计算 Schrödinger 算子共振的 FEM-DtN-SIM 方法

Bo Gong[1], Takumi Sato[2], Jiguang Sun[3], Xinming Wu[2]

[1] *School of Mathematics, Statistics and Mechanics, Beijing University of Technology, Beijing, 100124, China.*

[2] *School of Mathematical Sciences, SKLCAM, Fudan University, Shanghai 200433, China.*

[3] *Department of Mathematical Sciences, Michigan Technological University, Houghton, MI 49931, U.S.A.*

薛定谔算子共振的研究在数学物理学中有着悠久的传统。广泛的理论研究探讨了共振与实轴的接近程度、它们的分布以及计数函数的界限。然而，由于问题的非线性和域的无界性质，一维以上的计算结果仍然很少见。我们提出了一种将有限元、狄利克雷到诺伊曼（DtN）映射和谱指标方法相结合的新方法。在截断计算域边界上施加的 DtN 映射强制执行外射条件。有限元允许有效地处理复杂的势函数。谱指标方法可以有效计算由此产生的非线性代数系统的（复）特征值，而不引入谱污染。通过一系列数值示例证明了这种方法的有效性。

1. 介绍

Schrödinger 算子的共振一直是数学和物理学中的一个经典课题，它推广了能量可以散射到无穷远的系统中的束缚态。它们被刻画为解析延拓的解算子极点，其实部表示振荡频率，虚部对应衰减率 [8]。大量的研究调查了共振与实轴的接近程度、无共振区域、界和计数函数等。[4, 8, 15]。散射共振的研究在多个领域有重要应用，包括引力波信号、光子学和等离子体散射 [5, 6, 12]。

与大量关于共振分析的文献相比，很少有研究处理薛定谔算子在一维情况以外的共振计算 [9, 10]。在更高维度中，问题变得显著更具挑战性。当将计算限制在一个有界域内时，正确施加外射条件是至关重要的。此外，该问题对特征参数表现出非线性依赖关系。在一维情况下，外射条件导致了一个二次特征值问题，可以通过标准的数值线性代数技术进行线性和高效求解 [9]。但在更高维度中，这种线性化不再可行。此外，采用吸收边界条件（如完全匹配层 (PML) 或阻抗边界条件）的公式并不等同于原问题。因此，它们可能会引入显著的谱污染，甚至导致完全错误的共振计算。

在本文中，我们研究具有有界（复数）紧支集势的薛定谔算子共振的计算。通过在一个截断域上重新表述问题并引入狄利克雷到诺依曼（DtN）映射来强制外辐射条件，我们得到了一个解析算子值函数的本征值问题。然后，我们提出一种有限元方法来求解这个非线性系统，在该系统中计算出的本征值对应于共振 [7, 13]。离散本征值问题是使用基于轮廓积分 [3] 的并行多步谱指标法进行计算的。我们提供了各种势能的数值例子来验证所提出的方法。虽然我们的重点是二维情况，但该方案也适用于三维问题。这里开发的计算框架作为研究薛定谔共振的定量工具。值得注意的是，它还成功应用于声学障碍物和金属光栅结构 [2, 14] 的散射共振的计算。

所提出方法的收敛性可以通过全纯算子函数本征值问题的抽象逼近理论来建立，其分析方法与声学障碍物散射共振的分析相同 [2, 11]。具体而言，计算出的共振随着网格大小 $h \to 0$ 的减小以一定速率收敛到真实的共振，这一点通过数值实验进一步得到了证明。

论文的其余部分组织如下。在第 2 节中，我们介绍了 Schrödinger 算子的共振概念。在第 3 节中，我们使用圆对无限域进行截断，并在边界上施加 Dirichlet-to-Neumann (DtN) 映射。第 4 节包含有限元公式和一个全纯算子值函数的定义，其特征值对应于共振。最后，在第 5 节中，我们提供了数值示例来验证所提出的方法。

2. 薛定谔共振

令 $V(x) \in L^\infty(D)$ 是一个具有紧支集 $D \subset \mathbb{R}^2$ 的势函数。Schrödinger 算子定义为

$$H_V := -\triangle + V(x). \tag{1}$$

Schrödinger 算子的共振问题是要找到 $k \in \mathbb{C}$ 和 Schrödinger 方程的非平凡外解 u

$$H_V u(x) - k^2 u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{2}$$

对于任意 $k \in \mathbb{C}$, Schrödinger 方程 $H_V u(x) - k^2 u(x) = f$ 的外解 u 满足 [1]

