五维海森伯 Lie 代数的变形

Alice Fialowski[a)1] and Ashis Mandal[2]

[1)]*Computer Algebra Department*
Eötvös Loránd University HUNGARY,
H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C
[2)]*Department of Mathematics and Statistics*
Indian Institute of Technology Kanpur
208016, India

(10*Electronic mail: amandal@iitk.ac.in, ashismandal.r@gmail.com)

(10*Electronic mail: alice.fialowski@gmail.com, fialowski@inf.elte.hu)

(10Dated: 2025 年 4 月 23 日)

在这篇笔记中，我们明确给出了 5 维 Heisenberg 李代数 $\mathfrak{h}_2$ 在 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}$ 上的所有等价类的变形。我们证明总共有 20 个无穷小变形（族），其中 18 个可以延拓为实变形，而 2 个仅是无穷小的。[a]

Keywords: 海森伯代数，形变，李代数上同调

I. 海森伯格李代数

海森伯李代数 $\mathfrak{h}_n$ 在数学物理和数学中都扮演着重要角色。它们定义在 $\mathbb{R}$ 上，对于每一个奇整数 $2n+1$，基由

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}, e_{n+2}, \ldots, e_{2n}, e_{2n+1}\},$$

给出，非零换位子如下：

$$\begin{aligned}
[e_1, e_{n+1}] &= e_{2n+1}, \\
[e_2, e_{n+2}] &= e_{2n+1}, \\
&\vdots \\
[e_n, e_{2n}] &= e_{2n+1}.
\end{aligned}$$

我们也说这个海森伯李代数的秩为 n。它们是幂零李代数，中心由 e_{2n+1} 生成，并且可以被视为交换代数 $\mathbb{R}^{2n}$ 的中心扩张由 $\mathbb{R}$。在量子力学中，它们通常用于 $n = 1,2,3$，但也应用于顶点代数理论中的 $n \in \mathbb{Z}$。

众所周知，它们可以通过如下形式的上三角矩阵来表示：

考虑秩为 n 的 Heisenberg 代数中的两个元素：$\mathbf{a} = \sum_1^{2n+1} a_i e_i$ 和 $\mathbf{b} = \sum_1^{2n+1} b_i e_i$。它们可以由 $(n+2)\times(n+2)$ 三角矩阵表示。这里，基元素 $e_1, \cdots, e_{2n+1}$ 表示为

[a)] Corresponding author: Alice Fialowski

[a)] AMS 数学主题分类（2020）:17B56, B81, B99.

$$e_1=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0\\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0\\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0\\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0\\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ldots$$

$$e_n=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0\\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0\\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad e_{n+1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0\\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0\\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ldots$$

$$e_{2n}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0\\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0\\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad e_{2n+1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0\\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0\\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

我们得到

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}]=\textstyle\sum_1^n(a_ib_{i+n}-a_{i+n}b_i)e_{2n+1}.$$

看起来研究最多的情况是 3 维的 Heisenberg 李代数 $\mathfrak{h}_1$，其基元素为 $\{e_1,e_2,e_3\}$。我们也知道了它的伴随上同调空间的维度，依据 [Ma]。设 h^p 是 $H^p(\mathfrak{h}_n,\mathfrak{h}_n)$ 的维度。那么

$$h^p=\begin{cases}1 & \text{if } p=0,\\[2ex] (2n+1)\binom{2n+1}{p}-\binom{2n+1}{p+1}-2n\binom{2n+1}{p-1} & \text{if } 1\le p\le n,\\[2ex] (2n+1)[\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-2}]-\binom{2n}{n-1}+\binom{2n}{n-3} & \text{if } p=n+1,\\[2ex] 2n[\binom{2n}{p-1}-\binom{2n}{p+1}]-\binom{2n}{p}+\binom{2n}{p+2} & \text{if } n+2\le p\le 2n+1.\end{cases}$$

在低维上同调空间中，我们也有一些显式的上闭链，参见 [FP1]。对于形变，我们需要考虑第二个上同调空间 $H^2(\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_1)$，其维度为 5（参见 $n=1$ 的第三个公式）。我们有 5 个显式的非等价 2-上循环，如下所示：

1. $\phi_1(e_2,e_3)=e_3$;
2. $\phi_2(e_1,e_2)=e_2,\phi_2(e_1,e_3)=-e_3$;
3. $\phi_3(e_1,e_2)=e_3$;

4. $\phi_4(e_1,e_3)=e_1$;

5. $\phi_5(e_1,e_3)=e_2$.

