q-海森伯代数在 $\otimes^2$– 张量空间中

Julio Cesar Jaramillo Quiceno*

[1]Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Edificio Yu Takeuchi, Bogotá

Abstract

在本文中，我们在张量积空间 $\otimes^2$ 中引入了 q-Heisenberg 代数。我们建立了其代数性质，并提供了非单演函数理论的应用。我们的结果扩展了已知的 q-变形代数构造，并为非交换设置中的泛函分析提供了新的见解。

1 介绍

1.1 预备知识

1.1.1 $\otimes^2$-张量空间

基于 Vakarchuk 的基础工作 [11]，我们在 $\otimes^2$ 张量空间的框架内引入并研究了 q-Heisenberg 代数。此构造推广了传统的海森堡代数，这一数学结构在量子力学中占据中心地位，并引入了一个变形参数 q。该参数引入了一个更为丰富的代数框架，允许描述更一般的量子系统，并提供了一条探索非交换现象的路径，这些现象在现代理论物理和数学中至关重要。$\otimes^2$-张量空间为此类研究提供了自然且强大的环境。它允许清晰而系统的表示 q 变形海森堡代数固有的代数关系和对称性。

*jcjaramilloq@unal.edu.co

定义 1.1. [8] 在一个正式的设定中，给定一个表示量子系统状态空间的希尔伯特空间 $\mathcal{H}$，记为 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ 的**量子** $\otimes^2$**-张量空间**是所有来自 $\mathcal{H}$ 元素与其自身的张量积的空间。这个空间可以这样理解：

(i) 张量积运算 $\otimes$ 将来自 $\mathcal{H}$ 的两个向量结合成一个新的在 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ 中的向量。如果 $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}$，则张量积 $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$ 表示一个包含 $|\psi\rangle$ 和 $|\phi\rangle$ 信息的复合量子态。

(ii) 所得到的空间 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ 保留了几项对量子力学至关重要的性质，包括：

(ii.a) **维度**：如果 $\mathcal{H}$ 的维度是 n，则 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ 的维度是 n^2。

(ii.b) **纠缠**：在这个张量空间中的状态可以表现出纠缠，这是量子力学的一个基本方面。例如，状态 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle + |\psi_2\rangle \otimes |\phi_1\rangle)$ 不能分解为乘积态。

在量子力学中，$\otimes^2$-张量空间在复合系统和纠缠态的描述中起着关键作用。本文简要介绍了量子 $\otimes^2$-张量空间，并提供了进一步阅读的重要参考资料。

定义 1.2. [10] 在量子力学中，如果我们考虑两个量子系统 A 和 B，它们各自的状态空间是希尔伯特空间，通常表示为 $\mathcal{H}_A$ 和 $\mathcal{H}_B$。组合系统 $A \otimes B$ 由张量积表示。

$$\mathcal{H}_{A\otimes B} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B.$$

这个空间被称为**量子张量空间**或二分 $\otimes^2$ 张量空间。

定义 1.3. [2] 如果 A 和 B 分别有基向量 $\{|a_i\rangle\}$ 和 $\{|b_j\rangle\}$，那么 $\mathcal{H}_{A\otimes B}$ 的基向量形式为 $\{|a_i\rangle \otimes |b_j\rangle\}$。如果 $\dim(\mathcal{H}_A) = m$ 和 $\dim(\mathcal{H}_B) = n$，则 $\dim(\mathcal{H}_{A\otimes B}) = m \times n$。

定义 1.4. [8] 这个量子 $\otimes^2$-张量空间允许纠缠态的存在，其中 A 和 B 的状态是相关的，以至于它们不能表示为一个简单的乘积态 $|a\rangle \otimes |b\rangle$。

定义 1.5. [3, 7] 令 q 是一个非零复数（或一般代数设置中的参数）。**量子平面**定义为由两个变量 $\hat{x}_j$ 和 $\hat{x}_k$ 生成的结合代数，满足交换关系：

$$\hat{x}_j \hat{x}_k = q \hat{x}_k \hat{x}_j. \tag{1}$$

这个代数表示了经典平面的一种形变，当 $q=1$ 时可以恢复。现在，让我们考虑矩阵

$$\mathcal{M}_q(2)=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \tag{2}$$

