

逆磁滞模型在时空有限元法中的包含用于磁拟静态分析

M. GOBRIAL¹, L. DOMENIG², M. REICHEL¹,
M. KALTENBACHER², O. STEINBACH¹

¹*Institute of Applied Mathematics, TU Graz, Austria*

²*Institute of Fundamentals and Theory in Electrical Engineering, TU Graz, Austria*

摘要. 在本文中, 我们讨论了使用简单的实用代数模型来包含磁滞效应的麦克斯韦方程组涡电流近似的数值解。除了更为标准的时间步进方法外, 我们还提出了一种时空有限元法, 该方法同时允许空间和时间上的并行化和自适应性。数值实验确认这两种方法都产生了相同的数值结果。

关键词: 非线性磁拟静态, 有限元, 迭代求解器, 牛顿法, 时空, 磁滞

1. 介绍

对于电动机或变压器等电力机器的电磁行为的数学建模, 我们在低频范围内考虑麦克斯韦方程组的涡流近似, 参见例如, [1, 2, 3],

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = \mathbf{j}_s, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{curl} \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \quad \text{in } D \subset \mathbb{R}^3, \quad (1)$$

带有边界条件 $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ 在 ∂D 上。为了简单起见, 我们考虑一个固定的区域 D , 对于该区域, 我们可以将欧姆定律写为 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$; 对于移动域的情况, 请参阅, 例如 [4]。除了麦克斯韦方程组 (1) 外, 我们还需要一个本构关系 $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{B})$, 该关系在许多情况下是用磁阻率 ν 来描述的, 在存在永磁体的情况下, 则使用永磁化强度 \mathbf{M} , 即

$$\mathbf{H} = \nu(\|\mathbf{B}\|) \mathbf{B} - \mathbf{M}. \quad (2)$$

请注意, ν 可能取决于磁通密度 \mathbf{B} 的大小, 例如对于铁磁材料而言, 请参见例如 [5]。虽然本构定律 (2) 涵盖了广泛的物理相关现象, 但它忽略了迟滞效应的影响。这些效应对准确描述电气设备 (如电动机和变压器) 变得越来越重要。因此, 有必要在数学模型中采用包含迟滞的材料模型, 并通过有限元方法进行数值模拟。对于标准有限元法, 这已经在静态情况下成功实现, 使用磁标势 [6] 以及磁矢量势 [7]。对于瞬态仿真, 也存在一些方法在使用磁矢量位 [8, 9]

的有限元法中考虑磁滞效应。然而，据作者所知，尚不存在将磁滞材料模型纳入时空有限元框架的方法。

由于磁通密度是一个螺线向量场， $\mathbf{B} = \text{curl } \mathbf{A}$ ，我们可以将涡流问题 (1) 重写为其等效的矢量势公式 [3, 10]

$$\sigma \partial_t \mathbf{A} + \text{curl}[\nu \text{curl } \mathbf{A}] = \mathbf{j}_s + \text{curl } \mathbf{M}, \quad (3)$$

其中我们使用了本构定律 (2)。通常，会应用规范技术以确保矢量势 \mathbf{A} 的唯一性，参见例如，[10, 11]。涡电流问题 (3) 的一个常见简化是将其减少到一个二维模型问题，假设计算域的一个维度远大于其他维度，并且几何形状在更大尺度上保持不变，参见 [12]。因此，我们可以在电动机的截面 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上提出涡流问题，在 D 中，电磁量呈现形式

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_1(x_1, x_2, t) \\ H_2(x_1, x_2, t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_1(x_1, x_2, t) \\ M_2(x_1, x_2, t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j_s(x_1, x_2, t) \end{pmatrix}.$$

由此可知， \mathbf{j}_s 通过构造是无散度的，磁通密度 \mathbf{B} 必须与电场强度 \mathbf{H} 具有相同的形状，由于 (2)。使用 $\mathbf{B} = \text{curl } \mathbf{A}$ ，我们进一步得到

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u(x_1, x_2, t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} u(x_1, x_2, t) \\ -\partial_{x_1} u(x_1, x_2, t) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

有了这个，我们可以重写 (3) 对于 $(x, t) \in Q := \Omega \times (0, T)$ ，如下所示：

$$\sigma(x) \partial_t u(x, t) - \text{div}_x [\nu(x, |u|) \nabla_x u(x, t)] = j_s(x, t) - \text{div}_x M^\perp(x, t), \quad (5)$$