这些上循环定义了 5 个非等价的无穷小形变，$[-,-]_{\mathfrak{h}_1}+t\phi_i$ 对于 $i=1,\cdots,5$。它们在为 $[-,-]_{\mathfrak{h}_1}+t\phi_i$ 写出的雅可比恒等式中没有 t^2 项。所有都可以扩展，因此它们是真正的变形，参见 [FM]。

关于高秩海森伯格李代数的变形一无所知。问题是计算具有伴随系数的第二上同调空间并提供所有代表上闭链。在这篇笔记中，我们完全描述了在 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的 5 维海森伯格李代数 $\mathfrak{h}_2$ 的变形。

II. 预备知识

在本节中，我们简要总结了李代数的上同调和变形。详情见 [NR,F]。

一个李代数是在域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间 $\mathfrak{g}$，配备了一个称为李括号 $[-,-]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$ 的 $\mathbb{K}$-双线性运算，满足

- 斜对称性：对于所有的 $a,b\in\mathfrak{g}$，$[a,b]=-[b,a]$
- 雅可比恒等式：$[a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]]=0$ 对所有 $a,b,c\in\mathfrak{g}$ 成立。

一个李代数 $\mathfrak{g}$ 或者一个在 $\mathfrak{g}$ 上的模是一个向量空间 V，带有李代数同态，比如说 $\rho:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathscr{E}nd(V)$，其中 $\mathscr{E}nd(V)$ 是 V 的自同态的李代数，并采用换位子李括号操作。任何李代数 $\mathfrak{g}$ 都是一个自身的模，它被称为 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示。在这里我们考虑模 V 作为底向量空间，并定义 $\rho:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathscr{E}nd(\mathfrak{g})$ 为 $\rho(x)(y)=[x,y]$ 对于 $x,y\in\mathfrak{g}$。让我们回顾一下具有模系数的李代数上同调。

定义 II.1 假设 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数，并且 A 是 $\mathfrak{g}$ 上的一个模。然后一个以 A 为系数的 *Lie* 代数 $\mathfrak{g}$ 的 q 维上链是定义在 $\mathfrak{g}$ 上取值于 A 的斜对称 q 线性映射；所有这样的上链的空间记作 $C^q(\mathfrak{g};A)$。因此，$C^q(\mathfrak{g};A)=Hom_{\mathbb{K}}(\Lambda^q\mathfrak{g},A)$。微分

$$d=d_q:C^q(\mathfrak{g};A)\longrightarrow C^{q+1}(\mathfrak{g};A)$$

是由公式给出的 $\mathbb{K}$-线性映射

$$\begin{aligned}dc(g_1,\cdots,g_{q+1})=&\sum_{1\le s<t\le q+1}(-1)^{s+t-1}c([g_s,g_t],g_1,\cdots,\hat{g}_s,\cdots,\hat{g}_t,\cdots,g_{q+1})\\&+\sum_{1\le s\le q+1}(-1)^s[g_s,c(g_1,\cdots,\hat{g}_s,\cdots,g_{q+1})],\end{aligned}$$

其中 $c\in C^q(\mathfrak{g};A)$ 和 $g_1,\cdots,g_{q+1}\in\mathfrak{g}$。

然后，$(C^*(\mathfrak{g};A),\,d)$ 是一个称为 *Lie* 代数 $\mathfrak{g}$ 的 *Chevally-Eilenberg* 复形的上链复形，而相应的上同调则被称为 *Lie* 代数 $\mathfrak{g}$ 在系数 A 中的上同调，并用 $H^q(\mathfrak{g};A)$ 表示。对于 $A=\mathfrak{g}$，在如前所述的伴随作用下，上同调表示为 $H^*(\mathfrak{g};\mathfrak{g})$.

