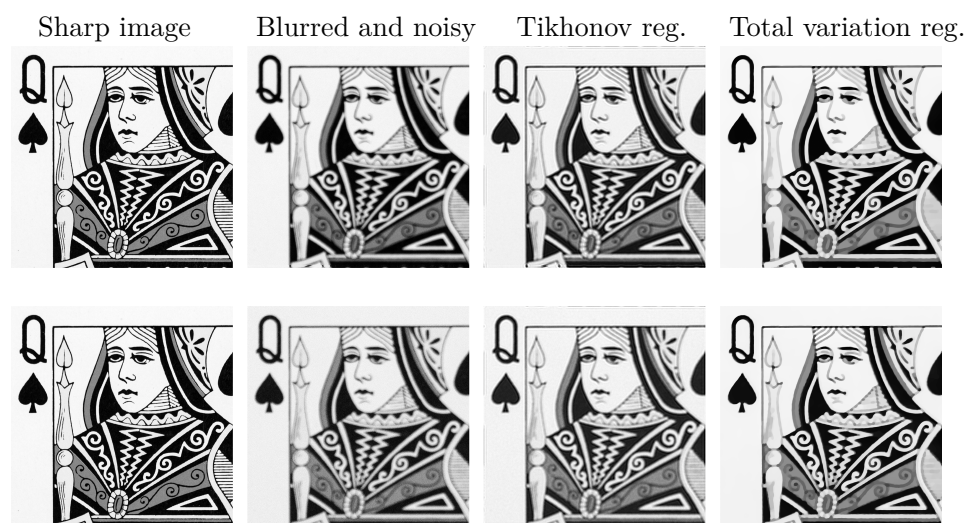


图 9: 皇后纸牌和使用双网格方法选择正则化参数值的重建结果, 如图 8 所示。第一行: “真实图像” 清晰图像 (ISO100), 模糊+少量噪声 (ISO1600), Tikhonov, TV。第二行: “真实图像” 清晰图像 (ISO100), 模糊+更多噪声 (ISO6400), Tikhonov, TV。(Tikh 阈值 .985, TV 阈值 .97)

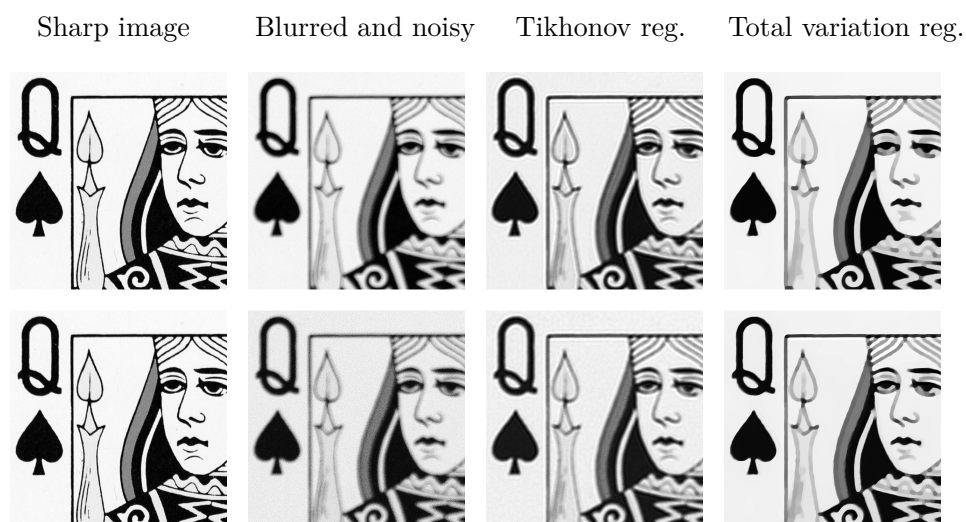


图 10: 来自图 9 的皇后纸牌图像裁剪以获得更详细视图。第一行: “真实值”锐化图像 (ISO100), 模糊+少量噪声 (ISO1600), Tikhonov, TV。第二行: “真实值”锐化图像 (ISO100), 模糊+更多噪声 (ISO6400), Tikhonov, TV。(Tikh 阈值 .985, TV 阈值 .97)