其中 $M^\perp = (-M_2, M_1)^\top$ 是磁化强度的垂直方向，而 $T > 0$ 是最终时间。为了完整性，需要设定边界条件 $u = 0$ 在 $\Sigma := \partial\Omega \times (0, T)$ 以及初始条件 $u(0) = 0$ 在 Ω 。尽管这种方法 (5) 对涡流问题而言确实是电动机领域的一种典型近似，但它并未考虑磁滞效应。在本工作中，我们将应用众多法则中的一种，该法则从本构定律 (2) 的角度考虑了磁滞效应。

本工作的其余部分组织如下。在第 2 节中，我们介绍了实用代数模型 (PAM)，这是一个先前分析过的特定向量磁滞模型在 [7, 9, 13] 中。我们将这一构定律纳入麦克斯韦方程组 (1)，并在几何体 D 的截面 Ω 上表述问题，从而推导出基础抛物型演化问题 (8)。第 3 节介绍了两种用于求解所得时间相关的偏微分方程的数值方法。一方面，我们制定了一个经典的时间步进方法 [14]，另一方面，我们描述了一个由 [15] 启发的空间时间有限元方法。两种方法的比较分析在第 4 节中给出，表明结果有很好的一致性。

2. 迟滞模型

本节的目的是将涡流问题 (5) 修改为一个模型，该模型可以考虑磁滞效应。受磁滞影响的物理系统不仅依赖于输入数据，还取决于这些数据的历史 [16]。对于铁等铁磁材料而言，磁滞效应是相当自然的，并应在本构定律中予以考虑。

在这项工作中，我们考虑实用代数模型 (PAM) 作为滞后模型，该模型使用六个实正参数 $p_j \in \mathbb{R}_+, j = 0, \dots, 5$ ，在一个代数表达式中描述滞后现象，参见 [17]。与其他滞后模型相比，PAM 的效率在于它通过一个代数表达式来表述，该表达式考虑了静态和动态效应。调整后的本构关系表示为

$$\mathbf{H} = f(\mathbf{B})\mathbf{B} + g(\partial_t \mathbf{B})\partial_t \mathbf{B} - \mathbf{M}, \quad (6)$$

其中

$$f(\mathbf{B}) = p_0 + p_1 \|\mathbf{B}\|^{2p_2}, \quad g(\partial_t \mathbf{B}) = p_3 + \frac{p_4}{\sqrt{p_5^2 + \|\partial_t \mathbf{B}\|^2}}.$$

第一个表达式 $f(\mathbf{B})$ of (6) 描述了非滞后部分，实际上类似于磁导率 ν ，它反映了由 (2) 描述的 BH 曲线关系。参数 p_0, p_1, p_2 可以被拟合，以便获得与经典方法中 ν 相同的行为。第二个表达式 $g(\partial_t \mathbf{B})$ 一方面通过参数 p_3 描述宏观涡流，另一方面描述了滞后效应，这些效应由 p_4 和 p_5 考虑到，参见 [17]。如前所述， \mathbf{M} 是发生永久磁化的永久磁铁的磁化强度。现在，当使用本构定律 (6) 而不是 (2)，并且再次考虑向量势 $\mathbf{B} = \text{curl } \mathbf{A}$ 时，考虑到磁滞的涡流方程为

$$\sigma \partial_t \mathbf{A} + \text{curl} \left(f(\text{curl}(\mathbf{A})) \text{curl}(\mathbf{A}) + g(\text{curl}(\partial_t \mathbf{A})) \text{curl}(\partial_t \mathbf{A}) \right) = \mathbf{j}_s + \text{curl}(\mathbf{M}). \quad (7)$$

空间二维情况的简化需要相同的假设条件，因此向量势 \mathbf{A} 具有与 (4) 中相同的形式，我们可以将 (7) 重写为

$$\sigma \partial_t u - \text{div}_x [f(|\nabla_x u|) \nabla_x u + g(|\partial_t \nabla_x u|) \partial_t \nabla_x u] = j_s - \text{div}_x M^\perp \quad (8)$$

在 $Q := \Omega \times (0, T)$ 中。除了偏微分方程 (8)，我们还考虑在 $\Sigma := \partial\Omega \times (0, T)$ 上的齐次狄利克雷边界条件 $u = 0$ ，这暗示了感应边界条件 $B \cdot n = 0$ ，以及初始条件 $u(x, 0) = 0$ 对于 $x \in \Omega$ 。

3. 有限元公式

3.1. **时间步进框架.** 当乘以时空相关的偏微分方程 (8) 与一个在 $\partial\Omega$ 上消失的空间测试函数 v , 对 Ω 进行积分, 并应用分部积分法时, 我们得到

