arxiv:2504.13566v1 中译本

含幂零元的一些环上的上同调消没定理

TONY J. PUTHENPURAKAL

摘要. 在这篇论文中，我们研究了一些具有幂零元素的特定分级环的局部上同调模的一些意外消失定理。

(1) 设 $(A, \mathfrak{m})$ 是一个维度为 d 的完备诺特局部环，并设 P 是一个素理想使得 $G_P(A) = \bigoplus_{n\geq 0} P^n/P^{n+1}$ 成为一个整域。固定 $r \geq 1$。如果 J 是具有 $\dim G_{P^r}(A)/J > 0$ 的 $G_{P^r}(A)$ 的齐次理想，则局部上同调模为 $H^d_J(G_{P^r}(A)) = 0$。

(2) 设 $A = K[[X_1, \ldots, X_d]]$ 并设 $\mathfrak{m} = (X_1, \ldots, X_d)$。假设 K 是可分闭的。固定 $r \geq 1$。设 J 是 $G_{\mathfrak{m}^r}(A)$ 的一个齐次理想。我们证明局部上同调模 $H^j_J(G_{\mathfrak{m}^r}(A)) = 0$ 对于 $j \geq d-1$ 当且仅当 $\dim G_{\mathfrak{m}^r}(A)/J \geq 2$ 和 $\operatorname{Proj} G_{\mathfrak{m}^r}(A)/J$ 是连通的。

1. 介绍

局部上同调是代数几何和交换代数中的一个基本工具。因此，消失结果非常有用。设 $(A, \mathfrak{m})$ 是诺特局部环或标准分级诺特环，并且 $\mathfrak{m}$ 是其最大的齐次理想与 $\dim A = d$。令 $I \subseteq \mathfrak{m}$ 是一个理想（如果 A 是分级的，则它是齐次的）。第一个消没结果是 $H^i_I(A) = 0$ 对所有 $i > d$ 成立；参见 [1, 6.1.2]。也许下一个结果是著名的 Hartshorne-Lichtenbaum 定理，该定理表明如果 A 是一个完备局部域（在分级情况下 A_0 是一个完备域且 A 是一个分级域），那么 $H^d_I(A) = 0$ 当且仅当 $\dim A/I > 0$；参见 [3, 14.1]（对于分级情况请参见 [1, 14.1.16]）。有一个版本的结果适用于所有诺特局部环，但它的表述较为复杂；参见 [3, 14.6]。下一个情况是当 A 是包含一个可分闭残差域的完备正则局部环，则对于 $j \geq d-1$ 有 $H^j_I(A) = 0$ 当且仅当 $\dim A/I \geq 2$ 并且 $\operatorname{Spec}(A) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ 连通，参见 [3, 14.7]。类似的结果在分级情况下也成立，当 $A = k[X_1, \ldots, X_d]$，参见 [2, 7.5]。

通常局部上同调在基础环是良态时表现良好。在这篇论文中，我们证明了含有幂零元的某些环上的消没定理。我们强调这些结果完全出乎意料。

我们首先证明

定理 1.1. 令 $(A, \mathfrak{m})$ 为维数为 d 的完备诺特局部环，并令 P 为一个素理想使得 $G_P(A) = \bigoplus_{n\geq 0} P^n/P^{n+1}$ 是一个整域。固定 $r \geq 1$。如果 J 是一个具有

Date: 2025 年 4 月 21 日.

2020 *Mathematics Subject Classification.* Primary 13D45, 13A30; Secondary 14B15.

Key words and phrases. 局部上同调，分级局部上同调，关联分级环，里斯代数，单态模，F-有限 F-模.

$\dim G_{P^r}(A)/J > 0$ 的 $G_{P^r}(A)$ 的齐次理想，则局部上同调模为 $H^d_J(G_{P^r}(A)) = 0$。

接下来我们展示

定理 1.2. 令 $(A, \mathfrak{m})$ 是一个正则局部环，并且 $k = A/\mathfrak{m}$ 可分闭合。固定 $r \geq 1$。令 J 是 $G_{\mathfrak{m}^r}(A)$ 的一个齐次理想。如果 $\dim G_{\mathfrak{m}^r}(A)/J \geq 2$ 和 $\operatorname{Proj} G_{\mathfrak{m}^r}(A)/J$ 是连通的，则局部上同调模 $H^j_J(G_{\mathfrak{m}^r}(A)) = 0$ 对于 $j \geq d-1$。

备注 1.3. 请注意，在定理 1.2中，我们不假设 A 是等特征的。另外请注意，对于 $r \geq 2$，环 $G_{\mathfrak{m}^r}(A)$ 可能不包含域。