3.2.4 书籍图像示例

作为第二个真实数据案例，我们有书籍图像 3。在这种情况下，模糊核半径估计值为 5。我们观察到 SSIM 函数的行为与玩牌图像案例类似。

在电视案例中，我们清楚地注意到图 11 中的 SSIM 对数图没有相同的 S 形，而是从 0.9 到 1 的值增长得更平缓。这使得选择阈值更具挑战性。

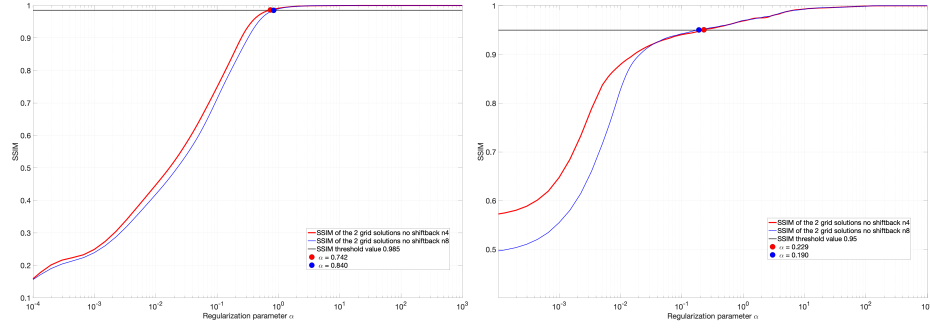


图 11: 双网格方法用于选择书籍图像参数，如 3 所示。绘制的是两个解之间的 SSIM 函数 $\text{SSIM}(g^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})$ ，对应两种正则化器和两种噪声振幅。左图：Tikhonov 正则化。在选定阈值之后的第一个正则化参数是少噪声情况下的 $\alpha = 0.742$ （红色曲线）和高噪声情况下的 $\alpha = 0.84$ （蓝色曲线）。右图：总变化正则化。在选定阈值之后的第一个正则化参数是少噪声情况下的 $\alpha = 0.229$ （红色曲线）和高噪声情况下的 $\alpha = 0.19$ （蓝色曲线）。

3.2.5 示例重建



图 12: 图书图像及使用双网格方法选择正则化参数值的重建结果如图 11 所示。第一行: “真实参考” 清晰图像 (ISO100), 模糊+少量噪声, Tikhonov, TV。第二行: “真实参考” 清晰图像 (ISO100), 模糊+较多噪声, Tikhonov, TV (Tikh 阈值.985, TV 阈值.95)



图 13: 书籍图像来自图 12, 裁剪以进行更详细的查看。第一行: ”真实值”清晰图像 (ISO100), 模糊+少量噪声, Tikhonov, TV。第二行: ”真实值”清晰图像 (ISO100), 模糊+更多噪声, Tikhonov, TV (Tikh 阈值.985, TV 阈值.95)

3.3 与偏差原理参数选择的比较

为了与另一种参数选择方法进行比较, 我们使用了误差原则。目标是找到参数值 α , 使得正则化解 $f^{(\alpha)}$ 的残差范数与数据 m 中的噪声水平 δ 相当。为此, 我们定义

$$\Psi(\alpha) := \|p \star f^{(\alpha)} - m\|_F \quad (15)$$

并取基于误差的参数为 α , 使得 $\Psi(\alpha) \approx \delta$ 。

对于噪声估计, 我们首先对每个测试图像采样了 4 个常数值区域, 并计算这些区域内像素值的标准差 σ 。然后我们计算这些值的平均数。为了得到最终的噪声估计 δ , 我们将平均标准差值乘以该图像中像素数量的平方根 $\delta = \sigma_{mean} \sqrt{n \times n}$ 。然后我们可以绘制每个 α 的残差范数, 并查看其何时与噪声估计相匹配。

模拟图像示例在图 14 中的差异曲线显示了与两种噪声水平下的估计噪声有明显的交点, 无论是 Tikhonov 正则化情况还是总变差正则化情况。相应的重建结果与双网格方法的比较可以在较低噪声情况下查看图 15, 在较高噪声情况下查看图 16。在两种 Tikhonov 正则化情况下, 差异原则给出的