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \partial_t u v dx + \int_{\Omega} \left[f(|\nabla_x u|) \nabla_x u + g(|\partial_t \nabla_x u|) \partial_t \nabla_x u \right] \cdot \nabla_x v dx \\ = \int_{\Omega} \left[j_s v + M^\perp \cdot \nabla_x v \right] dx. \end{aligned} \quad (9)$$

令 $S_h^1(\Omega) = \text{span}\{\phi_k\}_{k=1}^{M_\Omega}$ 为标准有限元空间, 该空间由分段线性基函数 ϕ_k 组成, 这些基函数是相对于计算域 Ω 的允许分解定义的, 其中解构为形状规则的三角形有限元 τ_ℓ , 空间网格大小为 $h_x, \ell = 1, \dots, N_\Omega$, 并且在 $\partial\Omega$ 上为零。半离散化的 (9) 等价于一个非线性常微分方程组,

$$[M_h + A_h(\dot{u}_h)]\dot{\underline{u}}(t) + K_h(u_h)\underline{u}(t) = \underline{F}(t), \quad (10)$$

其中质量矩阵和刚度矩阵以及载荷向量的元素由以下给出, 对于 $j, k = 1, \dots, M_\Omega$,

$$\begin{aligned} M_h[j, k] &= \int_{\Omega} \sigma(x) \phi_k(x) \phi_j(x) dx, \\ K_h(u_h)[j, k] &= \int_{\Omega} f(|\nabla_x u_h(x, t)|) \nabla_x \phi_k(x) \cdot \nabla_x \phi_j(x) dx, \\ A_h(\dot{u}_h)[j, k] &= \int_{\Omega} g(|\nabla_x \dot{u}_h(x, t)|) \partial_t \nabla_x \phi_k(x) \cdot \nabla_x \phi_j(x) dx, \\ F_j(t) &= \int_{\Omega} \left[j_s(x, t) \phi_j(x) + M^\perp(x, t) \cdot \nabla_x \phi_j(x) \right] dx. \end{aligned}$$

请注意, $\underline{u}(t) \in \mathbb{R}^{M_\Omega}$ 是数值解的时间依赖系数向量

$$u_h(x, t) = \sum_{k=1}^{M_\Omega} u_k(t) \phi_k(x).$$

为了时间离散化, 我们引入一个时间网格大小 h_t 并定义时间步长 $t_i = ih_i, i = 0, \dots, N_T$ 。在考虑

$$u_h(x, t_i) = \sum_{k=1}^{M_\Omega} u_k(t_i) \phi_k(x) = \sum_{k=1}^{M_\Omega} u_k^i \phi_k(x) = u_h^i(x),$$

并使用向后有限差分格式

$$\dot{u}_h(x, t_i) \simeq \frac{1}{h_t} [u_h(x, t_i) - u_h(x, t_{i-1})] = \frac{1}{h_t} \sum_{k=1}^{M_\Omega} [u_k^i - u_k^{i-1}] \phi_k(x),$$

时, 时间离散化 (10) 导致一系列非线性代数方程组, $i = 1, \dots, N_T$,

$$\frac{1}{h_t} [M_h + A_h([u_h^i - u_h^{i-1}]/h_t)] [\underline{u}^i - \underline{u}^{i-1}] + K_h(u_h^i) \underline{u}^i(t) = \underline{F}(t_i), \quad (11)$$

初始条件为 $\underline{u}^0 = \underline{0}$ 。在每个时间步长 $t_i, i = 1, \dots, N_T$, 通过牛顿法求解非线性系统 (11), 其中我们使用 [9] 中给出的结果来计算所有相关的导数。

3.2. 时空框架. 接下来我们考虑涡流问题 (8) 的时空变分公式。我们现在将瞬态偏微分方程 (8) 与一个在 $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$ 处消失的测试函数 $v(x, t)$ 相乘, 并在时空域 $Q = \Omega \times (0, T)$ 上进行积分。分部积分仅针对空间成分, 最终提供了时空变分公式

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \sigma \partial_t u v \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} f(|\nabla_x u|) \nabla_x u \cdot \nabla_x v \, dx \, dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} g(|\partial_t \nabla_x u|) \partial_t \nabla_x u \cdot \nabla_x v \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} [j_s v + M^\perp \cdot \nabla_x v] \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (12)$$

设 $S_h^1(Q) = \text{span}\{\varphi_k\}_{k=1}^{M_Q}$ 是基于四面体有限元 $q_\ell, \ell = 1, \dots, N_Q$ 的可允许分解的空间时间有限元空间, 这些基函数 φ_k 定义在时空域 Q 上, 并具有网格大小 h , 在初始时刻 $t = 0$ 和侧边界 Σ 处为零。然而, 由于二阶导数出现在弱形式 (12) 中, 我们不能使用 $S_h^1(Q)$ 进行符合的有限元离散化 (12)。相反, 我们使用替换 $p(x, t) := \partial_t u(x, t)$ 重写 (12) 为