研究定理 1.2的逆命题或许是值得的。我们证明：

定理 1.4. 令 $(A, \mathfrak{m})$ 为一个等特征的正则局部环，且 $k = A/\mathfrak{m}$ 可分闭。固定 $r \geq 1$。令 J 为 $G_{\mathfrak{m}^r}(A)$ 的一个齐次理想。如果局部上同调模 $H^j_J(G_{\mathfrak{m}^r}(A)) = 0$ 对于 $j \geq d-1$，那么 $\dim G_{\mathfrak{m}^r}(A)/J \geq 2$ 和 $\operatorname{Proj} G_{\mathfrak{m}^r}(A)/J$ 是连通的。

我们现在简要描述这篇论文的内容。在第二部分中，我们讨论了一个所需的构造。在第三部分中，我们讨论一个无限生成的 $\mathcal{R} = A[It]$-模 $W^I(A)$，在我们的证明中起着关键作用。在第四部分中，我们证明了定理 1.1。在第五部分中，我们证明了定理 1.2。{在下一节中，我们将讨论一些需要的初步结果以证明定理 1.4。} 在第七节中我们讨论了 F-模或 D-模在 $W^{\mathfrak{m}}(A)$ 上的结构。在第八节中我们给出了定理 1.4的证明。

2. 一个构造

在本节中，A 是一个诺特局部环，I 是 A 的一个理想。设 $\mathcal{R}(I) = A[It]$ 是 I 的里斯代数。令 $G_I(A) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}$ 为关联的分次环 I。固定 $r \geq 1$。在本节中，我们讨论一种构造方法，将 $G_{I^r}(A)$ 中的齐次理想与 $G_I(A)$ 中的一个特定理想联系起来。策略是使用里斯代数。我们注意到在 $G_I(A)$ 中的理想对应于包含 It^0 的 $\mathcal{R}(I)$ 的理想。在整个 $^{<r>}$ 中，表示的是 r^{th}-Veronese 函子。我们注意到关联的梯度环对于 Veronese 函子的行为不佳。然而，Rees 代数则不然。我们有 $\mathcal{R}(I)^{<r>} = \mathcal{R}(I^r)$。

构造 2.1. 令 Q 是 $G_{I^r}(A)$ 中的一个齐次理想。令 $\mathcal{R}(I^r) = A[I^r u]$。令 $\eta \colon \mathcal{R}(I^r) \to G_{I^r}(A)$ 是自然映射。令 $K = \eta^{-1}(Q)$。设 $K = (\mathfrak{q}u^0, k_1 u^{a_1}, k_2 u^{a_2}, \cdots, k_s u^{a_s})$。这里 $k_i \in I^{a_i r}$（与 $a_i \geq 1$ 一起）和 $\mathfrak{q}$ 是包含 I^r 的 A 的理想。设 $a = lcm\{a_i\}_{1\leq i\leq s}$。考虑以下理想 $\mathcal{R}(I^r)$

$$\widetilde{K} = (\mathfrak{q}u^0, c_1 u^a, c_2 u^a, \cdots, c_s u^a) \quad \text{where } c_i = k_i^{a/a_i} \text{ for } i = 1, \ldots, s.$$

考虑以下理想 $\mathcal{R}(I) = A[It]$；

$$K^\sharp = (\mathfrak{q} + I, c_1 t^{ar}, c_2 t^{ar}, \cdots, a_s t^{a_s r}).$$

我们的构造具有以下性质:

命题 2.2. （在 *2.1*的假设下）。我们有
(1) $\sqrt{\widetilde{K}} = \sqrt{K}$
(2) $(K^\sharp)^{<r>} = (\mathfrak{q} + I, c_1 u^a, c_2 u^a, \cdots, c_s u^a)$.
(3) $\sqrt{(K^\sharp)^{<r>}} = \sqrt{\widetilde{K}} = \sqrt{K}$.
(4) $\dim A[It]/K^\sharp = \dim A[I^r u]/K$.
(5) $\operatorname{Proj} A[It]/K^\sharp$ 是连通的当且仅当 $\operatorname{Proj} A[I^r u]/K$ 是连通的。
(6) $K^\sharp$ 包含 It^0。设 $\xi\colon A[It] \to G_I(A)$ 是自然映射。那么 $A[It]/K^\sharp = G_I(A)/\xi(K^\sharp)$。

证明. 这是清楚的。

(2) 设定 $J = (\mathfrak{q} + I, c_1 u^a, c_2 u^a, \cdots, c_s u^a)$。显然 $J \subseteq (K^\sharp)^{<r>}$。令 $\xi \in (K^\sharp)^{<r>}_n = K^\sharp_{nr}$。我们有

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i t^0 + \sum_{j=1}^{l} \beta_j c_j t^{ar},$$

其中 $w \in q + I$ 和 $\beta_j \in I^{nr-ar}$。注意 $\beta_j \in I^{r(n-a)}$。由此得出

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i u^0 + \sum_{j=1}^{l} \beta_j c_j u^a \in J.$$