参数值低于提出的双网格方法，并且对于总变差正则化，差异原则给出的参数值高于双网格方法。所有参数值也可以在表 1 中看到。

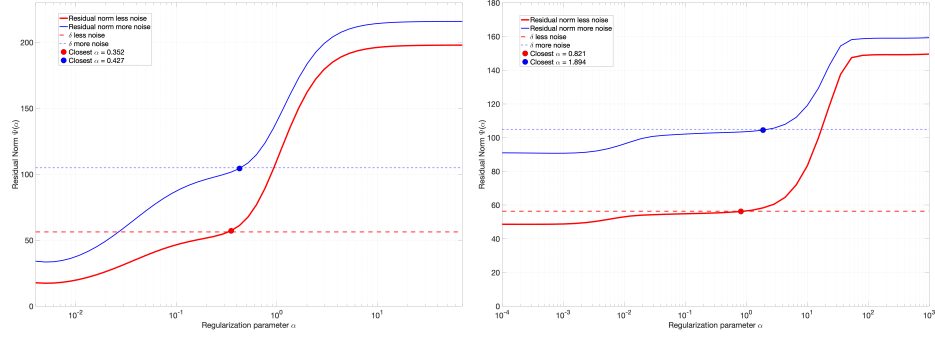


图 14: 偏差原则用于选择参数的情况如图 1 所示的模拟图像。绘制的是在 (15) 中定义的函数 $\Psi(\alpha)$ ，适用于两个正则化器和两种噪声幅度。左：Tikhonov 正则化。对于噪声较小的情况（红色曲线），最接近估计噪声水平 δ 的正则化参数是 $\alpha = 0.352$ ；而对于更高噪声情况（蓝色曲线）则是 $\alpha = 0.427$ 。右：总变差正则化。最接近估计噪声水平 δ 的正则化参数是对于噪声较小的情况（红色曲线）为 $\alpha = 0.821$ ，而对于噪声较高的情况（蓝色曲线）为 $\alpha = 1.894$ 。