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \sigma \partial_t u v \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} f(|\nabla_x u|) \nabla_x u \cdot \nabla_x v \, dx \, dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} g(|\nabla_x p|) \nabla_x p \cdot \nabla_x v \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} [j_s v + M^\perp \cdot \nabla_x v] \, dx \, dt, \end{aligned} \quad (13)$$

以及第二个变分形式

$$\int_0^T \int_{\Omega} p(x, t) q(x, t) \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t u(x, t) q(x, t) \, dx \, dt. \quad (14)$$

由于 $p = \partial_t u$ 仅在 Σ 上有零边界条件, 因此在 $t = 0$ 处没有初始条件。对于 p 的时空有限元近似, 因此我们必须使用扩展的有限元空间 $\tilde{S}_h^1(Q) = \text{span}\{\varphi_k\}_{k=1}^{\tilde{M}_Q}$, 其中额外的基函数 $\varphi_k, k = M_Q + 1, \dots, \tilde{M}_Q$ 与节点 $t = 0$ 相关。系统 (13) 和 (14) 的时空有限元离散化等价于一个非线性代数方程组,

$$\begin{pmatrix} B_h + K_h(u_h) & A_h(p_h) \\ -\tilde{B}_h & M_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{F} \\ \underline{0} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

其中块矩阵的项由下式给出，对于 $k, \ell = 1, \dots, M_Q$ 和 $i, j = 1, \dots, \widetilde{M}_Q$,

$$\begin{aligned} B_h[\ell, k] &= \int_0^T \int_{\Omega} \sigma(x) \partial_t \varphi_k(x, t) \varphi_{\ell}(x, t) dx dt, \\ K_h(u_h)[\ell, k] &= \int_0^T \int_{\Omega} f(|\nabla_x u_h(x, t)|) \nabla_x \varphi_k(x, t) \cdot \varphi_{\ell}(x, t) dx dt, \\ A_h(p_h)[\ell, i] &= \int_0^T \int_{\Omega} g(|\nabla_x p_h|) \nabla_x \varphi_i(x, t) \cdot \nabla_x \varphi_{\ell}(x, t) dx dt, \\ M_h[j, i] &= \int_0^T \int_{\Omega} \varphi_i(x, t) \cdot \varphi_j(x, t) dx dt, \\ \widetilde{B}_h[j, k] &= \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t \varphi_k(x, t) \varphi_j(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

此外，载荷向量的项给定为

$$F_{\ell} = \int_0^T \int_{\Omega} \left[j_s(x, t) \varphi_{\ell}(x, t) + M^{\perp}(x, t) \cdot \nabla_x \varphi_{\ell}(x, t) \right] dx dt, \quad \ell = 1, \dots, M_Q,$$

而 $\underline{u} \in \mathbb{R}^{M_Q}$ 和 $\underline{p} \in \mathbb{R}^{\widetilde{M}_Q}$ 分别是有限元函数 u_h 和 p_h 的系数向量。由于时空质量矩阵 M_h 可逆，我们可以计算 $\underline{p} = M_h^{-1} \widetilde{B}_h \underline{u} \leftrightarrow p_h$ 以得出非线性 Schur 补系统

$$\left[B_h + K_h(u_h) + A_h(p_h) M_h^{-1} \widetilde{B}_h \right] \underline{u} = \underline{F}. \quad (16)$$

。为了求解全局非线性系统 (16)，我们使用带有 Armijo 阻尼策略的精确牛顿法 [18]，其中每个牛顿迭代的线性化系统使用 PETScs 支持的并行直接求解器 MUMPS [19] 求解，该求解器基于有限元库 Netgen/NGSolve 提供的网格分解方法 [20]。

4. 数值结果

在本节中，我们想要比较所提出的方法。虽然时空公式 (16) 需要处理一个三维问题，并且进一步扩展为额外变量 p_h 的系统，时间步进方法只是考虑二维空间问题。然而，时空方法的大系统只需要并行求解一次，而时间步进方法则需要对每个时间步依次解决空间问题。接下来的例子将首先比较这两种方法对于一个学术模型问题的差异。其次，将考虑团队问题 32 [21]，这验证了所提出的滞后问题 (6) 的应用性以及引入的方法在求解包含滞后的涡电流方程时的准确性。

