

具有正则子群图的有限群

ANDREA LUCCHINI

ABSTRACT. 我们证明有限群 G 的子群图是正则的当且仅当 G 是具有无平方因子阶的循环群。

有限群 G 的子群图 $L(G)$ 是一个其顶点为该群的子群的图，并且两个顶点 H_1 和 H_2 通过一条边连接当且仅当 $H_1 \leq H_2$ 并且不存在子群 K 满足 $H_1 \leq K \leq H_2$. Georgiana Fasolă 和 Marius Tărnăuceanu 猜测， $L(G)$ 是一个正则图当且仅当 G 是一个无平方因子阶的循环群。在这篇简短的笔记中，我们给出了这个猜想的一个初等证明。

定理 1. 设 G 是一个有限群。则 $\Gamma(G)$ 是正则图当且仅当 G 是循环群并且 G 的阶是无平方因子的。

显然，如果 G 是循环的且 $|G| = p_1 \cdots p_t$ 与 $p_1, \dots, p_t$ 为不同的素数，则 $\Gamma(G)$ 的每个顶点度为 t 。因此，在本文的其余部分中，我们将假设 G 是一个有限群，并且 $L(G)$ 是正则的，我们将通过相继的断言来证明该结果。

给定 G 的一个子群 H ，我们将用 $\delta(H)$ 表示 H 在 G 的子群图中的度数，用 $\delta_1(H)$ 表示 H 的最大子群数，用 $\delta_2(H)$ 表示包含 H 作为最大子群的 G 的子群 K 的数量。显然 $\delta(H) = \delta_1(H) + \delta_2(H)$ 。

对于每个整除 $|G|$ 的素数 p ，我们用 $\mathcal{A}_p$ 表示 G 阶为 p 的子群集，并用 $\mathcal{A}$ 表示不相交并集 $\cup_p \mathcal{A}_p$ 。此外我们设定 $\alpha_p := |\mathcal{A}_p|$ 和 $\alpha := |\mathcal{A}| = \sum_p \alpha_p$ 。注意 $\alpha = \delta(\{1\})$ ，所以我们的假设 $\Gamma(G)$ 是正则的等价于说对于每个 $\delta(H) = \alpha H \leq G$ 。

声明 1. 如果 p 是一个奇素数且 $g \in G$ 的阶是一个 p 次幂，那么对于每一个 $g \in N_G(A)$ 来说 $A \in \mathcal{A}$ 。

Proof. 设 x 是一个具有性质 $g \in \langle x \rangle$ 的最大阶 p 元素。假设 $H \leq G$ 具有性质 $\langle x \rangle$ 是 H 的一个极大子群。由 x, H 的极大性，不是循环 p -群，因此根据 [1, 5, 3, 6]

Project funded by the European Union – NextGenerationEU under the National Recovery and Resilience Plan (NRRP), Mission 4 Component 2 Investment 1.1 - Call PRIN 2022 No. 104 of February 2, 2022 of Italian Ministry of University and Research; Project 2022PSTWLB (subject area: PE - Physical Sciences and Engineering) " Group Theory and Applications".

它包含一个极小子群 A , 该子群不包含在 $\langle x \rangle$ 中。由于 $\langle x \rangle$ 是 H 的最大子群, 我们必须有 $H = \langle x, A \rangle$. 换句话说, 每个 G 的子群 H , 在其中 $\langle x \rangle$ 是最大的由 x 和不同于包含在 $\langle x \rangle$ 中的阶为 p 的唯一子群的 $\mathcal{A}$ 的一个元素生成的。这表明 $\delta_2(\langle x \rangle) \leq \alpha - 1$. 另一方面, $\delta_1(\langle x \rangle) = 1$ 所以我们必须有 $\delta_2(\langle x \rangle) = \alpha - 1$. 这意味着对于 $\mathcal{A}$ 中每一对不同的元素 A_1, A_2 , 都有 $\langle x, A_1 \rangle \neq \langle x, A_2 \rangle$ 特别是对于每一个 $A^x = A$, 由于 $A \in \mathcal{A}$, 我们得出结论 $g \in \langle x \rangle$, 对于每个 $g \in N_G(A) A \in \mathcal{A}$. $\square$

