低维模拟李代数的导子的矩阵表示

IMED BASDOURI[1], BOUZID MOSBAHI[2]

摘要. 在这项工作中，我们研究了维数不超过四的 Mock-Lie 代数的导子的矩阵表示。使用矩阵方法，我们考察了它们的结构和性质，展示了这些导子如何帮助我们更好地理解 Mock-Lie 代数的代数性质。

1. 介绍

模拟李代数是一个配备双线性乘积的向量空间，满足两个关键条件：该乘积是交换的，并且它满足雅可比恒等式。这个雅可比恒等式也是李代数的基本性质之一，确保了涉及代数中三个元素的一种特定关系。

Mock-Lie 代数在文献中以各种名称出现，反映了不同数学社区的不同视角。在 Jordan 代数文献 [1, 2, 3] 中，这些结构被称为 Jacobi-Jordan 代数。在 [4] 中，它们被称作 Mock-Lie 代数，而在其他作品中，它们已经被使用不同的名字进行研究，包括 Lie-Jordan 代数和秩 3 的 Jordan 代数。

Mock-Lie 代数的基础研究在 [5] 中进行了介绍，其中系统地发展了它们的性质、提出了猜想并分析了等价表示。进一步的研究考察了它们的普遍包络代数以及诸如表示理论、叉乘和自同构群等基本代数性质 [1]。此外，Poonen 研究了在特征不等于 2 或 3 的代数闭域上维度低于七的 Mock-Lie 代数的分类 [6]。

本文通过关注四维 Mock-Lie 代数的导子矩阵表示，扩展了对 Mock-Lie 代数的分类。作为研究代数结构中一个基本概念的导子结构，是通过矩阵运算来考察的，以提供关于 Mock-Lie 代数的行为和相互作用的见解。通过对矩阵元素之间相互关系的分析，我们获得了对这些代数所遵循的代数框架更深入的理解。

此外，关于 Mock-Lie 代数的研究还通过最近的工作得到了补充，该工作在各种条件下分类了它们的理想，并强调了六维环境中存在无限多同构类的交换、结合代数 [9]。Jordan − Lie 超代数、反结合代数和 Jordan 代数之间的关系也在 [4] 中进行了探讨。此外，Zhevlakov[8] 建立了满足恒等式 $a^3 = 0$ 的 3 个幂零指数的 Jordan 代数包括 Mock-Lie 代数作为特殊情况。

在这项研究中，我们系统地考察了四维及以下的 Mock-Lie 代数的导子的矩阵表示。通过利用矩阵运算并探讨矩阵分量之间的相互作用，我们得出了有助于更广泛理解 Mock-Lie 代数结构的结果。

2. 预备知识

定义 2.1. 一个向量空间 L 在 $\mathbb{F}$ 上，其乘法 $\cdot : L \otimes L \to L$ 由 $(x, y) \mapsto x \cdot y$ 给出，使得

$$(\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha(x \cdot z) + \beta(y \cdot z), \quad z \cdot (\alpha x + \beta y) = \alpha(z \cdot x) + \beta(z \cdot y)$$

Date: 2025 年 4 月 22 日.

2020 *Mathematics Subject Classification.* 16W10,16D70.

Key words and phrases. 拟 Lie 代数，导子，矩阵表示.

当且仅当 $x, y, z \in L$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ 时，被称为一个代数。

定义 2.2. 一个代数 L 在 $\mathbb{F}$ 上带有李括号 $[\cdot,\cdot]$，如果它满足以下条件，则被称为模拟李代数：

(1) $[x, y] = [y, x]$ (commutativity)

(2) $[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0$ (Jacobi identity)

定义 2.3. 一个李代数 L 的线性变换 d 如果对于任何 $x, y \in L$，满足以下条件，则称为推导：

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)].$$

一个李代数 L 的所有导子构成 $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(L)$ 的一个子空间。这个子空间，配备括号 $[d_1, d_2] = d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1$，是一个李代数，记为 $\mathrm{Der}(L)$。

引理 2.4. 设 L 是一个有限维李代数，带有基 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$。那么，线性映射 $d \in Der(L)$ 当且仅当

$$d([e_i, e_j]) = [d(e_i), e_j] + [e_i, d(e_j)], \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

证明. 令 $d \in \mathrm{Der}(L)$。根据定义，对于所有的 $x, y \in L$，我们有

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)].$$

特别地，将其应用于基元素，我们得到

$$d([e_i, e_j]) = [d(e_i), e_j] + [e_i, d(e_j)], \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

反之，假设

$$d([e_i, e_j]) = [d(e_i), e_j] + [e_i, d(e_j)], \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

对于任意的 $x, y \in L$，我们可以写成

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^{n} b_j e_j.$$

然后，我们有

$$d([x, y]) = d\left(\sum_{i,j} a_i b_j [e_i, e_j]\right) = \sum_{i,j} a_i b_j d([e_i, e_j]).$$