4.1. **简单几何.** 第一个示例考虑一个二维空间域 $\Omega = (0, 1)^2$, 该域由两种不同的材料组成, $\Omega_{cu} = (0, 25, 0.75)^2$ 为铜, 激励 j_s 通过其中, 而 $\Omega_{fe} = \Omega \setminus \overline{\Omega_{cu}}$ 为铁, 在其中获得滞回模型。最终时间给定为 $T = 1.25$ 。图 1 显示了空间域以及用于时空有限元方法的结构化时空网格。此外, 我们使用以下参数,

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{in } \Omega_{cu}, \\ 0.01 & \text{in } \Omega_{fe}, \end{cases} \quad f(|\nabla_x u|) = \begin{cases} \frac{10^7}{4\pi} & \text{in } \Omega_{cu}, \\ p_0 + p_1 |\nabla_x u|^{2p_2} & \text{in } \Omega_{fe}, \end{cases}$$

$$j_s(x, t) = \begin{cases} 2000 \sin(2\pi t) & \text{in } \Omega_{cu}, \\ 0 & \text{in } \Omega_{fe}, \end{cases} \quad g(|\partial_t \nabla_x u|) = \begin{cases} 0 & \text{in } \Omega_{cu}, \\ p_3 + \frac{p_4}{\sqrt{p_5^2 + |\partial_t \nabla_x u|^2}} & \text{in } \Omega_{fe}, \end{cases}$$

其中 $p_0 = 75.6$, $p_1 = 0.0223$, $p_2 = 11.47$, $p_3 = 0.0001$, $p_4 = 65.8$, $p_5 = 1$ 。请注意, 等价性 $g(|\nabla_x p|) = g(|\partial_t \nabla_x u|)$ 在连续层面上成立, 并且 $M^\perp = (0, 0)^\top$ 也成立, 因为没有永久磁铁出现。图 2 可视化了磁通密度 \mathbf{B}_x (在 x 分量中) 以及磁滞曲线, 并表明两种方法产生的结果几乎相同。

4.2. **两相变压器 – TEAM 问题 32.** 我们的第二个示例是由 TEAM 问题 32 [21] 给出的两相变压器, 它展示了在具有两个薄绕组的三肢铁磁芯上的含磁滞的电场模拟, 请参见图 3。二维计算域 Ω 的尺寸与 [21] 相同, 由三种不同的材料组成, 即铁芯 Ω_{fe} 、外部 limbs 的绕组 Ω_{cu} 和空气 Ω_a 。考虑的时间跨度为 $T = 0.1$, 参数是

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{in } \Omega_{cu} \cup \Omega_a, \\ 0 & \text{in } \Omega_{fe}, \end{cases} \quad f(|\nabla_x u|) = \begin{cases} \frac{10^7}{4\pi} & \text{in } \Omega_{cu} \cup \Omega_a \\ p_0 + p_1 |\nabla_x u|^{2p_2} & \text{in } \Omega_{fe}, \end{cases}$$

$$j_s(x, t) = \begin{cases} \tilde{j}(t) & \text{in } \Omega_{cu}, \\ 0 & \text{in } \Omega_{fe} \cup \Omega_a, \end{cases} \quad g(|\partial_t \nabla_x u|) = \begin{cases} 0 & \text{in } \Omega_{cu} \cup \Omega_a \\ p_3 + \frac{p_4}{\sqrt{p_5^2 + |\partial_t \nabla_x u|^2}} & \text{in } \Omega_{fe}, \end{cases}$$

其中 $p_0 = 181, 88232$, $p_1 = 0.267053$, $p_2 = 8.999565$, $p_3 = 0.00001$, $p_4 = 0.0001$, $p_5 = 50$, 电流密度 \tilde{j} 是通过测量的电流值从 [21] 乘以匝数 90, 并除以绕组面积得到的 B 样条插值, 参见。图 5。由于没有永磁体出现, 我们有 $M^\perp = (0, 0)^\top$ 。图 4 描绘了磁通密度 \mathbf{B}_y (在 y 分量中), 这表明两种方法非常一致。它还可可视化了 BH 曲线, 在其中可以观察到迟滞效应, 且两种方法都很好指出了这种行为。