定义 II.2 一个形式上的 1-参数形变或简称变形的 *(*$\mathfrak{g}$*,[-,-])* 是在 $\mathbb{K}[[t]]$-模 $\mathfrak{g}[[t]]$ 上的一个李代数结构 $[-,-]_t$，使得

$$[x,y]_t=[x,y]+\sum_{n\ge1}t^n\mu_n(x,y)$$

for all $x,y\in\mathfrak{g}$. 这里 $\mu_n:\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$ 是 $n\ge1$ 的斜对称线性映射，进而 μ_n 是 2-链在 $C^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ 中。

李代数结构 $[-,-]_t$ 是 $(\mathfrak{g},[-,-])$ 的一个变形，前提是以下等式成立。

$$\begin{aligned}&[a,b]_t=-[b,a]_t \;\text{ for all }\; a,b\in\mathfrak{g};\\&[a,[b,c]_t]_t+[b,[c,a]_t]_t+[c,[a,b]_t]_t=0\;\text{ for all }\; a,b,c\in\mathfrak{g}.\end{aligned}\tag{1}$$

现在将上述方程（1）两边展开并收集 t^n 的系数，我们看到（1）等价于如下方程组

$$\sum_{i+j=n}\{\mu_i(x,\mu_j(y,z))+\mu_i(y,\ \mu_j(z,x))+\mu_i(z,\ \mu_j(x,y))\}=0\;\text{ for } x,y,z\in\mathfrak{g}.\tag{2}$$

一个变形是阶 n，如果它满足 Jacobi 恒等式直到 t^n 项。一个变形 $[-,-]_t$ 被称为真实变形，如果它满足任何 t^n 项的雅可比恒等式。

备注 1 对于 $n=0$，条件等价于 $\mathfrak{g}$ 中李括号的雅可比恒等式。对于 $n=1$，它等价于 $d\mu_1=0$，换句话说，μ_1 是 2-上同态在 $C^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ 中的一个。一般来说，对于 $n\geq 2$，μ_n 只是 $C^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ 中的一个 2-链。

定义 II.3 2-上同调 μ_1 被称为形变 $[-,-]_t=[-,-]+t\mu_1$ 的无穷小部分，我们说 $\mathfrak{g}_t=\mathfrak{g}+t\mu_1$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的无穷小变形。换句话说，一个无穷小变形是阶数为 1 的变形，由 $K[t]/(t^2)$ 参数化。

定义 II.4 假设 $[-,-]_t$ 和 $[-,-]'_t$ 是给定李代数 $\mathfrak{g}$ 的两种形变。一个形式同构由 $\Phi_t=\sum_{i\geq 0}\phi_i t^i$ 给出，满足对于所有 $x,y\in\mathfrak{g}$ 有 $\Phi_t[x,y]'_t$=$[\Phi_t(x),\Phi_t(y)]_t$；其中 $\phi_i:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$ 是线性映射且具有 $\phi_0=Id_{\mathfrak{g}}$。在这种情况下，我们说这两个变形是等价的。

定义 II.5 任何与变形 $\mu_0=[-,-]$ 等价的李代数的变形称为平凡变形。

命题 II.6 一个无穷小变形（$\mathfrak{g}$,*[-,-]*）由 $\mu_t=[-,-]+t\mu_1$ 给出，使得 μ_t 是 $\mathfrak{g}$ 模 t^2 的变形，也就是说，μ_t 满足 2 对于 $n=0,1$。

下一个结果表明无穷小变形由李代数的第二上同调空间所刻画。

命题 II.7 等价变形的无穷小部分 μ_1 和 μ_2 只在一个余边界上有所不同，因此变形的无穷小部分的上同调类由 $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ 的一个上同调类唯一确定，并且不同的上同调类决定了不等价的变形。