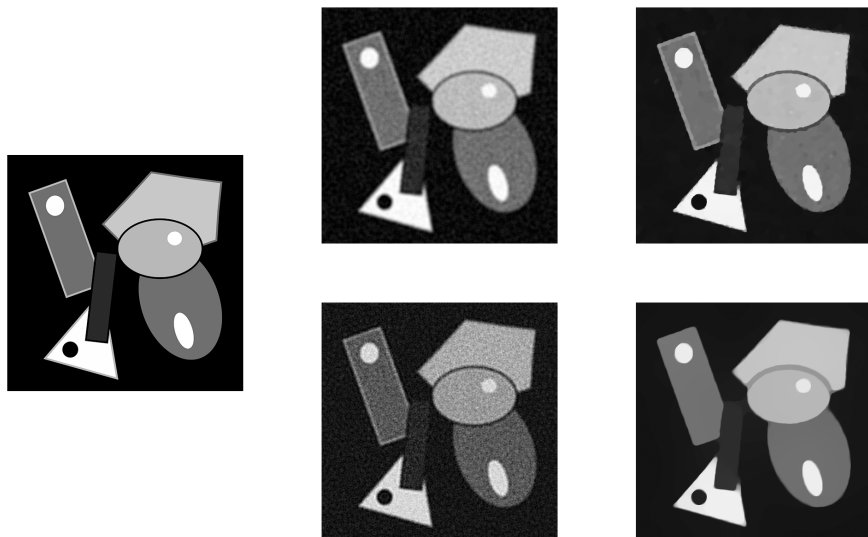


图 15: 根据双网格方法和差异原理对噪声水平为 4% 的模拟图像进行最优重建的比较。左: 真实值。上行为双网格。下行为差异原理。

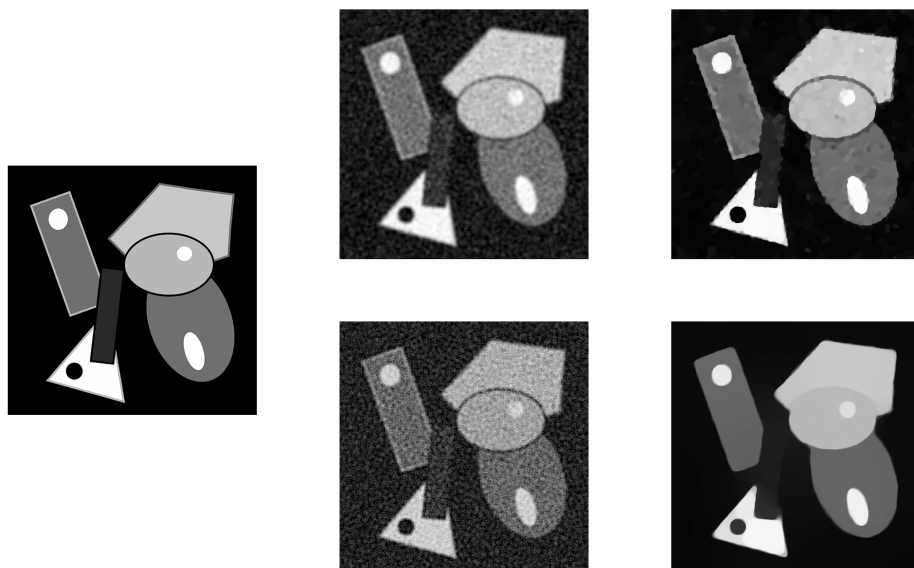


图 16: 根据双网格方法和差异原理对噪声水平为 8% 的模拟图像进行最优重建的比较。左: 真实值。上行为双网格。下行为差异原理。

扑克牌图像示例的差异图仅在高噪声水平下的 Tikhonov 正则化情况下与估计的噪声水平相交，见图 17。低噪声 Tikhonov 曲线和图中两种总变差正则化情况均未能给出参数选择。该参数值显著小于我们通过双网格方法得到的值。所有参数值均可在表 1 中进行比较。

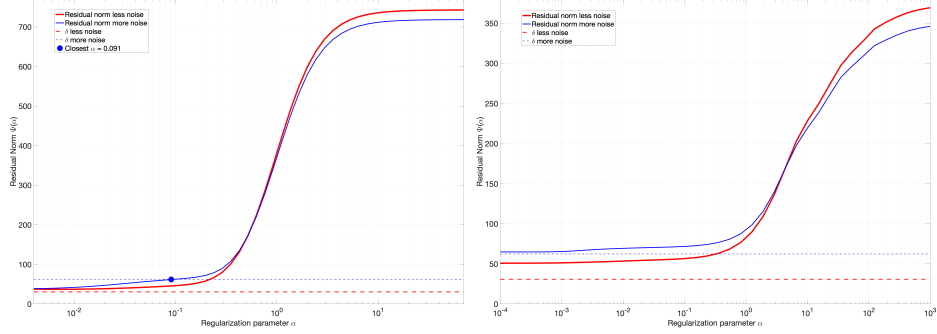


图 17: 不一致原理在选择图 2 所示的扑克牌图像参数时的应用。绘制的是在 (15) 中定义的函数 $\Psi(\alpha)$ ，针对两种正则化方法和两种噪声幅度。左：Tikhonov 正则化。我们只为高噪声情况得到了一个参数值。与估计噪声水平交点最接近的值是 $\alpha = 0.091$ ，对于高噪声情况（蓝色曲线）而言。右：总变差正则化。不一致原理未能为我们提供估计噪声水平下的参数值。

书籍图像示例的差异图在图 18 中显示了与 Tikhonov 正则化情况下两种噪声水平下的估计噪声的交点。在总变差正则化情况下，我们只在一个较大的噪声情况中得到了一个 α 值。所有参数值均可在表 1 中看到。