量子决定因子 $Det_q\mathcal{M}_q(2)$ 可以写成 $ad-qcb$。另一方面，我们将 V 视为一个向量空间。V 的维度定义为 V 中线性独立元素的数量。考虑空间 $\otimes^2 V$ 中的二阶张量，并对元素 $\hat{x}_j$ 和 $\hat{x}_k$ 施加一个条件，这些元素构成了 V，即 $V=\langle\hat{x}_j,\hat{x}_k\rangle$，使得

$$\hat{x}_k\otimes\hat{x}_j=q\hat{x}_j\otimes\hat{x}_k. \tag{3}$$

通常，为了简化起见，会省略张量积符号。接下来，我们考虑保持条件 $\hat{x}_k\otimes\hat{x}_j=q\hat{x}_j\otimes\hat{x}_k$ 的 V 的自同态，其中 $\mathcal{M}_q$ 由 (2) 和 $\vec{x},\vec{x}'\in V$ 给出，使得：

$$\mathcal{M}_q\vec{x}=\vec{x}'. \tag{4}$$

这暗示了以下要求：

$$\hat{x}'_k\otimes\hat{x}'_j=q\hat{x}'_j\otimes\hat{x}'_k. \tag{5}$$

对量子平面 V 施加的约束导致了矩阵元素 $\mathcal{M}_q$ 在 V 的基及其对偶 V^* 中特定的关系。这些矩阵元必然是非交换的。自然地，我们有 $V^*=\langle\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_k}\rangle$，并且对偶量子平面满足关系：

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\otimes\frac{\partial}{\partial x_k}=q^{-1}\frac{\partial}{\partial x_k}\otimes\frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{6}$$

因此，这个空间构成了 V 的典范对偶空间。

定义 1.6. [4] 让我们考虑实代数 $\mathcal{B}_p$ 是一个具有 2^p 个基元素 $\mathrm{e}_1,\ldots,\mathrm{e}_{2^p-1}$ 的实向量空间，并设 $\{\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3,\ldots,\mathrm{e}_p\}$ 是 $\mathbb{R}^p$ 的一个基。在 $\mathcal{B}_p$ 中的乘法由以下规则给出：

$$\begin{aligned} \mathrm{e}_j\mathrm{e}_k+q_{jk}\mathrm{e}_k\mathrm{e}_j &= \delta_{jk} && (7)\\ \mathrm{e}_j\mathrm{e}_k+\mathrm{e}_k\mathrm{e}_j &= 2(1+q_{jk}) \quad j,k=1,2,\ldots,p, && (8)\end{aligned}$$

被定义为 q_{jk}

$$q_{jk}=\begin{cases}-1 & j\neq k,\\ 0 & j=k\end{cases}. \tag{9}$$

定义 1.7. [4,6] 实 Clifford 代数 $\mathcal{A}_m$ 是一个具有 2^m 个基元素 $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{2^m-1}$ 的实向量空间，定义为

$$\boldsymbol{e}_0 \equiv e_0 = 1, \boldsymbol{e}_1 = \ e_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m = e_m,$$

$$\boldsymbol{e}_{12} = e_1e_2, \boldsymbol{e}_{13} = e_1e_3, \ldots, \boldsymbol{e}_{m-1,m} = \ e_{m-1}e_m, \ldots, \boldsymbol{e}_{12\ldots m} = e_1e_2\ldots e_m,$$

并令 $\{\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{12}, \boldsymbol{e}_{13}, \ldots, \boldsymbol{e}_{m-1,m}, \boldsymbol{e}_{12\ldots m}\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的一个基。$\mathcal{A}_m$ 中的乘法由该规则给出

$$e_\alpha e_\beta + e_\beta e_\alpha = -2\delta_{\alpha\beta}e_0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m. \tag{10}$$

定义 1.8. [1,4–6,9] Cauchy-Riemann 算子的推广由以下给出

$$\mathcal{D} = \sum_{\beta=0}^{m} \boldsymbol{e}_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{\beta=1}^{m} \boldsymbol{e}_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta}, \tag{11}$$

第二项对应于狄拉克算子，我们将用 D 表示并定义为

$$D = \sum_{\beta=1}^{m} \boldsymbol{e}_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta}. \tag{12}$$

定义 1.9. [4] 令 $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3, ..., \mathrm{e}_p$, 为满足 (7) 的元素。差分算子 $\boldsymbol{D}$ 定义为

$$\boldsymbol{D} = \mathrm{e}_j \frac{\partial}{\partial x_k} + \mathrm{e}_k \frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{13}$$