证明 1 令 $[-,-]_t$ 和 $[-,-]'_t$ 是给定李代数 $\mathfrak{g}$ 的两个形变，其中 $[x,y]_t=[x,y]+\sum_{n\geq 1}t^n\mu_n(x,y)$ 和 $[x,y]'_t=[x,y]+\sum_{n\geq 1}t^n\mu'_n(x,y)$ *for all* $x,y\in\mathfrak{g}$。假设 $\Phi_t:(\mathfrak{g}[[t]],[-,-]_t)\longrightarrow(\mathfrak{g}[[t]],[-,-]'_t)$ 是一个等价关系。然后

$$\Phi_t[x,y]_t=[\Phi_t(x),\Phi_t(y)]'_t$$

对所有 $x,y\in\mathfrak{g}$ 成立。展开这个恒等式并比较 t 的系数，我们得到 $\mu_1-\mu'_1=\delta\phi_1$。

定义 II.8 一个李代数被称为刚性的如果每个形变都是平凡的。

推论 II.9 如果 $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=0$，则 $\mathfrak{g}$ 是一个刚性李代数。

III. 可能的非等价变形 $\mathfrak{h}_2$

李代数 $\mathfrak{g}$ 的无穷小变形与第二上同调空间 $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ 的元素一一对应。在 [FP2] 中，描述了 5 维复李代数的模空间（另见 [SW]）。存在单个李代数，以及参数族 2、3 和 4。为了检查海森堡李代数 $\mathfrak{h}_2$ 的可能形变，我们发现了一些关于以 $\{e_1,\cdots,e_5\}$ 为基的 $\mathfrak{h}_2$ 形变的可能性。[Ma,FP2] 中的结果是 $\dim H^2(\mathfrak{h}_2,\mathfrak{h}_2)=20$。

回忆一下，$\mathfrak{h}_2$ 中的非平凡括号由以下给出

$$[e_1,e_3]=e_5,\quad [e_2,e_4]=e_5.$$

5 维实李代数的分类已知于 [M1,M2](1963)，也可参见 [P](1976)。复 5 维李代数较少，因为其中一些具有两个非同构的实形式。它们的模空间可以在 [FP2] 中找到。我们的方法如下。

我们从复 Heisenberg 李代数 $\mathfrak{h}_2$ 开始，其基为 $\{e_1,\cdots,e_5\}$。注意，$\mathfrak{h}_2$ 的特定性质是非零括号对不同的元素，并且两个括号的结果元素都是第五个元素。所以我们寻找这样的情况。通过置换改变基，从 [FP2] 表 3 中的非等价 5 维李代数列表中，我们得到以下由 d_i 表示的 8 候选者，用于 $i=1,\cdots,8$，用于可能的 $\mathfrak{h}_2$ 变形（那些包含一些海森堡非零括号的元素的置换）。我们知道无穷小变形与 $H^2(\mathfrak{h}_2,\mathfrak{h}_2)$ 的上同调类一一对应。因此我们有 $d_i=[-,-]_{\mathfrak{h}_2}+t\phi_i$ 对于 $i=1,\cdots,8$。在每种情况下，都需要检查额外的非零括号，这些括号定义了 $\mathfrak{h}_2$ 的 2-上链 ϕ_i 是否是上闭链（我们需要 $d\phi_i=0$ 对于 $i=1,\cdots,8$）。首先我们考虑 Lie 代数 $\mathfrak{h}_2$ 的 2-上循环 ϕ_i，它们是通过不涉及参数获得的：

A.

代数 d_1 的 2-链 ϕ_1 由 $[-,-]_{\mathfrak{h}_2}+\phi_1$ 给出（表示为 d_7 在 [FP2] 中）

$$\begin{aligned}
&\phi_1(e_1,e_3)=2e_2-2e_3;\\
&\phi_1(e_1,e_4)=e_3;\\
&\phi_1(e_2,e_4)=e_2;\\
&\phi_1(e_3,e_4)=2e_3-e_2.
\end{aligned}$$

B.

代数 d_2 的 2-链 ϕ_2（表示为 d_{10} 在 [FP2] 中）

$$\begin{aligned}
&\phi_2(e_1,e_3)=e_1;\\
&\phi_2(e_1,e_4)=-e_2;\\
&\phi_2(e_2,e_3)=2e_2;\\
&\phi_2(e_3,e_4)=-e_4\\
&\phi_2(e_3,e_5)=-3e_5.
\end{aligned}$$

C.