结果如下。

(3) 我们注意到 $\sqrt{\mathfrak{q} + I} = \sqrt{\mathfrak{q}}$ 作为 $\mathfrak{q} \supseteq I^r$。由此得出 $\sqrt{(K^\sharp)^{<r>}} = \sqrt{\widetilde{K}}$。第二个等式由 (1) 得出。

(4), (5)。令 $S = A[It]/K^\sharp$。它们 $S^{<r>} = A[I^r u]/(K^\sharp)^{<r>}$。我们注意到 $S^{<r>} \subseteq S$ 是一个有限整扩张。由此得出

$$\dim A[It]/K^\sharp = \dim A[I^r u]/(K^\sharp)^{<r>} = \dim A[I^r u]/K.$$

这里第二个等式由 (3) 得出。

我们也有 $\operatorname{Proj} S \cong \operatorname{Proj} S^{<r>}$。我们还有通过 (3) 得到作为拓扑空间（但不是概形）

$$\operatorname{Proj} A[I^r u]/(K^\sharp)^{<r>} = \operatorname{Proj} A[I^r u]/K.$$

结果随之而来。

这是明显的。 $\square$

3. 刘斯代数上的模

在本节中，我们回顾了里斯代数上一个非有限生成模的构造，这在关联分级环的研究中已被证明是有用的。

3.1. 设 $(A,\mathfrak{m})$ 是诺特局部环, 并设 I 是 A 的理想。设 $\mathcal{R}(I) = A[It]$ 是 I 的里斯代数。注意 $\mathcal{R}$ 是 $A[t]$ 的子环。设 $W^I(A) = \bigoplus_{n\geq 1} A/I^n = A[t]/\mathcal{R}(I)$。那么 $W^I(A)$ 是一个 $\mathcal{R}(I)$-模。注意它是作为 $\mathcal{R}(I)$-模有限生成的不。令 $\mathcal{S}(I) = A[It,t^{-1}]$ 为 I 的扩展里斯代数。注意它是 $A[t,t^{-1}]$ 的子环，且 $W^I(A) = A[t,t^{-1}]/\mathcal{S}(I)$ 也是一个 $\mathcal{S}(I)$-模。进一步地，$\mathcal{R}(I)$-模结构通过沿包含的标量限制作用于 $W^I(A)$ 上。$\mathcal{R}(I) \to \mathcal{S}(I)$

备注 3.2. 在 [7] 中我们定义了 $L^I(A) = \bigoplus_{n\geq 0} A/I^{n+1} = W^I(A)(1)$。然而在这篇论文中我们处理的是 $W^I(A)$。关于这一点的原因，请参见 7.4。

3.3. 我们有精确序列

$$0 \to I^n/I^{n+1} \to A/I^{n+1} \to A/I^n \to 0$$

对于所有 $n \geq 0$。因此，我们有一个 $\mathcal{S}(I)$-模的精确序列（从而也是 $\mathcal{R}(I)$-模的精确序列）。

$$0 \to G_I(A) \to W^I(A)(1) \xrightarrow{t^{-1}} W^I(A) \to 0. \tag{†}$$

3.4. $W^I(A)$ 在 Veronese 函子下表现良好。我们有一个 $\mathcal{R}(I^r) = \mathcal{R}(I)^{<r>}$-模的等式

$$(W^I(A))^{<r>} = \bigoplus_{n\geq 1} A/I^{nr} = W^{I^r}(A).$$

4. 定理的证明 1.1

在本节中，我们将给出

定理的证明 1.1. 令 J 为 $G_{P^r}(A)$ 的一个理想，具有 $\dim G_{P^r}(A)/J > 0$。令 $\eta\colon A[P^r u] \to G_{P^r}(A)$ 为自然映射。令 $K = \eta^{-1}(J)$。我们在 2.1中进行构造。由 2.2 $\dim A[Pt]/K^\sharp > 0$ 可知。设 $\xi\colon A[Pt] \to G_P(A)$ 是自然映射。定义 $I = \xi(K^\sharp)$。那么根据 2.2；$A[Pt]/K^\sharp = G_P(A)/I$ 成立。所以我们有 $H^d_I(G_P(A)) = 0$。精确序列 (†) 引入上同调中的精确序列

$$\cdots \to H^i_I(G_P(A)) \to H^i_{K^\sharp}(W^P(A))(1) \xrightarrow{t^{-1}} H^i_{K^\sharp}(W^P(A)) \to H^{i+1}_I(G_P(A)) \to \cdots.$$

作为 $H^d_I(G_P(A)) = 0$ 我们得到映射

(1) $H^{d-1}_{K^\sharp}(W^P(A))_{n+1} \xrightarrow{t^{-1}} H^{d-1}_{K^\sharp}(W^P(A))_n$ 是满射对于所有 $n \in \mathbb{Z}$; 并且