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta}, \quad |x| > r_0, \tag{3}$$

其中 $\theta = \arg(x)$,$r_0 > 0$ 是足够大的常数，$H_n^{(1)}(\cdot)$ 是阶数为 n 的第一类汉克尔函数。

共振是解析算子 $R(k) := (-\triangle + V - k^2)^{-1}$ 的极点。注意，$R(k)$ 在 $\mathrm{Im} k \gg 0$ 上是解析的，并可以继续作为 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数。这里我们感兴趣的是计算下半复平面中共振 k 的数值。

当 D 是一个半径为 r_0 和 $V(x) = V_0 \geq 0$ 的圆盘时，可以解析地得出共振。流出解 u 可以写成如下形式

$$u(x) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta}, & r = |x| > r_0, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n J_n(\sqrt{k^2 - V_0} r) e^{in\theta}, & r = |x| \leq r_0. \end{cases}$$

u 的连续性及其在 D 边界处的导数导致

$$a_n H_n^{(1)}(kr)\Big|_{r=r_0} = b_n J_n(\sqrt{k^2 - V_0} r)\Big|_{r=r_0},$$
$$a_n \frac{\partial H_n^{(1)}(kr)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} = b_n \frac{\partial J_n(\sqrt{k^2 - V_0} r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0}.$$

上述方程可以写成一个线性系统

$$\begin{pmatrix} H_n^{(1)}(kr_0) & -J_n(\sqrt{k^2 - V_0} r_0) \\ kH_{n+1}^{(1)}(kr_0) & -\sqrt{k^2 - V_0} J_{n+1}(\sqrt{k^2 - V_0} r_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

散射共振是 k 使得

$$\sqrt{k^2 - V_0} J_{n+1}\left(\sqrt{k^2 - V_0} r_0\right) H_n^{(1)}(kr_0) - kH_{n+1}^{(1)}(kr_0) J_n\left(\sqrt{k^2 - V_0} r_0\right) = 0.$$

如果 $r_0 = 1$，则有

$$d_n(k) := \sqrt{k^2 - V_0} J_{n+1}\left(\sqrt{k^2 - V_0}\right) H_n^{(1)}(k) - kH_{n+1}^{(1)}(k) J_n\left(\sqrt{k^2 - V_0}\right).$$

上述行列式的绝对值的等高线 $d_n(k), n = 0, \ldots, 10$ 如图 1所示。最小值（零点）表示精确共振的位置。

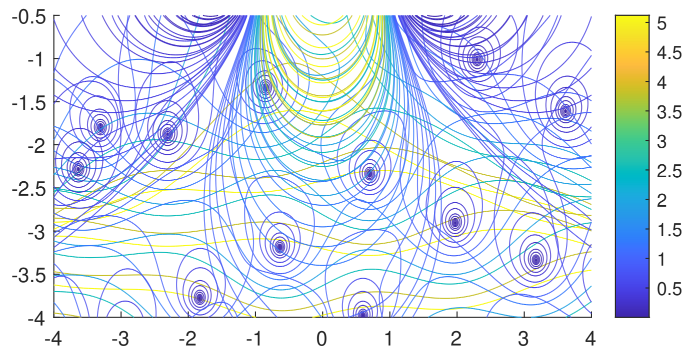

图 1. $|d_n(k)|$ 和 $n = 0, \ldots, 10$ 的等高线图（$r_0 = 1, V(x) = 2$）。

3. 狄利克雷到诺伊曼映射

由于问题是在无限域 $\mathbb{R}^2$ 上提出的，我们首先将其重新表述为一个有界域上的等价问题以促进有限元计算。设 Γ_R 是一个以原点为中心、半径为 R 的圆，并且 D 在其内部。用 Ω 表示这样的圆盘，使得 $\partial\Omega = \Gamma_R$。我们需要在 Γ_R 上施加一个合适的边界条件。为此，我们在 Γ_R 上使用 DtN 映射。设 $H^1(\Omega)$ 是定义在 Ω 上且梯度可积的可积函数的 Sobolev 空间。令 $H^{1/2}(\Gamma_R)$ 为 $H^1(\Omega)$ 的迹空间，且 $H^{-1/2}(\Gamma_R)$ 为其对偶空间。如下 [7]，DtN 算子 $T(k) : H^{1/2}(\Gamma_R) \to H^{-1/2}(\Gamma_R)$ 定义为

$$T(k)\varphi = {\sum_{n=0}^{+\infty}}' \frac{k}{\pi} \frac{{H_n^{(1)}}'(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} \int_0^{2\pi} \varphi(\phi) \cos(n(\theta - \phi)) \mathrm{d}\phi,$$