代数 d_3 的 2-链 ϕ_3（表示为 d_{17} 在 [FP2] 中）

$$\begin{aligned}
&\phi_3(e_1,e_4)=e_1;\\
&\phi_3(e_2,e_4)=e_2;\\
&\phi_3(e_3,e_4)=e_3;\\
&\phi_3(e_4,e_5)=-2e_5.
\end{aligned}$$

请注意，ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3 都是 2-上循环。

现在我们考虑李代数 $\mathfrak{h}_2$ 的两个参数的 2-上同调族。

D.

2-链 $\phi_4(p:q)$ 对于代数族 $d_4(p:q)$（表示为 $d_9(p:q)$ 在 FP2 中）

$$\phi_4(e_1,e_4)=(p+q)e_1;$$
$$\phi_4(e_2,e_3)=-e_1;$$
$$\phi_4(e_2,e_4)=qe_2;$$
$$\phi_4(e_3,e_4)=e_2+pe_3;$$
$$\phi_4(e_4,e_5)=-(2p+q)e_5.$$

映射 ϕ 是任意 p 和 q 的 2-上闭链。

E.

2-上链 $\phi_5(p:q)$ 对于代数族 $d_5(p:q)$（在 FP2 中表示为 $d_{14}(p:q)$）

$$\phi_5(e_1,e_3)=pe_1;$$
$$\phi_5(e_2,e_3)=e_1+qe_2+e_4;$$
$$\phi_5(e_3,e_4)=-pe_4;$$
$$\phi_5(e_3,e_5)=-(p+q)e_5.$$

映射 ϕ_5 是一个对于任意 p 和 q 的 2-上闭链。

F.

2-上链 $\phi_6(p:q)$ 对于代数族$\{d_6(p:q)$（在 FP2 中记为 $d_{15}(p:q)$）$\}$

$$\phi_6(e_1,e_3)=pe_1;$$
$$\phi_6(e_2,e_3)=e_1+qe_2;$$
$$\phi_6(e_3,e_4)=-qe_4;$$
$$\phi_6(e_3,e_5)=-2q\,e_5.$$

映射 ϕ_6 是任意 p 和 q 的 2-上闭链。

接下来我们考虑 Lie 代数 $\mathfrak{h}_2$ 的三个参数的 2-上同调：

G.

其中，对于代数族 $d_7(p:q:r)$（记为 $d_{12}(p:q:r)$ 在 FP2 中）的 2-链 $\phi_7(p:q:r)$

$$\phi_7(e_1,e_3)=pe_1;$$
$$\phi_7(e_2,e_3)=e_1+qe_2;$$
$$\phi_7(e_3,e_4)=-e_2-re_4;$$
$$\phi_7(e_3,e_5)=-(q+r)e_5.$$

映射 ϕ_7 是一个对于任意 p,q 和 r 的 2-上同调。

H.

2-上链 $\phi_8(p:q:r)$ 对于代数族 $d_8(p:q:r)$（记为 $d_5(p:q:r)$) 在 FP2 中）

$$\begin{aligned}
&\phi_8(e_1,e_3) = pe_1;\\
&\phi_8(e_1,e_4) = (r-q)e_5;\\
&\phi_8(e_2,e_3) = e_1+qe_2;\\
&\phi_8(e_2,e_4) = re_1-r(p-q)e_2;\\
&\phi_8(e_4,e_5) = p(r-q)e_5.
\end{aligned}$$

映射 ϕ_8 是一个 2-上闭链当且仅当 $q=r$ 或 $p=0$。

我们注意到所有这些李代数（族）都是可解的。

IV. 非同构的复/实形变 $\mathfrak{h}_2$

在本节中，我们决定这些 8 上同调是否给出 $\mathfrak{h}_2$ 的非等价无穷小形变，并且在其中哪些是可以延拓的（雅可比恒等式中没有出现更高阶的 t 项）。为此，需要检查修改后的李括号 $\mu_t(d_i)=[-,-]_{\mathfrak{h}_2}+t\phi_i$ 对于 $i=1,\cdots,8$ 满足雅可比恒等式。如果它满足雅可比恒等式，则此结果无穷小形变是可以延拓的，并给出一个真实的形变。如果有更高阶的 t 项，则形变仅仅是无穷小的，不能被延拓到二阶形变。

a) 单个变形

这里 $\mu_t(d_1),\mu_t(d_2)$ 和 $\mu_t(d_3)$ 是 $\mathfrak{h}_2$ 的非等价实形变，因为在雅可比恒等式中没有出现任何 t^2 项或更高阶的项。