(2) $H^d_{K^\sharp}(W^P(A))_{n+1} \xrightarrow{t^{-1}} H^d_{K^\sharp}(W^P(A))_n$ 是单射的对于所有 $n \in \mathbb{Z}$。
由于局部上同调与 Veronese 函子很好地配合，我们有对于所有 $i \geq 0$

$$H^i_{K^\sharp}(W^P_A)^{<r>} = H^i_{(K^\sharp)^{<r>}}(W^{P^r}_A).$$

所以我们有

$$H^i_{(K^\sharp)^{<r>}}(W^{P^r}_A)_n = H^i_{K^\sharp}(W^P_A)_{nr}.$$

还请注意，

$$H^i_{(K^\sharp)^{<r>}}(W^{P^r}_A)(1)_n = H^i_{(K^\sharp)^{<r>}}(W^{P^r}_A)_{n+1} = H^i_{K^\sharp}(W^P_A)_{(n+1)r}.$$

我们有一个满射

$$H^{d-1}_{K^\sharp}(W^P(A))_{nr+r} \xrightarrow{t^{-r}} H^{d-1}_{K^\sharp}(W^P(A))_{nr}, \quad \text{for all } n \in \mathbb{Z}.$$

注意乘以 t^{-r} 与乘以 u^{-1} 相同。因此我们有满射映射

$$H^{d-1}_{(K^\sharp)^{<r>}}(W^{P^r}(A))_{n+1} \xrightarrow{u^{-1}} H^{d-1}_{(K^\sharp)^{<r>}}(W^{P^r}(A))_n, \quad \text{for all } n \in \mathbb{Z}.$$

类似地，我们有单射映射

$$H^d_{(K^\sharp)^{<r>}}(W^{P^r}(A))_{n+1} \xrightarrow{u^{-1}} H^d_{(K^\sharp)^{<r>}}(W^{P^r}(A))_n, \quad \text{for all } n \in \mathbb{Z}.$$

我们有一个关于 $A[P^r u]$-模的短正合序列

$$0 \to G_{P^r}(A) \to W^{P^r}(A)(1) \xrightarrow{u^{-1}} W^{P^r}(A) \to 0.$$

取相对于 $(K^\sharp)^{<r>}$ 的局部上同调，并根据上述讨论，我们得到

$$H^d_{(K^\sharp)^{<r>}}(G_{P^r}(A)) = 0.$$

由 2.2，我们得出

$$H^i_J(G_{P^r}(A)) \cong H^i_{(K^\sharp)^{<r>}}(G_{P^r}(A)) \quad \text{for all } i \geq 0.$$

结果随之而来。 □

5. 定理的证明 1.2

在本节中，我们将给出

定理的证明 1.2. 由 1.1得到 $H^d_J(G_{\mathfrak{m}^r}(A)) = 0$。令 $\eta\colon A[\mathfrak{m}^r u] \to G_{\mathfrak{m}^r}(A)$ 为自然映射。令 $K = \eta^{-1}(J)$。我们在 2.1中进行构造。由 2.2 $\dim A[\mathfrak{m}t]/K^\sharp \geq 2$ 和 $\operatorname{Proj} A[\mathfrak{m}t]/K^\sharp$ 是连接的。令 $\xi\colon A[\mathfrak{m}t] \to G_{\mathfrak{m}}(A)$ 为自然映射。设 $I = \xi(K^\sharp)$。那

么根据 2.2；$A[\mathfrak{m}t]/K^\sharp = G_\mathfrak{m}(A)/I$。所以我们有 $H_I^j(G_\mathfrak{m}(A)) = 0$ 对于 $j \geq d-1$。精确序列 (†) 引入上同调中的精确序列

$$\cdots \to H_I^i(G_\mathfrak{m}(A)) \to H_{K^\sharp}^i(W^\mathfrak{m}(A))(1) \xrightarrow{t^{-1}} H_{K^\sharp}^i(W^\mathfrak{m}(A)) \to H_I^{i+1}(G_\mathfrak{m}(A)) \to \cdots.$$

作为 $H_I^{d-1}(G_P(A)) = 0$，我们得到映射

(1) $H_{K^\sharp}^{d-2}(W^\mathfrak{m}(A))_{n+1} \xrightarrow{t^{-1}} H_{K^\sharp}^{d-2}(W^\mathfrak{m}(A))_n$ 是满射对于所有的 $n \in \mathbb{Z}$; 并且
(2) $H_{K^\sharp}^{d-1}(W^\mathfrak{m}(A))_{n+1} \xrightarrow{t^{-1}} H_{K^\sharp}^{d-1}(W^\mathfrak{m}(A))_n$ 是单射对于所有 $n \in \mathbb{Z}$。

通过与定理 1.1的证明类似的论证，我们有满射映射

$$H^{d-2}_{(K^\sharp)^{<r>}}(W^{\mathfrak{m}^r}(A))_{n+1} \xrightarrow{u^{-1}} H^{d-2}_{(K^\sharp)^{<r>}}(W^{\mathfrak{m}^r}(A))_n, \quad \text{for all } n \in \mathbb{Z}.$$