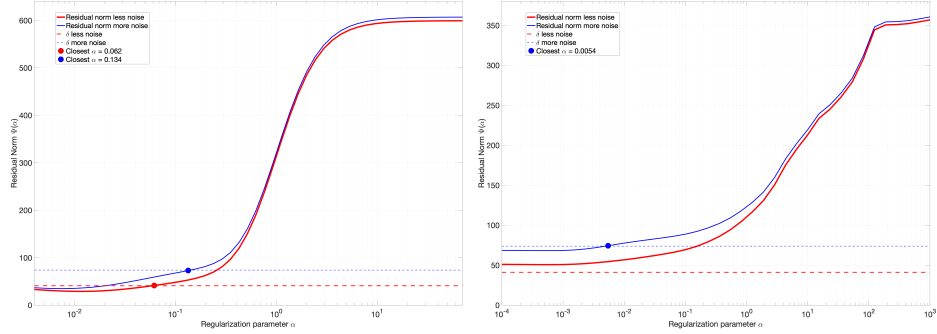


图 18: 不一致原则用于选择参数的情况, 如图 3 所示的书籍图像。绘制的是在 (15) 中定义的功能 $\Psi(\alpha)$, 针对两种正则化器和两种噪声振幅。左: Tikhonov 正则化。对于噪声较小的情况 (红线), 最接近估计噪声水平 δ 的正则化参数是 $\alpha = 0.062$; 而对于噪声较大的情况 (蓝线), 该参数则是 $\alpha = 0.134$ 。右: 总变化正则化。我们未能找到对于噪声较少的情况 (红线) 的参数值。最接近估计噪声水平 δ 的正则化参数在高噪声情况下 (蓝色曲线) 是 $\alpha = 0.0054$ 。

Image test	Tikh. discrep. α	Tikh. Dual α	TV discrep. α	TV Dual α
Simulated 4%	0.352	1.076	0.821	0.085
Simulated 8%	0.427	1.467	1.894	0.158
Queen low	-	0.742	-	0.168
Queen high	0.091	0.616	-	0.085
Books low	0.062	0.742	-	0.229
Books high	0.134	0.840	0.005	0.190

表 1: 最优参数值 α 对于所有图像示例的误差原则和提出的双网格方法。

4 讨论

我们提出的参数选择方法在原则上非常灵活。移位网格的想法可以与任何前向模型一起使用, 而不仅仅是卷积。正则化项也可以采取多种形式, 包括此处考虑的 Tikhonov 和 TV 类型以外的形式。数据保真度范数和图像相似性度量在同一参数选择框架内也可以改变。对所有这些选择的具体假

设以及保证唯一且有用的参数选择的内容超出了本文的范围。

我们方法的一个特别优势在于不需要噪声振幅。这在实际数据情况下是一个很大的优点。正如我们在比较部分 3.3 中看到的，估计噪声振幅可能导致传统参数选择方法如误差原则遇到困难。

我们的实验结果表明，双网格方法对于图像去模糊问题在模拟数据和真实数据中均有效。我们确实需要选择阈值参数。这种选择至少受到正则化项和图像中小细节数量的影响。在一个固定的应用场景和特定最终用户需求的情况下，可以通过实验找到一个合适的阈值，并在后续工作中保持不变。

移位算子的轻微模糊效果不会引起问题，因为它仅用于确定最优参数。换句话说，人们不会将移位后的重建用作最终解，因为其具有额外的模糊。

我们在计算实验中注意到一个奇怪的效果。对于真实图像数据，双网格方法可能会在噪声较低时给出比噪声较高时更大的正则化参数。这种情况发生在总变差正则化实验以及带有 Tikhonov 正则化的玩牌图像中。这似乎违反直觉，因为我们预期较大的噪声水平会需要更多的正则化。然而，所有得到的重建结果看起来都非常不错。

在详细图书图像 13 中，我们可以看到电视参数过大：我们丢失了一些小细节。这表明，如果形状不是一个很好的 sigmoid 曲线，那么根据双网格 SSIM 曲线来选择阈值可能会很棘手。

参考文献

- [1] Stephan W Anzengruber and Ronny Ramlau. Morozov’s discrepancy principle for tikhonov-type functionals with nonlinear operators. *Inverse Problems*, 26(2):025001, 2009.
- [2] Antonin Chambolle and Thomas Pock. A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging. *Journal of mathematical imaging and vision*, 40:120–145, 2011.
- [3] Ke Chen, E Loli Piccolomini, and Fabiana Zama. An automatic regularization parameter selection algorithm in the total variation model for image deblurring. *Numerical Algorithms*, 67:73–92, 2014.
- [4] Christian Clason, Bangti Jin, and Karl Kunisch. A duality-based splitting method for ℓ^1 -tv image restoration with automatic regu-