定理 IV.1 上同调 ϕ_1 给出以下无穷小和实形变

$$\mu_t(d_1)=\begin{cases}
[e_1,e_3]_t = e_5+t(2e_2-2e_3)\\
[e_1,e_4]_t = te_3\\
[e_2,e_4]_t = e_5+te_2\\
[e_3,e_4]_t = t(2e_3-e_2)
\end{cases}$$

上同调 ϕ_2 给出以下无穷小和实形变

$$\mu_t(d_2)=\begin{cases}
[e_1,e_3]_t = e_5+te_1\\
[e_1,e_4]_t = -te_2\\
[e_2,e_3]_t = 2te_2\\
[e_2,e_4]_t = e_5\\
[e_3,e_4]_t = -te_4\\
[e_3,e_5]_t = -3te_5
\end{cases}$$

上同调 ϕ_3 给出以下无穷小和实形变

$$\mu_t(d_3)=\begin{cases}[e_1,e_3]_t=e_5\\ [e_1,e_4]_t=te_1\\ [e_2,e_4]_t=e_5+te_2\\ [e_3,e_4]_t=te_3\\ [e_4,e_5]_t=-2te_5\end{cases}$$

显然，这三种变形是不等价的。

b) 两参数变形

定理 IV.2 余子族 $\phi_4(p,q)$ 给出了以下无穷小和实形变族

$$\mu_t(d_4)(p:q)=\begin{cases}[e_1,e_3]_t=e_5\\ [e_1,e_4]_t=(p+q)te_1\\ [e_2,e_3]_t=-te_1\\ [e_2,e_4]_t=e_5+qte_2\\ [e_3,e_4]_t=te_2+pte_3\\ [e_4,e_5]_t=-(2p+q)te_5\end{cases}\tag{3}$$

因此，余子族 $\phi_4(p,q)$ 形成了 $H^2(\mathfrak{h}_2,\mathfrak{h}_2)$ 中的 3 维子空间。

证明 2 我们必须检查这些两参数变形中哪些是不等价的。我们得到以下结果：

族 *(3)* 有三个非等价的无穷小形变，即代数 $\mu_t(d_4)(p:0),\mu_t(d_4)(0:q)$ 和 $\mu_t(d_4)(0:0)$ 是具有非等价 2-上闭链的非同构李代数。我们得到任意一个 $\mu_t(d_4)(p:q)$ 李代数可以通过上述三个上闭链的线性组合获得。反过来，在对 (e_i,e_j) 进行评估时，以下恒等式对于 $1\le i,j\le 5$ 成立：

$$\mu_t(d_4)(p:q)=\mu_t(d_4)(p:0)+\mu_t(d_4)(0:q)-\mu_t(d_4)(0:0)$$

请注意，该族中的“一般元素” $\mu_t(d_4)(0:0)$ 是幂零的，其余的是可解的。这种情况在李代数的可解族中经常发生（见 [FP2]）。

族 $\mu_t(d_4)(p:0)$ 和 $\mu_t(d_4)(0:q)$ 以及单独的代数 $\mu_t(d_4)(0:0)$ 都是可扩展的，因此它们是实变形。总共我们得到了 **3** 个不等价的实变形与这个 2-上同调族。

定理 IV.3 $\phi_5(p:q)$ 家族的上同调给出了以下无穷小形变

$$\mu_t(d_5)(p:q)=\begin{cases}[e_1,e_3]_t=e_5+pte_1\\ [e_2,e_3]_t=te_1+qte_2+te_4\\ [e_2,e_4]_t=e_5\\ [e_3,e_4]_t=-pte_4\\ [e_3,e_5]_t=-(p+q)te_5\end{cases}$$