类似地，我们有单射映射

$$H^{d-1}_{(K^\sharp)^{<r>}}(W^{\mathfrak{m}^r}(A))_{n+1} \xrightarrow{u^{-1}} H^{d-1}_{(K^\sharp)^{<r>}}(W^{\mathfrak{m}^r}(A))_n, \quad \text{for all } n \in \mathbb{Z}.$$

我们有一个短精确序列的 $A[\mathfrak{m}^r u]$-模

$$0 \to G_{\mathfrak{m}^r}(A) \to W^{\mathfrak{m}^r}(A)(1) \xrightarrow{u^{-1}} W^{\mathfrak{m}^r}(A) \to 0.$$

取局部上同调相对于 $(K^\sharp)^{<r>}$ 和上述讨论，我们得到

$$H^{d-1}_{(K^\sharp)^{<r>}}(G_{\mathfrak{m}^r}(A)) = 0.$$

由 2.2可得

$$H^i_J(G_{\mathfrak{m}^r}(A)) \cong H^i_{(K^\sharp)^{<r>}}(G_{\mathfrak{m}^r}(A)) \quad \text{for all } i \geq 0.$$

结果随之而来。 $\square$

6. 一些证明定理的预备知识 1.4

为了证明定理 1.4，我们需要一些预备知识。

6.1. 假设 $\operatorname{char} K = 0$。考虑 Weyl 代数

$$A_m(K) = K < X_1, \ldots, X_m, \partial_1, \ldots, \partial_m > .$$

我们将 $A_m(K)$ 的分级定义为 $\deg X_i = 1$ 和 $\deg \partial_i = -1$。设 $\mathcal{E} = \sum_{i=1}^m X_i \partial_i$ 是 Euler 算子。我们说一个分级的 $A_m(K)$-模是广义欧拉的，如果对于一个齐次的 $m \in M$ 存在整数 a（依赖于 m）使得 $(\mathcal{E} - \deg m)^a m = 0$。

6.2. 假设 $\operatorname{char} K = p > 0$。那么我们有由 $F(r) = r^p$ 给出的 Frobenius 映射 $F \colon R \to R$。有一个关于 F 和 F-有限的 R-模的概念，见 [5]。

定理 6.3. *[参见 [8, 5,1, 6.1], [9, 7.1, 7.2]] 设 $R = K[X_1, \ldots, X_m]$ 是标准分级的，其中 K 是一个无限域。设 $\mathcal{M} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{M}_n$ 是一个分级的 R-模。如果 $\operatorname{char} K = p > 0$ 假设 $\mathcal{M}$ 是一个分级的 F_R-有限的 F_R-模。如果 $\operatorname{char} K = 0$ 假设 $\mathcal{M}$ 是一个分级广义欧拉的，整体的 $A_m(K)$-模。然后我们有*

(a) 如果 $\mathcal{M}_n = 0$ 对于 $|n| \gg 0$ 成立，则 $\mathcal{M} = 0$。

(b) 以下断言是等价的：

  (i) $\mathcal{M}_n \neq 0$ 对于无穷多个 $n \ll 0$。

  (ii) 存在 r，使得对于所有 $n \leq r$ 均有 $\mathcal{M}_n \neq 0$。

  (iii) $\mathcal{M}_n \neq 0$ 对于所有 $n \leq -m$。

  (iv) $\mathcal{M}_n \neq 0$ 对于某个 $n \leq -m$。

(c) 以下断言是等价的：

  (i) $\mathcal{M}_n \neq 0$ 对于无穷多的 $n \gg 0$。

  (ii) 存在 r，使得对于所有 $n \geq r$ 均有 $\mathcal{M}_n \neq 0$。

  (iii) $\mathcal{M}_n \neq 0$ 对于所有的 $n \geq 0$。

  (iv) $\mathcal{M}_n \neq 0$ 对于某个 $n \geq 0$。

因此我们得到：

推论 6.4. *（假设如 6.3所示）如果对于无穷多的 $n \gg 0$ 和无穷多的 $n \ll 0$ 成立 $\mathcal{M}_n = 0$，则 $\mathcal{M} = 0$。*

7. D-模或 F_R-模结构于 W

在本节中，我们假设 $A = k[[X_1, \ldots, X_d]]$，$\mathfrak{m} = (X_1, \ldots, X_d)$。令 $G = G_{\mathfrak{m}}(A)$ 为关于 $\mathfrak{m}$ 的 A 的关联分次环。我们注意到 $G \cong k[X_1, \ldots, X_d]$。令 $\mathcal{R} = A[\mathfrak{m}t]$ 为关于 $\mathfrak{m}$ 的 A 的里斯代数，并且令 $\mathcal{S} = A[\mathfrak{m}t, t^{-1}]$ 为关于 $\mathfrak{m}$ 的 A 的扩展里斯代数。令 I 是 $\mathcal{R}$ 中的一个齐次理想。$\mathcal{S}$-模（从而是 $\mathcal{R}$-模）的正合序列

$$0 \to G \to W^{\mathfrak{m}}(A)(1) \xrightarrow{t^{-1}} W^{\mathfrak{m}}(A) \to 0$$