其中带撇号的求和 $'$ 意味着零项乘以 $1/2$。

运算符 $T(k)$ 是有界的。对于实数 $s \geq 1/2$,$T(k) : H^s(\Gamma_R) \to H^{s-1}(\Gamma_R)$ 满足

$$\|T(k)\varphi\|_{H^{s-1}(\Gamma_R)} \leq C\|\varphi\|_{H^s(\Gamma_R)}, \tag{4}$$

其中 $C > 0$ 是依赖于 kR 但不依赖于 φ 的常数，对几乎所有 $k \in \mathbb{C}$ 成立。

使用 $T(k)$，我们在有界域 Ω 上获得了一个问题，该问题等价于 (2)：寻找 $k \in \mathbb{C}$ 和非平凡的 $u \in H^1(\Omega)$ 使得

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u - k^2 u = 0 & \text{in} \ , \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = T(k)u & \text{on}\ _{\mathrm{R}}. \end{cases} \tag{5}$$

对于 (5) 的变分公式是找到 $k \in \mathbb{C}$ 和 $u \in H^1(\Omega)$，使得

$$(\nabla u, \nabla v) + (V(x)u, v) - k^2(u, v) - \langle T(k)u, v\rangle_{\Gamma_R} = 0 \tag{6}$$

对于所有的 $v \in H^1(\Omega)$，其中 $(\cdot,\cdot)$ 表示 $L^2(\Omega)$ 内积和 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $H^{-1/2}(\Gamma_R)$–$H^{1/2}(\Gamma_R)$ 对偶。

设 $(\cdot,\cdot)_1$ 是 $H^1(\Omega)$ 内积。定义算子 $B(k) : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$，使得

$$(B(k)u, v)_1 = (\nabla u, \nabla v) + (V(x)u, v) - k^2(u, v) - \langle T(k)u, v\rangle_{\Gamma_R}$$

对于所有 $v \in H^1(\Omega)$。

薛定谔共振是 $B(\cdot)^{-1}$ 的极点。共振与 $B(\cdot)$ 的本征值之间具有一一对应关系（见 [8] 的定理 C.10）。因此，我们计算 $B(\cdot)$ 的本征值问题，即找到 $(k, u \neq 0) \in \mathbb{C} \times H^1(\Omega)$ 使得

$$B(k)u = 0 \quad \text{in } H^1(\Omega). \tag{7}$$

4. 有限元离散化

现在我们转向 (7) 的有限元离散化。设 $\mathcal{T}_n := \mathcal{T}_{h_n}$ 为一个正则三角形网格，用于 Ω，其网格大小为 h_n。令 $V_n \subseteq H^1(\Omega)$ 为定义在 $\mathcal{T}_n$ 上的拉格朗日有限元空间。定义离散算子 $B_n^N(k) : V_n \to V_n$，使得对于所有 $v_n \in V_n$ 成立

$$\begin{aligned}(B_n^N(k)u_n, v_n)_1 = (\nabla u_n, \nabla v_n) + (V(x)u_n, v_n)\\ -k^2(u_n, v_n) - \langle T^N(k)u_n, v_n\rangle_{\Gamma_R}\end{aligned} \tag{8}$$

其中 $T^N(k) : H^{1/2}(\Gamma_R) \to H^{-1/2}(\Gamma_R)$ 是由

$$T^N(k)\varphi = {\sum_{n=0}^{N}}' \frac{k}{\pi} \frac{{H_n^{(1)}}'(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} \int_0^{2\pi} \varphi(\phi)\cos(n(\theta-\phi))\mathrm{d}\phi.$$

给出的截断 DtN 映射。整数 N 是截断阶数。类似于 (4)，$T^N(k)$ 也是有界的，即

$$\|T^N(k)\varphi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_R)} \le C\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma_R)}. \tag{9}$$