上同调家族构成了 $H^2(\mathfrak{h}_2,\mathfrak{h}_2)$ 中的一个 3 维子空间。

证明 3 我们得到同调 $\phi_5(p:0),\phi_5(0:q)$ 和 $\phi_5(0:0)$ 是不等价的同调，而任意的 p 和 q 的 $\phi_5(p:q)$ 可以用这些同调的线性组合来表示：

$$\phi_5(p:q)=\phi_5(p:0)+\phi_5(0:q)-\phi_5(0:0)$$

这里，单元素 $\mu_t(d_5)(0:0)$ 是幂零的，其他的代数仅是可解的。所有这些 3 变形都是可以延拓的，因此我们得到了 **3** 个新的不等价实变形。

定理 IV.4 $\phi_6(p:q)$ 上同调族给出了以下无穷小变形

$$\mu_t(d_6)(p:q)=\begin{cases}[e_1,e_3]_t=e_5+pte_1\\ [e_2,e_3]_t=te_1+qte_2\\ [e_2,e_4]_t=e_5\\ [e_3,e_4]_t=-qte_4\\ [e_3,e_5]_t=-2qte_5\end{cases}$$

上同调族形成了一个 3 维子空间在 $H^2(\mathfrak{h}_2,\mathfrak{h}_2)$ 中。

证明 4 我们得到余子 $\phi_6(p:0),\phi_6(0,p)$ 和 $\phi_6(0:0)$ 是非等价的余子，而 $\phi_6(p:q)$ 对于任意的 p 和 q 是那些余子的线性组合：

$$\phi_6(p:q)=\phi_6(p:0)+\phi_6(0:q)-\phi_6(0:0)$$

这里，奇元素 $\mu_t(d_6)(0:0)$ 是幂零的，其他的形变只是可解的。所有这些 3 形变都可以扩展，所以我们得到了 **3** 个新的不等价实形变。

c) 三参数变形

定理 IV.5 $\phi_7(p:q:r)$ 族上同调给出了以下无穷小形变

$$\mu_t(d_7)(p:q:r)=\begin{cases}[e_1,e_3]_t=e_5+tpe_1\\ [e_2,e_3]_t=te_1+rte_2\\ [e_2,e_4]_t=e_5;\\ [e_3,e_4]_t=-te_2-tre_4\\ [e_3,e_5]_t=-(r+q)te_5\end{cases}$$

上同调族形成了 4 维的子空间在 $H^2(\mathfrak{h}_2,\mathfrak{h}_2)$ 中。

证明 5 我们得到余子 $\phi_7(0:0:0),\phi_7(p:0:0),\phi_7(0:q:0)$ 和 $\phi_7(0:0:r)$ 是非等价的余子，并且它们都给出了实形变。对于任意 p,q 和 r，族 $\phi_7(p:q:r)$ 是那些的线性组合：

$$\phi_7(p:q:r)=\phi_7(p:0:0)+\phi_7(0:q:0)+\phi_7(0:0:r)-2\phi_7(0:0:0)$$

这给出了 **4** 个更多的非等价实形变。

定理 IV.6 $\phi_8(p:q:r)$ 族上同调（带有限制 $p=0$ 或 $q=r$）给出以下无穷小形变

$$\mu_t(d_8)(p:q:r)=\begin{cases}[e_1,e_3]_t=e_5+tpe_1\\ [e_2,e_3]_t=te_1+rte_2\\ [e_2,e_4]_t=e_5+rte_1-r(p-r)te_2\end{cases}$$

该上同调族在 $H^2(\mathfrak{h}_2,\mathfrak{h}_2)$ 中形成一个 4 维子空间。

证明 6 我们得到上同调 $\phi_8(0:0:0)$ 与 $\phi_6(0:0)$ 相同，因此定义了相同的实/复形变。另一方面，$\phi_8(p:0:0)$ 和 $\phi_8(0:q:q)$ 是非等价的上同调，给出了可扩展的实形变，而存在非等价的上同调 $\phi_8(0:q:0)$ 和 $\phi_8(0:0:q)$，它们仅给出不可扩展的无穷小形变，因为在写雅可比恒等式时，在相应的情况下出现了 t^2 项。