在上同调中诱导出一个正合序列

$$\cdots \to H^i_I(G) \to H^i_I(W^{\mathfrak{m}}(A))(1) \xrightarrow{t^{-1}} H^i_I(W^{\mathfrak{m}}(A)) \to H^{i+1}_I(G) \to \cdots .$$

令

$$U_i = \ker(H^i_I(W^{\mathfrak{m}}(A))(1) \xrightarrow{t^{-1}} H^i_I(W^{\mathfrak{m}}(A))), \text{and}$$
$$V_i = \operatorname{coker}(H^i_I(W^{\mathfrak{m}}(A))(1) \xrightarrow{t^{-1}} H^i_I(W^{\mathfrak{m}}(A))).$$

对于所有的 $i \geq 0$，我们有短正合的 G-模序列

$$0 \to V_{i-1} \to H^i_I(G) \to U_i \to 0.$$

本节的目标是研究上述正合序列的性质

7.1. 设 $\mathcal{S} = A[\mathfrak{m}t, t^{-1}]$ 是关于 A 和 $\mathfrak{m}$ 的扩展里斯代数。我们注意到 $\mathcal{S}$ 是一个正则环。回忆 $W^{\mathfrak{m}}(A)$ 也是一个 $\mathcal{S}$-模并且 $W^{\mathfrak{m}}(A)$ 的 $\mathcal{R}$-模结构是通过沿包含限制标量得到的 $\mathcal{R} \to \mathcal{S}$. 我们还注意到 $A[t, t^{-1}] = \mathcal{S}_{t^{-1}}$.

7.2. 我们首先考虑当 $\operatorname{char} k = p > 0$ 的情况。我们注意到 $\mathcal{S}$ 是 $F_{\mathcal{S}}$-有限的 $F_{\mathcal{S}}$ 模。由此得出，$A[t, t^{-1}] = \mathcal{S}_{t^{-1}}$ 是 $F_{\mathcal{S}}$-有限的 $F_{\mathcal{S}}$-模。包含关系 $\mathcal{S} \to \mathcal{S}_{t^{-1}}$ 是 $F_{\mathcal{S}}$-线性的。所以 $W^{\mathfrak{m}}(A)$ 是一个 $F_{\mathcal{S}}$-有限的 $F_{\mathcal{S}}$-模。如果 I 是 $\mathcal{R}$ 中的任意理想，则注意 $H^i_{I\mathcal{S}}(W^{\mathfrak{m}}(A)) \cong H^i_I(W^{\mathfrak{m}}(A))$ 作为 $\mathcal{R}$-模。我们注意到 $H^i_{I\mathcal{S}}(W^{\mathfrak{m}}(A))$ 是 $i \geq 0$ 上的 $F_{\mathcal{S}}$-有限 $F_{\mathcal{S}}$-模。由 [9, 4.1] 可知，U_i 和 V_i 是 F_G-有限的 F_G-模。

备注 7.3. 我们不知道 $0 \to V_{i-1} \to H^i_I(G) \to U_i \to 0$ 是否是 F_G-模的短正合序列。

备注 7.4. 在多项式环上，T 分次的有限 F_T-F_T 模的移位不是分次的 F_T 模；参见 [6, 2.5(1), 4.4]。尽管我们不知道这个结果是否适用于 $A[\mathfrak{m}t, t^{-1}]$，但如果我们使用 $W^{\mathfrak{m}}(A)$ 而不是 $L^{\mathfrak{m}}(A) = W^{\mathfrak{m}}(A)(1)$ 可能会更好。

7.5. 接下来我们考虑 $\operatorname{char} k = 0$ 的情况。设

$$A_d(k) = k < X_1, \ldots, X_d, \partial_1, \ldots, \partial_d > .$$

我们给出 $A_d(K)$ 的分级为 $\deg X_i = 1$ 和 $\deg \partial_i = -1$。我们注意到 $\mathcal{S}$ 也是一个分级的 $A_d(k)$-模。我们也注意到 t^{-1} 与所有 ∂_i 交换。我们注意到 $A[t, t^{-1}]$ 也是一个 $A_d(k)$-模并且包含 $\mathcal{S} \to A[t, t^{-1}]$ 是 $A_d(k)$-线性的。因此，$W^{\mathfrak{m}}(A)$ 也是一个 $A_d(k)$-模。我们注意到 $0 \to G \to W^{\mathfrak{m}}(A)(1) \to W^{\mathfrak{m}}(A) \to 0$ 是一个短正合序列的 $A_d(K)$-模。由此得出（例如使用 Čech 复形），

$$\cdots \to H^i_I(G) \to H^i_I(W^{\mathfrak{m}}(A))(1) \xrightarrow{t^{-1}} H^i_I(W^{\mathfrak{m}}(A)) \to H^{i+1}_I(G) \to \cdots .$$