令 $v_n^i, i = 1, 2, \ldots, J$ 为 V_n 的基函数。为了获得矩阵形式的 (8)，令 S 为刚度矩阵与 $S^{ij} = (\nabla v_n^j, \nabla v_n^i)$ 相关，M_V 为势能矩阵与 $M_V^{ij} = (V(x)v_n^j, v_n^i)$ 相关，M 为质量矩阵与 $M^{ij} = (v_n^j, v_n^i)$ 相关，并且 $E(k)$ 由于截断的 DtN 映射与 $E^{ij}(k) = \langle T^N(k)v_n^j, v_n^i\rangle_{\Gamma_R}$ 相关。与 (8) 对应的非线性代数特征值问题是找到 $k \in \mathbb{C}$ 和一个非平凡向量 $\mathbf{u}$，使得

$$F(k)\mathbf{u} = \mathbf{0}, \tag{10}$$

其中

$$F(k) := S + M_V - k^2 M - E(k).$$

设 $\Theta \subset \mathbb{C}$ 是一个有界且连通的区域，使得 $\partial\Theta$ 是一条简单的闭曲线。假设 $F(\cdot)$ 在 Θ 上是全纯的，并且 $F(\cdot)^{-1}$ 在 Θ 上是有理函数，其极点是 $F(\cdot)$ 的特征值。我们提出了一种并行多步谱指标方法来计算 Θ 中的所有特征值。

假设 F 没有在 $\partial\Theta$ 上的特征值，定义一个算子 $P \in \mathbb{C}^{J,J}$ 如下：

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Theta} F(z)^{-1} dz, \tag{11}$$

这是一个从 $\mathbb{C}^J$ 到与 Θ 中 $F(\cdot)$ 的所有特征值相关的广义特征空间的投影。如果 $F(\cdot)$ 在 Θ 中没有特征值，则 $P = 0$，并且对于所有 $\boldsymbol{f} \in \mathbb{C}^J$ 均有 $P\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$。否则，随机向量 $\boldsymbol{f}$ 以概率 1 具有 $P\boldsymbol{f} \neq \mathbf{0}$。因此，可以使用 $P\boldsymbol{f}$ 来判断 Θ 是否包含特征值。

我们使用梯形求积规则计算投影 $P\boldsymbol{f}$

$$P\boldsymbol{f} \approx \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{N_\omega} \omega_j \boldsymbol{x}_j, \tag{12}$$

其中 ω_j 是求积权重，$\boldsymbol{x}_j$ 是线性系统

$$F(z_j)\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{f}, \quad j = 1, \ldots, N_\omega, \tag{13}$$

的解，其中 z_j 是求积点。定义指示器 I_Θ 为

$$I_\Theta = \frac{1}{\sqrt{N_\omega}}\left|\frac{P\boldsymbol{f}|_{N_\omega}}{P\boldsymbol{f}|_{N_\omega/2}}\right|, \tag{14}$$

其中 $P\boldsymbol{f}|_{N_\omega/2}$ 是使用 $N_\omega/2$ 个求积点 $\{z_2, z_4, \ldots, z_{N_\omega}\}$ 对 $P\boldsymbol{f}$ 的近似。如果在 Θ 和 $I_\Theta \approx e^{-CN_\omega/2}(\ll 1)$ 中存在特征值，则期望 $I_\Theta \approx 1$，否则对于某个常数 C。

令 $N_\omega = 32$ 为求积点的数量，$tol_{ind} = 0.1$ 为指标的阈值，tol_{eps} 为特征值的精度。一种并行多步谱指标

法来计算 Θ 中的所有特征值如下。

- 给定一系列圆盘 Θ_i, 其中心为 θ_i, 半径为 r, 覆盖 Θ。

1. 计算特征值在 Θ

   1.a. $L = \text{ceil}(\log_2(r/tol_{eps}))$.