- larization parameter choice. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(3):1484–1505, 2010.
- [5] Elisa Davoli, Rita Ferreira, Irene Fonseca, and José A Iglesias. Dyadic partition-based training schemes for tv/tgv denoising. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, pages 1–39, 2024.
 - [6] Yiqiu Dong, Michael Hintermüller, and M Monserrat Rincon-Camacho. Automated regularization parameter selection in multi-scale total variation models for image restoration. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 40:82–104, 2011.
 - [7] Heinz Werner Engl, Martin Hanke, and Andreas Neubauer. *Regularization of inverse problems*, volume 375. Springer Science & Business Media, 1996.
 - [8] Keijo Hamalainen, Aki Kallonen, Ville Kolehmainen, Matti Lassas, Kati Niinimäki, and Samuli Siltanen. Sparse tomography. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35(3):B644–B665, 2013.
 - [9] Per Christian Hansen. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the l-curve. *SIAM review*, 34(4):561–580, 1992.
 - [10] Per Christian Hansen, James G Nagy, and Dianne P O’leary. *Deblurring images: matrices, spectra, and filtering*. SIAM, 2006.
 - [11] Stefan Kindermann, Lawrence D Mutimbu, and Elena Resmerita. A numerical study of heuristic parameter choice rules for total variation regularization. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 22(1):63–94, 2014.
 - [12] Mark A Lukas. Strong robust generalized cross-validation for choosing the regularization parameter. *Inverse Problems*, 24(3):034006, 2008.
 - [13] Alexander Meaney, Mikael AK Brix, Miika T Nieminen, and Samuli Siltanen. Image reconstruction in cone beam computed tomography using controlled gradient sparsity. *arXiv preprint arXiv:2412.07465*, 2024.

- [14] Kati Niinimäki, Matti Lassas, Keijo Hamalainen, Aki Kallonen, Ville Kolehmainen, Esa Niemi, and Samuli Siltanen. Multiresolution parameter choice method for total variation regularized tomography. *SIAM journal on imaging sciences*, 9(3):938–974, 2016.
- [15] Stanley Osher, Martin Burger, Donald Goldfarb, Jinjun Xu, and Wotao Yin. An iterative regularization method for total variation-based image restoration. *Multiscale Modeling & Simulation*, 4(2):460–489, 2005.
- [16] Monica Pragliola, Luca Calatroni, Alessandro Lanza, and Fiorella Sgallari. Admm-based residual whiteness principle for automatic parameter selection in single image super-resolution problems. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 65(1):99–123, 2023.
- [17] Zenith Purisha, Sakari S Karhula, Juuso H Ketola, Juho Rimpeläinen, Miika T Nieminen, Simo Saarakkala, Heikki Kröger, and Samuli Siltanen. An automatic regularization method: An application for 3-d x-ray micro-ct reconstruction using sparse data. *IEEE transactions on medical imaging*, 38(2):417–425, 2018.
- [18] Zenith Purisha, Juho Rimpeläinen, Tatiana Bubba, and Samuli Siltanen. Controlled wavelet domain sparsity for x-ray tomography. *Measurement Science and Technology*, 29(1):014002, 2017.
- [19] L.I. Rudin and S. Osher. Total variation based image restoration with free local constraints. In *Proceedings of 1st International Conference on Image Processing*, volume 1, pages 31–35 vol.1, 1994.
- [20] A.N. Tikhonov. On the solution of ill-posed problems and the method of regularization. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1963.
- [21] Alina Toma, Bruno Sixou, and Françoise Peyrin. Iterative choice of the optimal regularization parameter in tv image restoration. *Inverse Probl. Imaging*, 9(4):1171–1191, 2015.
- [22] C.R. Vogel and M.E. Oman. Fast, robust total variation-based reconstruction of noisy, blurred images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(6):813–824, 1998.

- [23] Yilun Wang, Junfeng Yang, Wotao Yin, and Yin Zhang. A new alternating minimization algorithm for total variation image reconstruction. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 1(3):248–272, 2008.
- [24] Zhou Wang, A.C. Bovik, H.R. Sheikh, and E.P. Simoncelli. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity. *IEEE Transactions on Image Processing*, 13(4):600–612, 2004.
- [25] You-Wei Wen and Raymond H Chan. Parameter selection for total-variation-based image restoration using discrepancy principle. *IEEE Transactions on Image Processing*, 21(4):1770–1781, 2011.
- [26] You-Wei Wen and Raymond Honfu Chan. Using generalized cross validation to select regularization parameter for total variation regularization problems. *Inverse Problems and Imaging*, 12(5):1103–1120, 2018.