5. 结论

本文中, 我们在低频范围内从麦克斯韦方程组推导出了涡流近似, 并结合了一个特定的滞后模型进行了电磁场数值模拟。非线性滞后模型 PAM 由一个

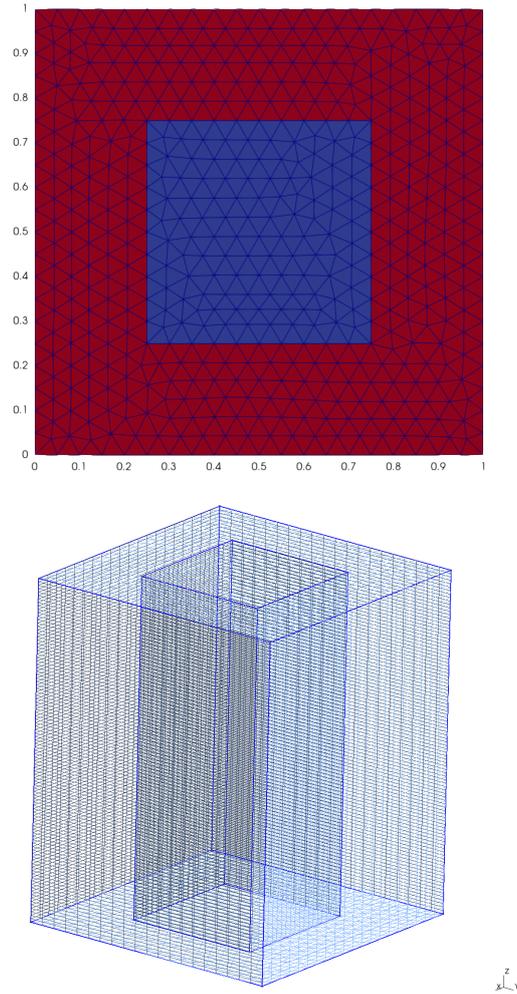


图 1. 左: 由两种材料 Ω_{cu} (蓝色) 和 Ω_{fe} (红色) 组成的区域 $\Omega = (0,1)^2$ 。右: 时空网格 $Q = \Omega \times (0,T)$, 在时间方向上有 100 个时间片, 53.530 个节点和 293.400 个单元。

单一的代数表达式表示, 使其成为捕捉滞后效应的有效选择。为了解决由此产生的非线性时变偏微分方程, 我们采用了两种不同的数值方法。第一种是经典半离散化方法, 在该方法中使用有限元法进行空间离散化, 随后采用隐式时间步进方案。第二种方法是时空有限元法, 这种方法需要求解鞍点系统, 但允许一次性解决整个问题, 从而能够同时在空间和时间方向上实现并行计算。最后, 我们比较了这两种方法, 并通过获得相似的模拟结果证明了滞后模型的应用性。然而, 时空有限元方法的主要优势在于能够在空间和时间上同步使用自适应算法来局部解析 u , 从而减少达到规定精度所需的自由度总数。对这种自适应时空有限元方法进行更详细的数值分析将在未来的研究中进行。

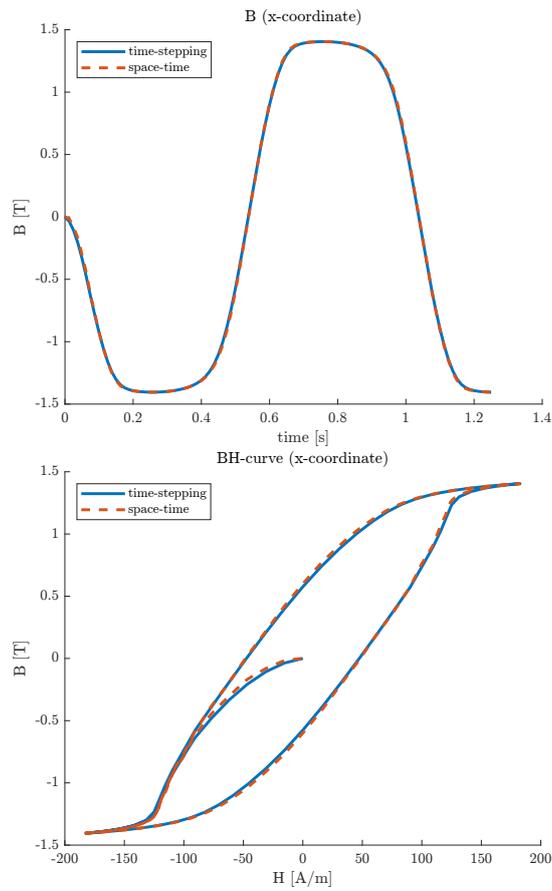


图 2. 左：磁通密度 B_x 随时间的变化。右：表示磁滞效应的 BH 曲线。

致谢. 这项工作得到了联合德国研究基金会/奥地利科学基金协作研究中心 CREATOR（德国研究基金会：项目编号 492661287/TRR 361；奥地利科学基金：10.55776/F90）在达姆施塔特工业大学、格拉茨工业大学和林茨约翰开普夫大学的支持。

REFERENCES

- [1] A. Alonso Rodríguez and A. Valli, *Eddy Current Approximation of Maxwell Equations: Theory, Algorithms and Applications*. Milano: Springer, 2010.
- [2] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1999.
- [3] P. Monk, *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*. Oxford Academic, 2003.
- [4] P. Gangl, M. Gobrial, and O. Steinbach, "A space-time finite element method for the eddy current approximation of rotating electric machines," *Comput. Methods Appl. Math.*, vol. 25, pp. 441–457, 2025.
- [5] G. Meunier, *The Finite Element Method for Electromagnetic Modeling*. Wiley, 2008.