   1.b. 对于 $l = 1, \ldots, L$,

   - 并行计算所有 l 层区域的指标。
   - 将指标大于 tol_{ind} 的区域均匀划分为更小的区域。

   1.c. 使用区域的中心作为近似的特征值 k_i。

2. 并行计算 $F(k_i)$ 的最小特征值对应的特征向量。

在第一步中，我们用子区域 $\{\Theta_i\}_{i=1}^I$ 覆盖 Θ 并计算 I_{Θ_i} 以确定 Θ_i 是否包含特征值。如果 $I_{\Theta_i} > tol_{ind}$，则将 Θ_i 划分为更小的区域，并保存这些区域供下一级别的调查使用。该过程继续进行，直到区域大小小于精度 tol_{eps}。然后，这些小区域的中心就是近似的特征值。

在第 2 步中，近似特征值 k 被重新代入 $F(\cdot)$ 并计算与 $F(k)$ 的最小特征值相关的特征向量。更多详情和 Matlab 代码，请参见 [3]。

5. 数值例子

本节提供了各种示例以展示所提出方法的有效性。生成了一个正则网格 $\mathcal{T}_{h_1}$，其网格大小为 $h_1 \approx 0.05$，用于 Ω。然后我们均匀地细化 $\mathcal{T}_{h_1}$ 以获得 $\mathcal{T}_{h_i}, i = 2, \ldots, 5$。线性拉格朗日元素用于计算所有示例中的共振，对于 V_h，在

$$\Theta := \{a + bi \in \mathbb{C} : a \in (-4, 4), b \in (-4, -0.5)\}.$$

中相对误差和收敛阶分别定义为

$$E_j = \frac{|k^j - k^{j+1}|}{|k^{j+1}|}, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

和

$$\log_2\left(\frac{E_j}{E_{j+1}}\right), \quad j = 1, 2, 3.$$

我们取截断 DtN 映射中的 $N = 20$ 项 $T^N(k)$。数值实验表明，这种选择不会显著影响 Θ 中共振的精度，这些共振在范数上相对较小。如果需要更多和/或更大的共振，则确实希望增加 N，同时还需要更精细的网格。

表 I. 两个计算出的共振及其收敛阶（示例 1）。

	k_1	Ord	k_2	Ord
h_1	$-0.835177 - 1.334674i$		$0.588093 - 2.144649i$	
h_2	$-0.843659 - 1.337073i$		$0.653423 - 2.278433i$	
h_3	$-0.845785 - 1.337550i$	2.01	$0.685785 - 2.322488i$	1.47
h_4	$-0.846329 - 1.337659i$	1.97	$0.695996 - 2.334152i$	1.82
h_5	$-0.846466 - 1.337685i$	1.99	$0.698717 - 2.337097i$	1.95

表 II. 两个计算出的共振及其收敛阶（示例 2）。

	k_1	Ord	k_2	Ord
h_1	$-0.835233 - 1.357152i$		$0.589230 - 2.147664i$	
h_2	$-0.844288 - 1.360395i$		$0.653609 - 2.281471i$	
h_3	$-0.846672 - 1.361085i$	1.96	$0.685518 - 2.325891i$	1.47
h_4	$-0.847280 - 1.361248i$	1.98	$0.695591 - 2.337740i$	1.82
h_5	$-0.847433 - 1.361288i$	1.99	$0.698266 - 2.340681i$	1.97

示例 1. 我们首先检查当 D 是单位圆盘且讨论了 $V(x) = 2$ 的情况。使用 $\mathcal{T}_{h_5}$ 在 Θ 中计算的共振如图 2 所示。这些值与图 1一致。

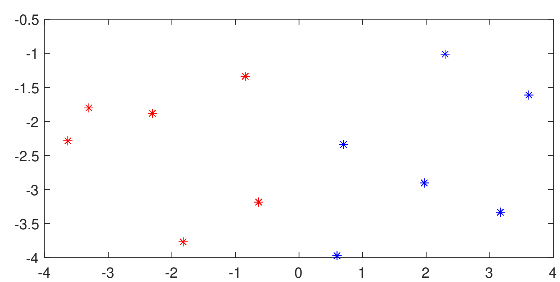

图 2. 计算的共振值为 $(r_0 = 1, V(x) = 2)$。

在表 I中，列出了使用不同网格计算的两个共振（具有较小绝对值）。它们的收敛阶数大约为 2，这是对于线性拉格朗日元所期望的结果。

示例 2. 令 $D := \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1/2 < |x| < 1\}$ 和 $V(x) = 2$ 在 D 上。在表 II中，我们展示了两个计算出的共振及其收敛阶数。得到了二阶收敛。图 3（第一幅图）展示了使用 $\mathcal{T}_{h_5}$ 时在 Θ 中的共振。