这给出了另外 **2** 个不同的实形变，我们得到 **2** 无穷小变形，它们在高阶上是不可扩展。

总结，我们得到 20 个非等价的无穷小变形 $\mathfrak{h}_2$，其中 2 不是真实的变形。

A. 实海森伯代数 $\mathfrak{h}_2(\mathbb{R})$

现在让我们看看是否存在更多的实 Heisenberg 代数 $\mathfrak{h}_2$ 的形变。[M1,M2,P] 的分类表明存在 6 个非同构的 5 维实 Lie 代数。在列出的那些中，确切地有 2 个可以作为 $\mathfrak{h}_2$ 的形变获得。（注意他们的 $A_{5,5}$ 代数是我们的 $d_6(0:0)$，而他们的 $A_{5,6}$ 代数（也是他们族 $A_{5,26}$ 中的通用元素对于 $p=0,\varepsilon=1$）是我们的 $d_7(0:0:0)$）。对于可解形变，我们有 3 个单形代数，从 2 参数族中我们得到了 $3\times3=9$ 个非等价形变，而从 3 参数族中我们获得了 8 个新的形变。这给出了所有的 20 上闭链。对于实数情况，我们检查了分类列表，并未找到任何可能的实数 $\mathfrak{h}_2$ 的无穷小形变的新候选者。

V. 总结

从二次上同调空间维数的计算中，我们知道有 20 个非等价的幂零 Heisenberg 李代数 $\mathfrak{h}_2$ 的无穷小形变。这里给出了那些可能的非等价上闭链的具体形式。结果表明，在得到的无穷小形变中，18 可以扩展到实形变，因为在 t 中没有出现高阶项，而 2 只是无穷小的。非等价形变的数量确实是 20。此外，所有变形的李代数都是可解的，在这些可解族中有一类是 “一般” 幂零的，在其中有两个不等价的：$\mu_t(d_4)(0:0)\cong\mu_t(d_7)(0:0)$，以及（通过基向量的变化 $e_1'=e_1+e_4$）$\mu_t(d_5)(0:0)\cong\mu_t(d_6)(0:0)=\mu_t(d_8)(0:0:0)$。

这一最后的观察提出了 Fialowski 和 Penkava 的一个老问题：一个可解的多参数李代数族是否总是有一个 “通用” 的幂零元素，且所有参数均为 0？我们的猜想是肯定的。

致谢：
我们衷心感谢匿名评审人提出的若干有用且重要的建议，这些意见有助于提升文章的表述和清晰度。

[F] A. Fialowski, “An example of formal deformations of Lie algebras,” *NATO Conference on Deformation Theory of Algebras and Applications*, Il ciocco, Italy, 1986, Proceedings, Kluwer, Dordrecht (1988,) pp. 375-401.

[FM] A. Fialowski, A. Mandal, “Leibniz algebra deformations of a Lie Algebra,” *J. of Math. Physics*, Vol. 49 (2008), 093512.

[FP1] A. Fialowski, M. Penkava, “Versal deformations of Three Dimensional Lie algebras as L_∞ algebras,” *Comm. Contemp. Math.*, Vol. 7 (2005), pp. 146-165.

[FP2] A. Fialowski, M. Penkava, "The moduli space of complex 5-dimensional Lie algebras," *J. of Algebra*, Vol. 458 (2016) pp. 422-444.

[Ma] L. Magnin, "Cohomologie Adjointe des Algebres de Lie de Heisenberg," *Comm. in Algebra*, Vol. 21 (1993), pp. 2101-2129.

[M1] G.M. Mubarakzyanov, "On solvable Lie algebras," *Izv. Vyssh. Ucsebn. Zaved. Mat.*, Vol. 32 (1) (1963), pp. 104-116. In Russian.

[M2] G.M. Mubarakzyanov, "Classification of real structures of Lie algebras of fifth order," *Izv. Vyssh. Ucsebn. Zaved. Mat.*, Vol. 32 (3) (1963), pp. 99-106. In Russian.

[NR] A. Nijenhuis, R.W. Richardson, "Deformations of Lie algebra structures," *J. Math. Mech.*, Vol. 17 (1967), pp. 89-105.

[SW] L. Snobl, P. Winternitz, "Classification and Identification of Lie Algebras," *AMS*, 2014.

[P] J. Patera, R.T. Sharp, P. Winternitz, H. Zassenhaus, "Invariants of Real low dimensional Lie algebras," *J. of Math. Physics*, Vol. 17 (1976), pp.986-994.