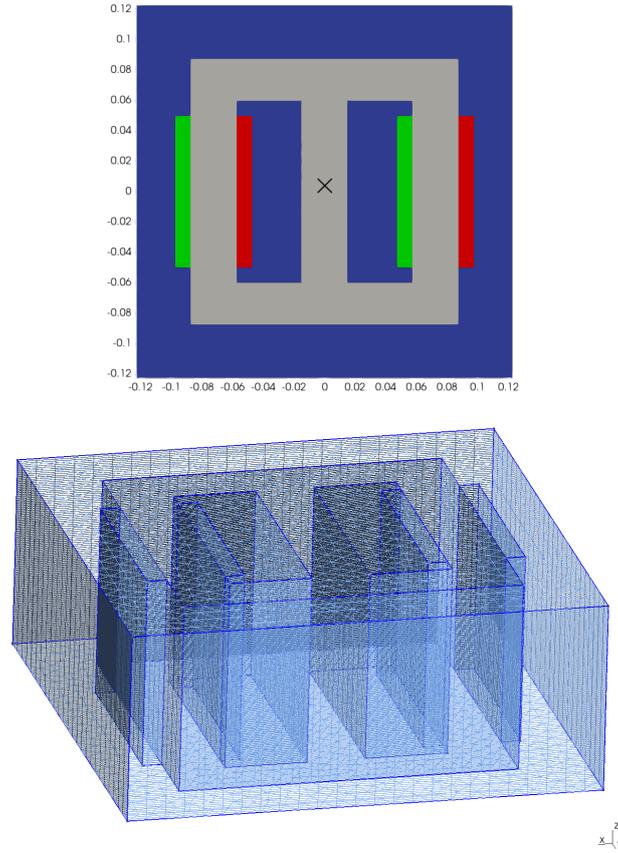


图 3. 左侧：变压器的域 Ω ，由铁芯 Ω_{fe} （灰色）、绕组 Ω_{cu} （绿色和红色）和空气 Ω_a （蓝色）组成。右侧：时空网格 $Q = \Omega \times (0, T)$ ，在时间方向上有 100 个时间片，91,405 个节点和 206,856 个元素。

- [6] L. D. Domenig, K. Roppert, and M. Kaltenbacher, “Incorporation of a 3-d energy-based vector hysteresis model into the finite element method using a reduced scalar potential formulation,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 60, no. 6, pp. 1–8, 2024.
- [7] X. Xiao, F. Müller, M. M. Nell, and K. Hameyer, “Modeling anisotropic magnetic hysteresis properties with vector stop model by using finite element method,” *COMPEL*, vol. 41, no. 2, pp. 752–763, 2022.
- [8] K. Jacques, *Energy-Based Magnetic Hysteresis Models - Theoretical Development and Finite Element Formulations*. PhD thesis, Université de Liège, 2018.
- [9] F. Purnode, F. Henrotte, G. Louppe, and C. Geuzaine, “Neural network-based simulation of fields and losses in electrical machines with ferromagnetic laminated cores,” *Int. J. Numer. Model.*, vol. 37, no. 2, p. e3226, 2024.
- [10] M. Kaltenbacher, *Numerical Simulation of Mechatronic Sensors and Actuators*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2015.
- [11] C. Hafner, *Numerische Berechnung elektromagnetischer Felder*. Berlin: Springer, 1987.