声明 2. 令 N 为由 G 的奇数阶最小子群生成的 G 的子群。则 N 是 G 的一个阿贝尔正规子群。

Proof. 请注意, $N = \langle A \mid A \in \cup_{p \neq 2} \mathcal{A}_p \rangle$. 根据之前的声明, 如果 $A_1, A_2 \in \cup_{p \neq 2} \mathcal{A}_p$, 则 $A_1 \leq N_G(A_2)$ 和 $A_2 \leq N_G(A_1)$. 因此, 如果 $A_1 \neq A_2$, 则 $[A_1, A_2] \in A_1 \cap A_2 = 1$. $\square$

声明 3. G/N 是一个 2-群。

Proof. 由于 N 是初等阿贝尔 p -群的直积, N 的极大子群和极小子群的数量相同。特别是 $\delta_1(N) = \sum_{p \neq 2} \alpha_p$ 因此 $\delta_2(N) = \alpha_2$. 根据声明 1, $N \leq N_G(A) = C_G(A)$ 对于每一个 $A \in \mathcal{A}_2$. 因此, 对于每一个 $A \in \mathcal{A}_2$, N 是 $\langle N, A \rangle \cong N \times A$ 的一个极大子群, 并且不同的 $A \in \mathcal{A}_2$ 选择会产生不同的子群。因此, 从等式 $\delta_2(N) = \alpha_2$, 我们推断出 N 在 G 的每一个它为最大的子群 H 中的指数为 2。这表明 G/N 是一个 2-群。 $\square$

声明 4. 设 Q 是 G 的一个西罗 2-子群。那么 Q 是初等阿贝尔的。

Proof. 令 F 为 Q 的 Frattini 子群。注意, Q/F 的极小子群和极大子群的数量相同。记此数量为 t . 现在假设 $H_1, \dots, H_u$ 是 G 中的子群, 在这些子群中 Q 是极大的。对于 $1 \leq i \leq u$, 我们必须有 $H_i = QM_i$, 其中 M_i 是由 Q 归一化的 N 的非平凡子群, 并且具有此性质的最小群。注意如果 $i_1 \neq i_2$ 则 $M_{i_1} \cap M_{i_2} = 1$. 对每个 $1 \leq i \leq u$, 令 T_i 是 M_i 的一个非平凡子群, 最小化被 F 归一化的性质。那么 $K_1 = FT_1, \dots, FT_u$ 是 G 的不同子群, 包含 F 作为极大子群。但现在我们有 $\delta(Q) = \delta_1(Q) + \delta_2(Q) = t + u$ 和 $\delta_2(F) \geq t + u$. 因此等式 $\delta(Q) = \delta(F)$ 意味着 $\delta_1(F) = 1$ 并且由此得出 $F = 1$. $\square$

声明 5. G 是交换的且其所有西罗子群都是初等交换的。

Proof. 我们有 $G = NQ$, 其中 Q 是一个 Sylow 2-子群。根据之前的声明, Q 是初等阿贝尔的。特别地, $Q = \langle A \mid A \in \mathcal{A}_2 \rangle$. 由声明 1 可知, 对于每一个 $A \in \mathcal{A}_2$, $N \leq N_G(A) = C_G(A)$, 因此 $[N, Q] = 1$, 并且从而 G 是交换的。 $\square$

声明 6. G 是循环的且阶数无平方因子。

Proof. 由之前的断言可知, 只需证明 G 的每个西罗子群都是素数阶的循环群。令 p 是 $|G|$ 的一个素因子, 并假设矛盾地, G 的 Sylow p -子群 P 的阶为 p^d , 其中 $d \geq 2$. 令 X 是 G 的一个极大子群。然后

$$\delta(X) = \delta_1(X) + \delta_2(X) = \left(\frac{p^{d-1} - 1}{p - 1} \right) + \left(1 + \sum_{q \neq p} \alpha_p(q) \right).$$

由于

$$\delta(\{1\}) = \sum_r \alpha_r = \frac{p^d - 1}{p - 1} + \sum_{q \neq p} \alpha_p(G)$$

因此

$$\frac{p^{d-1} - 1}{p - 1} + 1 = \frac{p^d - 1}{p - 1},$$

矛盾。 □

REFERENCES

1. Derek J. S. Robinson, A course in the theory of groups. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 80. Springer-Verlag, New York, 1996.

A. LUCCHINI, UNIVERSITÀ DI PADOVA, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”, VIA TRIESTE 63, 35121 PADOVA, ITALY

Email address: lucchini@math.unipd.it