其受制于

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}_j \frac{\partial}{\partial x_k} \mathrm{e}_k \frac{\partial}{\partial x_j} + \mathrm{e}_k \frac{\partial}{\partial x_j} \mathrm{e}_j \frac{\partial}{\partial x_k} = \\ &- \mathrm{e}_j \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\mathrm{e}_j \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \delta_{jk} \right] - \mathrm{e}_k \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mathrm{e}_k \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \delta_{jk} \right] - (1 - q_{jk}) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right). \end{aligned} \tag{14}$$

定义 1.10. [11] 令 $\hat{x}_j, \hat{x}_k, \hat{p}_j, \hat{p}_k$ 为位置和动量算符，并且令 f 是一个依赖于粒子坐标的功能。变形海森堡代数服从以下关系：

$$[\hat{x}_j, \hat{x}_k] = 0, \quad [\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{j,k}f, \quad [\hat{p}_j, \hat{p}_k] = -i\hbar \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\hat{p}_k - \frac{\partial f}{\partial x_k}\hat{p}_j \right), \quad j, k = 1, 2, 3. \tag{15}$$

其中 $\hbar$ 是普朗克常数。

本文组织如下：在第 2 节中，我们在 $\otimes^2$ 张量空间中介绍了形变海森伯代数。在最后一节中，我们介绍了非单演函数的应用。

2 变形的海森伯代数在 $\otimes^2$-张量空间中

定义 2.1. 令 $\hat{x}_j, \hat{x}_k, \hat{p}_j, \hat{p}_k$ 为向量空间 V 的元素。在空间 $\otimes^2 V$ 上，**变形海森伯代数在 $\otimes^2$ 张量空间中**由以下关系定义:

$$\begin{aligned} \hat{x}_j \otimes \hat{x}_k - q^{-1}\hat{x}_k \otimes \hat{x}_j &= 0, \quad \hat{p}_j \otimes \hat{p}_k - q^{-1}\hat{p}_k \otimes \hat{p}_j = 0, \\ \hat{x}_j \otimes \hat{p}_k - q\hat{p}_k \otimes \hat{x}_j &= i\hbar\delta_{jk}. \end{aligned} \tag{16}$$

以下定义是基于 Vakarchuk [11] 的粒子坐标 x_j, x_k 的函数 f 的情况下，定义 2.1 的一个特例。

定义 2.2. [11] 令 f 为一个依赖于粒子 x_j 和 x_k 坐标的函数。从定义 1.10 出发，我们通过以下关系用函数 f 定义了 q-**海森伯代数在 $\otimes^2$ 空间中**的版本，该函数由算子 $\hat{x}_j$、$\hat{x}_k$、$\hat{p}_j$ 和 $\hat{p}_k$ 生成:

$$\hat{x}_j \otimes \hat{x}_k = q^{-1}\hat{x}_k \otimes \hat{x}_j, \tag{17}$$

$$\hat{x}_j \otimes \hat{p}_k - q_{jk}\hat{p}_k \otimes \hat{x}_j = -i\hbar\delta_{jk}f, \tag{18}$$

$$\hat{p}_j \otimes \hat{p}_k - q^{-1}\hat{p}_k \otimes \hat{p}_j = -i\hbar\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \otimes \hat{p}_k - q^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_k} \otimes \hat{p}_j\right). \tag{19}$$

引理 2.3. 如果 $f = 1$，则得到关系 (16)

Proof. 证明通过展示 $\frac{\partial}{\partial x_j}(1) = \frac{\partial}{\partial x_k}(1) = 0$ 完成。这导致了关系式 (6) 和 (3)，当 $f = 1$ 时获得这些关系式。这些结果来自于动量算子 $\hat{p}_j = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}$ 和 $\hat{p}_k = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_k}$ 的定义。 □

3 非单生成函数的应用

在以下部分中，我们将研究张量空间中的海森伯代数的这种变形，在这里函数定义在克利福德代数内，特别是对于非单演的情况。

命题 3.1. [4] 令 f 为形式为 $f = f_j(x_j, x_k)\boldsymbol{e}_j + f_k(x_j, x_k)\boldsymbol{e}_k$ 的左非单生成函数 (Dirac 算子 $Df \neq 0$)。对于这个情形，q-海森伯代数在 $\otimes^2$ 空间中的关系由以下