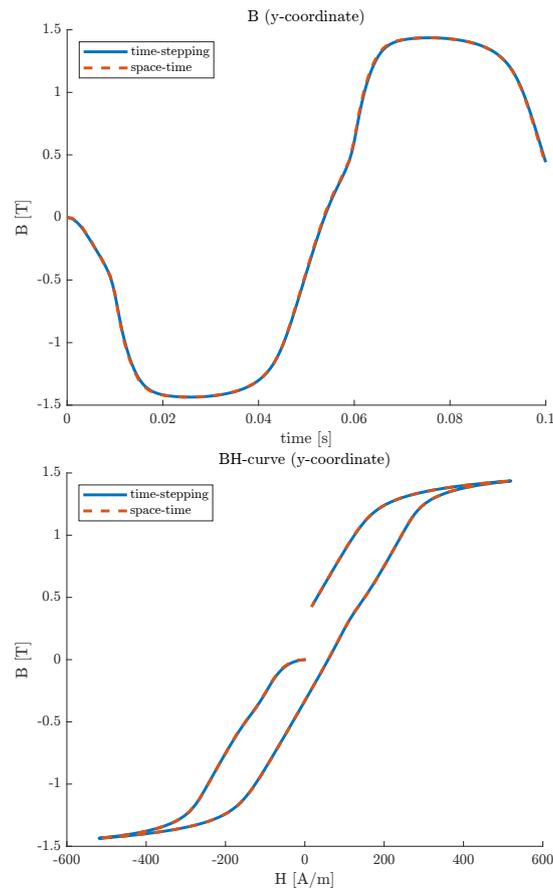


图 4. 左：磁通密度 B_x 随时间的变化。右：表示滞回效应的 BH 曲线。

- [12] S. Clain, J. Rappaz, M. Swierkosz, and R. Touzani, “Numerical modeling of induction heating for two-dimensional geometries,” *Math. Models Methods Appl. Sci.*, vol. 3, no. 6, pp. 805–822, 1993.
- [13] F. Henrotte, S. Steentjes, K. Hameyer, and C. Geuzaine, “Pragmatic two-step homogenisation technique for ferromagnetic laminated cores,” *IET Sci. Meas. Technol.*, vol. 9, no. 2, pp. 152–159, 2015.
- [14] V. Thomée, *Galerkin finite element methods for parabolic problems*, vol. 25 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Berlin: Springer, 2006.
- [15] O. Steinbach, “Space-time finite element methods for parabolic problems,” *Comput. Methods Appl. Math.*, vol. 15, no. 4, pp. 551–566, 2015.
- [16] M. Brokate and J. Sprekels, *Hysteresis and Phase Transitions*. Applied Mathematical Sciences, New York: Springer, 1996.
- [17] X. Xiao, F. Müller, G. Bavendiek, and K. Hameyer, “Analysis of vector hysteresis models in comparison to anhysteretic magnetization model,” *Eur. Phys. J. Appl. Phys.*, vol. 91, no. 2, p. 20901, 2020.

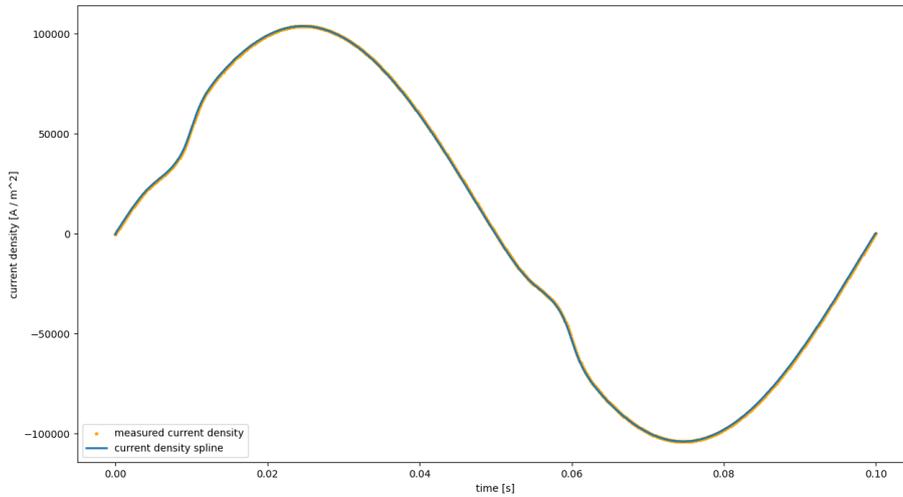


图 5. 当前密度样条曲线 \tilde{j} (蓝色) 根据测试案例 1A 的测量值 (橙色) 从 [21] 进行插值。

- [18] P. Deuffhard, *Newton Methods for Nonlinear Problems: Affine Invariance and Adaptive Algorithms*. Springer Series in Computational Mathematics, Springer, 2011.
- [19] L. D. Dalcin, R. R. Paz, P. A. Kler, and A. Cosimo, "Parallel distributed computing using Python," *Adv. Water Resour.*, vol. 34, no. 9, pp. 1124–1139, 2011.
- [20] J. Schöberl, "NETGEN: An advancing front 2d/3d-mesh generator based on abstract rules," *Comput. Visual. Sci.*, vol. 1, pp. 41–52, 1997.
- [21] O. Bottauscio, M. Chiampi, C. Ragusa, L. Rege, and M. Repetto, "A test case for validation of magnetic field analysis with vector hysteresis," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 38, pp. 893–896, 2002.