是一个分级的 $A_d(k)$-模的正合序列。因此，

$$0 \to V_{i-1} \to H^i_I(G) \to U_i \to 0$$

是 $A_d(k)$-模的短正合序列。固定 $i \geq 0$。由于 $H^i_I(G)$ 是一个广义欧拉的、全纯的 $A_d(k)$-模，因此 V_{i-1} 和 U_i 也是广义欧拉的、全纯的 $A_d(k)$-模。

8. 定理的证明 1.4

在本节中我们给出了：

定理的证明 1.4. 令 $\widehat{A}$ 为 A 的 $\mathfrak{m}$-进完成。我们注意到 $G_{\mathfrak{m}}(A) \cong G_{\widehat{\mathfrak{m}}}(\widehat{A})$ 并且对每一个 $r \geq 1$ 我们有 $G_{\mathfrak{m}^r}(A) \cong G_{\widehat{\mathfrak{m}^r}}(\widehat{A})$。因此我们可以假设 A 是完备的。因此 $A = k[[X_1, \ldots, X_d]]$. 由于 k 是可分闭的，特别是 k 是无限的。

令 $\eta\colon A[\mathfrak{m}^r u] \to G_{\mathfrak{m}^r}(A)$ 为自然映射。令 $K = \eta^{-1}(J)$。我们考虑精确序列的 $\mathcal{S}(\mathfrak{m}^r) = A[\mathfrak{m}^r u, u^{-1}]$-模（因此也是 $\mathcal{R}(\mathfrak{m}^r)$-模）

$$0 \to G_{\mathfrak{m}^r}(A) \to W^{\mathfrak{m}^r}(A)(1) \xrightarrow{u^{-1}} W^{\mathfrak{m}^r}(A) \to 0.$$

取关于 K 的上同调，并且对于 $j = d-1, d$ 有 $H^j_K(G_{\mathfrak{m}^r}(A)) = 0$，我们得到映射 $H^{d-2}_K(W^{\mathfrak{m}^r}(A))(1) \xrightarrow{u^{-1}} H^{d-2}_K(W^{\mathfrak{m}^r}(A))$ 是满射，映射 $H^{d-1}_K(W^{\mathfrak{m}^r}(A))(1) \xrightarrow{u^{-1}} H^{d-1}_K(W^{\mathfrak{m}^r}(A))$ 是一一对应，并且映射
$H^{d}_K(W^{\mathfrak{m}^r}(A))(1) \xrightarrow{u^{-1}} H^{d}_K(W^{\mathfrak{m}^r}(A))$ 是单射。

我们在 2.1中进行构造。令 $\xi\colon A[\mathfrak{m}t] \to G_{\mathfrak{m}}(A)$ 为自然映射。设 $I = \xi(K^\sharp)$。精确序列 (†) 导出动同调中的精确序列

$$\cdots \to H^i_I(G_{\mathfrak{m}}(A)) \to H^i_{K^\sharp}(W^{\mathfrak{m}}(A))(1) \xrightarrow{t^{-1}} H^i_{K^\sharp}(W^{\mathfrak{m}}(A)) \to H^{i+1}_I(G_{\mathfrak{m}}(A)) \to \cdots.$$

由 2.2我们有 $\sqrt{(K^\sharp)^{<r>}} = \sqrt{K}$。请注意，与 t^{-r} 相乘与与 u^{-1} 相乘相同。我们有一个满射映射

$$H^{d-2}_{K^\sharp}(W^{\mathfrak{m}}(A))_{nr+r} \xrightarrow{t^{-r}} H^{d-2}_{K^\sharp}(W^{\mathfrak{m}}(A))_{nr}, \quad \text{for all } n \in \mathbb{Z}.$$

由此得出该映射

$$H^{d-2}_{K^\sharp}(W^{\mathfrak{m}}(A))_{nr+1} \xrightarrow{t^{-1}} H^{d-2}_{K^\sharp}(W^{\mathfrak{m}}(A))_{nr}, \quad \text{is surjective for all } n \in \mathbb{Z}.$$

令 $V_{d-2} = \operatorname{coker}(H^{d-2}_{K^\sharp}(W^{\mathfrak{m}}(A))(1) \xrightarrow{t^{-1}} H^{d-2}_{K^\sharp}(W^{\mathfrak{m}}(A)))$。那么对于所有 $n \in \mathbb{Z}$，我们有
$(V_{d-2})_{nr} = 0$ 。

令 $V_{d-1} = \operatorname{coker}(H^{d-1}_{K^\sharp}(W^{\mathfrak{m}}(A))(1) \xrightarrow{t^{-1}} H^{d-1}_{K^\sharp}(W^{\mathfrak{m}}(A)))$。则通过类似的论证，我们有 $(V_{d-2})_{nr} = 0$ 对于所有 $n \in \mathbb{Z}$ 成立。