给出

$$\hat{x}\otimes\hat{x}_k = q^{-1}\hat{x}_k\otimes\hat{x}, \quad \hat{x}_j\otimes\hat{x} = q^{-1}\hat{x}\otimes\hat{x}_j, \tag{20}$$

$$\hat{x}\otimes\hat{p}_k - q_{jk}\hat{p}_k\otimes\hat{x} = -i\hbar\delta_{j,k}f, \quad \hat{x}_j\otimes\hat{p} - q_{jk}\hat{p}\otimes\hat{x}_j = -i\hbar\delta_{j,k}, \tag{21}$$

$$\hat{p}\otimes\hat{p}_k - q^{-1}\hat{p}_k\otimes\hat{p} = -i\hbar\left(Df\otimes\hat{p}_k - q^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_k}\otimes\hat{p}\right), \tag{22}$$

$$\hat{p}_j\otimes\hat{p} - q^{-1}\hat{p}\otimes\hat{p}_j = -i\hbar\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\otimes\hat{p} - q^{-1}Df\otimes\hat{p}_j\right). \tag{23}$$

Proof. 为了得出 (20) 中的第一个关系，我们将 (17) 中的第一个关系从左边乘以 $\mathbf{e}_j$，得到

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_j\hat{x}_j\otimes\hat{x}_k &= q^{-1}\mathbf{e}_j\hat{x}_k\otimes\hat{x}_j,\\ \mathbf{e}_j\hat{x}_j\otimes\hat{x}_k &= q^{-1}\hat{x}_k\otimes\mathbf{e}_j\hat{x}_j,\\ \hat{x}\otimes\hat{x}_k &= q^{-1}\hat{x}_k\otimes\hat{x}.\end{aligned}$$

类似的程序可以应用于获得（20）中的第二个关系，这次在右边乘以 $\mathbf{e}_k$。现在为了得到公式（21）中的第一个关系，我们考虑 $f = f_j(x)$，并在左侧乘以 $\boldsymbol{e}_j$，结果为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_j\hat{x}_j\otimes\hat{p}_k - q_{jk}\boldsymbol{e}_j\hat{p}_k\otimes\hat{x}_j &= -i\hbar\delta_{jk}f_j(x)\boldsymbol{e}_j,\\ \boldsymbol{e}_j\hat{x}_j\otimes\hat{p}_k - q_{jk}\hat{p}_k\otimes\boldsymbol{e}_j\hat{x}_j &= -i\hbar\delta_{jk}f_j(x)\boldsymbol{e}_j,\\ \hat{x}\otimes\hat{p}_k - q_{jk}\hat{p}_k\otimes\hat{x} &= -i\hbar\delta_{jk}f.\end{aligned}$$

为了得到公式（21）中的第二个关系，我们采用上述相同的过程，这次在右侧乘以 $\boldsymbol{e}_k$。现在为了得到（22），我们考虑在（12）中定义的 Dirac 算子。在 (19) 左侧乘以 $\boldsymbol{e}_j$ 我们得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_j\hat{p}_j\otimes\hat{p}_k - q^{-1}\boldsymbol{e}_j\hat{p}_k\otimes\hat{p}_j &= -i\hbar\left(\boldsymbol{e}_j\frac{\partial f}{\partial x_j}\otimes\hat{p}_k - q^{-1}\boldsymbol{e}_j\frac{\partial f}{\partial x_k}\otimes\hat{p}_j\right),\\ \hat{p}\otimes\hat{p}_k - q^{-1}\hat{p}_k\otimes\hat{p} &= -i\hbar\left(Df\otimes\hat{p}_k - q^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_k}\otimes\boldsymbol{e}_j\hat{p}_j\right),\\ &= -i\hbar\left(Df\otimes\hat{p}_k - q^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_k}\otimes\hat{p}\right).\end{aligned}$$

最后对于 (23), 我们按照之前的步骤进行，但这次在右侧乘以 $\boldsymbol{e}_k$，并且注意到 Dirac 算子可以表示为 $D = \boldsymbol{e}_k\frac{\partial f}{\partial x_k}$。 □

定理 3.2. 对于单生成函数，即满足 $Df=0$ 在 (22) 和 (23) 中的函数，表达式 (6) 成立。

Proof. 假设 $f=0\boldsymbol{e}_j+0\boldsymbol{e}_k$。然后，将 $Df=0$ 和

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}=\frac{\partial f}{\partial x_k}=0.$$

代入 (22) 和 (23) 得到

$$\hat{p}\otimes\hat{p}_k-q^{-1}\hat{p}_k\otimes\hat{p}=0,\quad \hat{p}_j\otimes\hat{p}-q^{-1}\hat{p}\otimes\hat{p}_j=0,$$