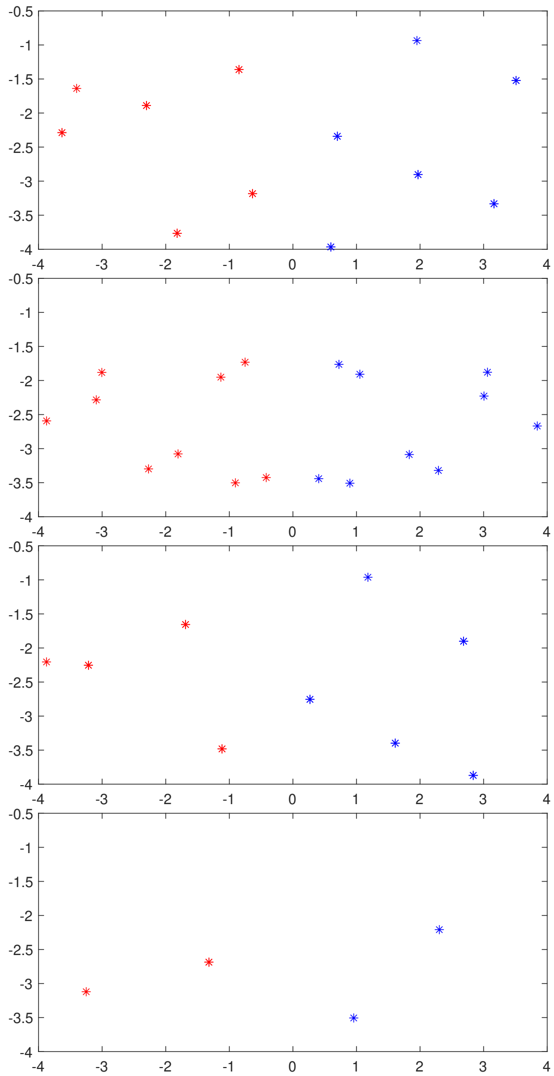

图 3. 计算的共振在 Θ 中。第一：示例 2。第二：示例 3。第三：示例 4。第四：示例 5。

示例 3. 令 D 为单位圆盘和

$$V(x)=\begin{cases}2, & x=(r\cos\theta,r\sin\theta),0\le r\le 1,\theta\in(0,\pi/2),\\ -1, & x=(r\cos\theta,r\sin\theta),0\le r\le 1,\theta\in(\pi/2,\pi),\\ 1, & x=(r\cos\theta,r\sin\theta),0\le r\le 1,\theta\in(\pi,3\pi/2),\\ -2, & x=(r\cos\theta,r\sin\theta),0\le r\le 1,\theta\in(3\pi/2,2\pi).\end{cases}$$

在表 III中，我们展示了两个计算出的共振及其收敛阶。获得了二阶收敛。使用 $\mathcal{T}_{h_5}$ 在 Θ 中的共振显示在图 3（第二张图片）中。

示例 4. 令 D 为单位圆盘并且

$$V(x)=\exp\left(\frac{1}{|x|^2-2}\right)+i\exp\left(\frac{1}{|x|^2-4}\right),\quad |x|<1.$$

在表 IV中，我们展示了两个计算出的共振及其收敛阶

表 III. 两个计算出的共振及其收敛阶（示例 3）。

	k_1	Ord	k_2	Ord
h_1	$-0.734978-1.722162i$		$0.701145-1.799165i$	
h_2	$-0.748316-1.729371i$		$0.721810-1.773786i$	
h_3	$-0.750893-1.730783i$	2.37	$0.723549-1.765834i$	2.00
h_4	$-0.751487-1.731123i$	2.10	$0.723781-1.763807i$	1.99
h_5	$-0.751611-1.731209i$	2.18	$0.723820-1.763287i$	1.98

数。获得了二阶收敛。使用 $\mathcal{T}_{h_5}$ 在 Θ 中的共振显示在图 3（第三幅图片）。

表 IV. 两个计算出的共振及其收敛阶（示例 4）。

	k_1	Ord	k_2	Ord
h_1	$1.175540-0.975004i$		$-1.772287-1.632259i$	
h_2	$1.179448-0.964531i$		$-1.709829-1.652785i$	
h_3	$1.179538-0.962084i$	2.19	$-1.693616-1.654859i$	2.00
h_4	$1.179767-0.961407i$	1.78	$-1.689543-1.655194i$	2.00
h_5	$1.179824-0.961238i$	2.00	$-1.688522-1.655267i$	2.00