我们有单射映射

$$H^{d-1}_{K^\sharp}(W^{\mathfrak{m}}(A))_{nr+r} \xrightarrow{t^{-r}} H^{d-1}_{K^\sharp}(W^{\mathfrak{m}}(A))_{nr}, \quad \text{for all } n \in \mathbb{Z}.$$

因此，该映射

$$H^{d-2}_{K^\sharp}(W^{\mathfrak{m}}(A))_{nr+r} \xrightarrow{t^{-1}} H^{d-2}_{K^\sharp}(W^{\mathfrak{m}}(A))_{nr+r-1}, \quad \text{is injective for all } n \in \mathbb{Z}.$$

令 $U_{d-1} = \ker(H^{d-1}_{K^\sharp}(W^{\mathfrak{m}}(A))(1) \xrightarrow{t^{-1}} H^{d-1}_{K^\sharp}(W^{\mathfrak{m}}(A)))$。那么对于所有 $n \in \mathbb{Z}$，我们有
$(U_{d-1})_{nr+r-1} = 0$ 。

令 $U_d = \ker(H^d_{K^\sharp}(W^{\mathfrak{m}}(A))(1) \xrightarrow{t^{-1}} H^d_{K^\sharp}(W^{\mathfrak{m}}(A)))$。然后通过类似的论证，我们有 $(U_d)_{nr+r-1} = 0$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 成立。

设 $G = G_{\mathfrak{m}}(A)$。若 $\operatorname{char} k = p$，则 $V_{d-2}, V_{d-1}, U_{d-1}, U_{d-2}$ 为分级的 F_G-有限 F_G-模。这些模对于无限多个 $n \gg 0$ 和无限多个 $n \ll 0$ 消失。所以根据 6.4，它们每一个都是零。

如果 $\operatorname{char} k = 0$，那么 $V_{d-2}, V_{d-1}, U_{d-1}, U_{d-2}$ 被分级，广义欧拉的，全纯的 $A_d(k)$-模。这些模块中的每一个在无限多个 $n \gg 0$ 和无限多个 $n \ll 0$ 处消失。所以根据 6.4，它们都是零。

由于我们有短正合序列 $0 \to V_{d-2} \to H^{d-1}_I(G) \to U_{d-1} \to 0$ 和 $0 \to V_{d-1} \to H^d_I(G) \to U_d \to 0$，因此得到 $H^j_I(G) = 0$ 对于 $j \geq d-1$ 成立。由此得出 $\dim G/I \geq 2$ 和 $\operatorname{Proj} G/I$ 是连通的。由于 $G/I = A[\mathfrak{m}t]/K^\sharp$。由此得出 $\dim A[\mathfrak{m}^r t]/(K^\sharp)^{<r>} \geq 2$ 和 $\operatorname{Proj} A[\mathfrak{m}^r t]/(K^\sharp)^{<r>}$ 是连通的。由 2.2，我们得到 $\dim G_{\mathfrak{m}^r}(A)/J \geq 2$ 和 $\operatorname{Proj} G_{\mathfrak{m}^r}(A)/J$ 是连通的。结果随之而来。

$\square$

References

[1] M. P. Brodmann and R. Y. Sharp, *Local cohomology*, An algebraic introduction with geometric applications. Second edition, Cambridge Stud. Adv. Math., 136 Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[2] R. Hartshorne, *Cohomological dimension of algebraic varieties*, Ann. of Math. (2) 88 (1968), 403 – 450.

[3] S. B. Iyengar, G. J. Leuschke, A. Leykin, C. Miller, E. Miller, A. K. Singh and U. Walther, *Twenty-four hours of local cohomology*, Grad. Stud. Math., 87 American Mathematical Society, Providence, RI, 2007

[4] G. Lyubeznik, *Finiteness Properties of Local Cohomology Modules (an Application of D-modules to Commutative Algebra)*, Inv. Math. 113, (1993), 41 – -55.

[5] ———, *F-modules: applications to local cohomology and D-modules in characteristic* $p > 0$, J. Reine Angew. Math. 491, (1997), 65 – -130.

[6] L. Ma and W. Zhang, *Eulerian graded D-modules*, Math. Res. Lett. **21**, (2014), 149 – -167.

[7] T. J. Puthenpurakal, *Ratliff-Rush filtration, regularity and depth of higher associated graded modules. I*, J. Pure Appl. Algebra **208** (2007), no. 1, 159–176.

[8] ———, *Graded components of local cohomology modules*, Collect. Math. 73, (2022), no. 1, 135–171.

[9] ———, *Koszul homology of F-finite module and applications*, eprint, arXiv:2307.04473

Department of Mathematics, IIT Bombay, Powai, Mumbai 400 076, India

Email address: tputhen@gmail.com