考虑到 $\hat{p}=-i\hbar\boldsymbol{e}_j\frac{\partial}{\partial x_j}$ 和 $\hat{p}=-i\hbar\boldsymbol{e}_k\frac{\partial}{\partial x_k}$，我们得到 (6) □。

备注 3.3. [4] 上述处理可以应用于右非单态函数，$fD\neq 0$。

在以下部分，我们将提出空间 $\otimes^2$ 中的对应 q-变形海森伯代数。

命题 3.4. q-海森伯代数由生成元集 $\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{p}}$ 定义，其中 $\hat{\mathbf{x}}=\hat{x}_j\mathrm{e}_k+\hat{x}_k\mathrm{e}_j,\hat{\mathbf{p}}=\hat{p}_j\mathrm{e}_k+\hat{p}_k\mathrm{e}_j$ 和 $f=f_j(x_j,x_k)\mathrm{e}_k+f_k(x_j,x_k)\mathrm{e}_j$，差分算子（13），并且满足以下关系：

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}\otimes\hat{p}_k-q_{jk}\hat{p}_k\otimes\hat{\mathbf{x}} &= -i\hbar\delta_{jk}f, &(24)\\
\hat{x}_j\otimes\hat{\mathbf{p}}-q_{jk}\hat{\mathbf{p}}\otimes\hat{x}_j &= -i\hbar\delta_{jk}f, &(25)\\
\mathrm{e}_k\hat{p}_j\otimes\hat{p}_k-q_{jk}^{-1}\hat{p}_k\otimes\mathrm{e}_k\hat{p}_j &= -i\hbar\left(\mathrm{e}_k\frac{\partial f}{\partial x_j}\otimes\hat{p}_k-q_{jk}^{-1}\mathrm{e}_k\frac{\partial f}{\partial x_k}\otimes\hat{p}_j\right), &(26)\\
\hat{p}_j\otimes\mathrm{e}_j\hat{p}_k-q_{jk}^{-1}\mathrm{e}_j\hat{p}_k\otimes\hat{p}_j &= -i\hbar\left(\mathrm{e}_j\frac{\partial f}{\partial x_j}\otimes\hat{p}_k-q_{jk}^{-1}\mathrm{e}_j\frac{\partial f}{\partial x_k}\otimes\hat{p}_j\right). &(27)
\end{aligned}$$

Proof. 对于 (24)，我们有

$$\begin{aligned}
i\hbar\delta_{jk}\mathrm{e}_kf_j &= \mathrm{e}_k\hat{x}_j\otimes\hat{p}_k-q_{jk}\hat{p}_k\otimes\mathrm{e}_k\hat{x}_j,\\
&= \mathrm{e}_k\hat{x}_j\otimes\hat{p}_k-q_{jk}\hat{p}_k\otimes\mathrm{e}_k\hat{x}_j+\mathrm{e}_j\hat{x}_k\otimes\hat{p}_k-\mathrm{e}_j\hat{x}_k\otimes\hat{p}_k-q_{jk}\hat{p}_k\otimes\mathrm{e}_j\hat{x}_k+q_{jk}\hat{p}_k\otimes\mathrm{e}_j\hat{x}_k,\\
&= (\mathrm{e}_j\hat{x}_k+\mathrm{e}_k\hat{x}_j)\otimes\hat{p}_k-q_{jk}\hat{p}_k\otimes(\mathrm{e}_j\hat{x}_k+\mathrm{e}_k\hat{x}_j)-\mathrm{e}_j\hat{x}_k\otimes\hat{p}_k+q_{jk}\hat{p}_k\otimes\mathrm{e}_j\hat{x}_k,\\
&= \hat{\mathbf{x}}\otimes\hat{p}_k-q_{jk}\hat{p}_k\otimes\hat{\mathbf{x}}-\mathrm{e}_j\hat{x}_k\otimes\hat{p}_k+q_{jk}\hat{p}_k\otimes\mathrm{e}_j\hat{x}_k.
\end{aligned}$$

考虑到 $-\mathrm{e}_j\hat{x}_k\otimes\hat{p}_k+q_{jk}\hat{p}_k\otimes\mathrm{e}_j\hat{x}_k=i\hbar\mathrm{e}_jf_k$，上述表达式可以写成以下形式

$$\hat{\mathbf{x}} \otimes \hat{p}_k - q_{jk}\hat{p}_k \otimes \hat{\mathbf{x}} + i\hbar\delta_{jk}\mathrm{e}_j f_k = -i\hbar\delta_{jk}\mathrm{e}_k f_j,$$