示例 5。令 D 为四个正方形 $D_1=(0.1,0.6)\times(0.1,0.6)$,$D_2=(-0.6,-0.1)\times(0.1,0.6)$,$D_3=(-0.6,-0.1)\times(-0.6,-0.1)$ 和 $D_4=(0.1,0.6)\times(-0.6,-0.1)$ 的并集。势函数 $V(x)=2$ 在 D 上。在表 V中，我们展示了两个计算出的共振及其收敛阶数。获得了二阶收敛。使用 $\mathcal{T}_{h_5}$ 在 Θ 中的共振如图 3所示（第四张图片）。

表 V. 两个计算出的共振及其收敛阶（示例 5）。

	k_1	Ord	k_2	Ord
h_1	$-1.222912-2.719221i$		$0.768960-3.213702i$	
h_2	$-1.300488-2.695611i$		$0.880949-3.423462i$	
h_3	$-1.317844-2.685624i$	2.02	$0.947351-3.494427i$	1.32
h_4	$-1.321996-2.682930i$	2.02	$0.969666-3.512228i$	1.78
h_5	$-1.323022-2.682245i$	2.00	$0.975692-3.516580i$	1.94

[1] M. Zworski, *Resonances in physics and geometry.* Notices Amer. Math. Soc. 46 (1999), no. 3, 319-328.

[2] Y. Xi, B. Gong, and J. Sun, *Analysis of a finite element DtN method for scattering resonances of sound hard obstacles.* arXiv:2404.09300, 2024.

[3] Y. Xi and J. Sun, *Parallel multi-step spectral indicator method for nonlinear eigenvalue problems.* arXiv:2312.13117, 2023.

[4] Ph. Briet, J.M. Combes, and P. Duclos, *On the location of resonances for Schrödinger operators in the semiclassical limit. I. Resonances free domains.* J. Math. Anal. Appl. 126 (1987), no. 1, 90-99.

[5] F. Binkowski, F. Betz, R. Colom, P. Genevet, and S. Burger, *Poles and zeros in non-Hermitian systems: Application to photonics.* Phys. Rev. B 109 (2024), 045414.

[6] J. L. Jaramillo, R. P. Macedo, and L. A. Sheikh, *Gravitational wave signatures of black hole quasinormal mode instability.* Phys. Rev. Lett. 128 (2022), 211102.

[7] G. Hsiao, N. Nigam, J. Pasciak and L. Xu, *Error analysis of the DtN-FEM for the scattering problem in acoustics via Fourier analysis.* J. Comput. Appl. Math. 235 (2011), no. 17, 4949-4965.

[8] S. Dyatlov and M. Zworski, Mathematical theory of scattering resonances. American Mathematical Society, Providence, RI, 2019.

[9] D. Bindel and M. Zworski, Theory and computation of resonances in 1D scattering. www.cs.cornell.edu/ bindel/cims/resonant1d/theo2.html, 2006.

[10] J. Ben-Artzi, M. Marletta and F. Rösler, *Computing scattering resonances.* J. Eur. Math. Soc. 25 (2023), no. 9, 3633-3663.

[11] O. Karma, *Approximation in eigenvalue problems for holomorphic Fredholm operator functions.* I, Numer. Funct. Anal. Optim. 17 (1996), no. 3-4, 365-387.

[12] J. Maäkitalo, M. Kauranen, and S. Suuriniemi, *Modes and resonances of plasmonic scatterers.* Phys. Rev. B 89 (2014), 165429.

[13] J. Sun and A. Zhou, Finite element methods for eigenvalue problems. CRC Press, Boca Raton, FL, 2017.

[14] Y. Xi, J. Lin and J. Sun. *A finite element contour integral method for computing the resonances of metallic grating structures with subwavelength holes.* Comput. Math. Appl. 170 (2024), 161-171.

[15] P. Li, X. Yao, and Y. Zhao, *The scattering resonances for Schrödinger-type operators with unbounded potentials.* SIAM J. Math. Anal. 56 (2024), no. 2, 2149-2170.