因此我们有

$$\hat{\mathbf{x}} \otimes \hat{p}_k - q_{jk}\hat{p}_k \otimes \hat{\mathbf{x}} = -i\hbar\delta_{jk} f.$$

类似的过程可用于获得 (25)。现在对于 (26) 我们有以下计算

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}_k\hat{p}_j \otimes \hat{p}_k - q_{jk}^{-1}\hat{p}_k \otimes \mathrm{e}_k\hat{p}_j &= -i\hbar\left(\mathrm{e}_k\frac{\partial f}{\partial x_j} \otimes \hat{p}_k - q_{jk}^{-1}\mathrm{e}_k\frac{\partial f}{\partial x_k} \otimes \hat{p}_j\right), \\
&= -i\hbar\mathrm{e}_k\frac{\partial f}{\partial x_j} \otimes \hat{p}_k + i\hbar q_{jk}^{-1}\mathrm{e}_k\frac{\partial f}{\partial x_k} \otimes \hat{p}_j.
\end{aligned}$$

现在，对于 (27)，我们以类似的方式进行处理，从表达式开始

$$\hat{p}_j \otimes \mathrm{e}_j\hat{p}_k - q_{jk}^{-1}\mathrm{e}_j\hat{p}_k \otimes \hat{p}_j = -i\hbar\left(\mathrm{e}_j\frac{\partial f}{\partial x_j} \otimes \hat{p}_k - q_{jk}^{-1}\mathrm{e}_j\frac{\partial f}{\partial x_k} \otimes \hat{p}_j\right).$$

□

命题 3.4 在非交换几何和量子代数框架中起着至关重要的作用，原因如下：

(i) **经典海森伯代数的扩展**：通过变形正则对易关系，这种表述允许研究在非交换空间上的量子系统，在这些系统中，坐标-动量二重性的常规假设不再成立。

(ii) **通向量子几何的桥梁**：q 参数和函数依赖算子的出现反映了潜在的几何变形，这种变形与量子群和量子平面兼容，例如 Manin 定义中出现的那些（见定义 1.5）。

(iii) **非交换泛函分析基础**：修改后的换位子为在 q-形变空间上构建微分和积分运算提供了一个自然的起点，包括杰克逊导数和广义狄拉克算子。

(iv) **与高能物理和量子引力的相关性**：由于该命题通过变形参数嵌入了最小长度尺度，它可能为具有紫外正则化的量子场论以及具有离散或量子结构的时空模型提供见解。

(v) **与 *Clifford* 型变形的结构兼容性**：在此命题中使用的张量形式使其与进一步的变形兼容，例如 q-克利福德代数，在非交换环境下描述旋子结构和超对称扩展时这是必不可少的。

因此，命题 3.4 为海森堡代数的一致且物理上有意义的扩展奠定了基础，开启了代数方法在量子物理学和非交换几何未来发展中的道路。

References

[1] F. Brackx, R. Delanghe, and F. Sommen. *Clifford Analysis*, volume 76 of *Research Notes in Mathematics*. Pitman Advanced Publishing Program, 1982.

[2] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Franck Laloë. *Quantum Mechanics, Volume 1: Basic Concepts, Tools, and Applications*. Wiley-VCH, 2 edition, 2020.

[3] Bertfried Fauser. On the relation of manin ’ s quantum plane quantum clifford algebras. *Czechoslovak Journal of Physics*, 50(0), 2000.

[4] J. C. Jaramillo. An approach to derivatives for non-monogenic functions. *Revista Integración. Temas de matemáticas*, 42(2):11–21, 2024.

[5] J. C. Jaramillo. q-differential operators and derivations on the quadratic relativistic invariant algebras. *Revista Momento*, 69:116–135, 2024.

[6] Yuri Krasnov. The structure for monogenic functions. *Progress of Theoretical Physics*, 19(2):247–260, 1999.

[7] Yuri I. Manin. *Quantum Groups and Noncommutative Geometry*. Centre de Recherches Mathématiques Short Courses. Springer Cham, 2 edition, 2018. With a contribution by Theo Raedschelders and Michel Van den Bergh.

[8] Michael Nielsen and Isaac Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2010.

[9] J. Ryan. *Clifford Algebras in Analysis and Related Topics*. CRC Press, 1996.

[10] R. Shankar. *Principles of Quantum Mechanics.* Kluwer Academic / Plenum Publishers, 1980.

[11] I. O. Vakarchuk. On dirac theory in the space with deformed heisenberg algebra: exact solutions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38:7567–7576, 2005.