利用假设，代入 $d([e_i, e_j]) = [d(e_i), e_j] + [e_i, d(e_j)]$，得到

$$d([x, y]) = \sum_{i,j} a_i b_j \left([d(e_i), e_j] + [e_i, d(e_j)]\right).$$

由于 d 是线性的，

$$d([x,y]) = \sum_i a_i[d(e_i), y] + \sum_j b_j[x, d(e_j)].$$

改写为 x 和 y 的形式，我们得到

$$d([x,y]) = [d(x), y] + [x, d(y)].$$

因此，d 满足导子性质，证明完成。 □

命题 2.5. 令 d 是有限维 *Mock-Lie* 代数 L 的一个导子，并令 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ 是 L 的一组基。然后，d 相对于这个有序基的矩阵表示由

$$d(e_1, e_2, \ldots, e_n) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)\begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix},$$

给出，其中元素 d_{ij} 是由 d 作用于基元素所确定的系数，即

$$d(e_j) = \sum_{i=1}^{n} d_{ij} e_i, \quad \textit{for all } j = 1, \ldots, n.$$

特别是，当 d 属于导数代数 $Der(L)$ 时，矩阵 (d_{ij}) 被称为导数相对于基 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ 的表示矩阵。

3. 主要结果

在本节中，我们使用满足定义 2.3条件下线性变换来研究 Mock-Lie 代数的导子。通过比较结构关系，我们确定了维数最多为 4 的代数的导子的矩阵表示。对于 $n \leq 4$ 的分类参考了文献 [5, 6, 7]，并在表 1 中进行了总结。

如表 1 所示，代数 $A_{0,1}, A_{0,1} \oplus A_{0,1}, A_{0,1} \oplus A_{0,1} \oplus A_{0,1}, A_{0,1}^4$ 的乘法运算是零。因此，我们专注于非交换代数，并排除对这些代数的进一步讨论。

定理 3.1. 一个二维 *Mock-Lie* 代数的导子相对于给定有序基的矩阵是

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ d_{21} & 2d_{11} \end{pmatrix},$$

其中矩阵的所有元素都是域 $\mathbb{F}$ 上的复数。

证明. 由于 d 是一个导子，它满足关系

$$d([x,y]) = [d(x), y] + [x, d(y)] \quad \forall x, y \in L.$$

对于具有 $e_1 \cdot e_1 = e_2$ 的 2 维 Mock-Lie 代数，考虑以下内容：

从 $d[e_1, e_1] = [d(e_1), e_1] + [e_1, d(e_1)]$，我们得到

$$d(e_2) = d_{11}e_1 + d_{21}e_2,$$

表 1. 模拟 Lie 代数的维度为 $n \leq 4$。

代数结构	产品	维度
$A_{0,1}$	—	1
$A_{0,1} \oplus A_{0,1}$	—	2
$A_{1,2}$	$e_1 \cdot e_1 = e_2$	2
$A_{0,1} \oplus A_{0,1} \oplus A_{0,1}$	—	3
$A_{1,2} \oplus A_{0,1}$	$e_1 \cdot e_1 = e_2$	3
$A_{1,3}$	$e_1 \cdot e_1 = e_2$, $e_3 \cdot e_3 = e_2$	3
$A_{0,1}^4$	—	4
$A_{1,2} \oplus A_{0,1}^2$	$e_1 \cdot e_1 = e_2$	4
$A_{1,3} \oplus A_{0,1}$	$e_1 \cdot e_1 = e_2$, $e_3 \cdot e_3 = e_2$	4
$A_{1,2} \oplus A_{1,2}$	$e_1 \cdot e_1 = e_2$, $e_3 \cdot e_3 = e_4$	4
$A_{1,4}$	$e_1 \cdot e_1 = e_2$, $e_1 \cdot e_3 = e_3 \cdot e_1 = e_4$	4
$A_{2,4}$	$e_1 \cdot e_1 = e_2$, $e_3 \cdot e_4 = e_4 \cdot e_3 = e_2$	4

这表明 $d_{12} = 0$ 和 $d_{22} = 2d_{11}$。

2. 对于 $d[e_1, e_2] = [d(e_1), e_2] + [e_1, d(e_2)]$，我们得到

$$0 = d(e_2) = d_{12}e_1 + d_{22}e_2,$$

所以 $d_{12} = 0$。

因此，关于二维拟李代数相对于指定基的导子的矩阵表示已经建立。 □

定理 3.2. *存在两种关于给定有序基的 3 维 Mock-李代数导子的矩阵表示。*

(A) 当三维 Mock-Lie 代数同构于 $A_{1,2} \oplus A_{0,1}$ 时，其在给定基下的导子的矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ d_{21} & 2d_{11} & d_{23} \\ d_{31} & 0 & d_{33} \end{pmatrix}.$$

(B) 当三维 Mock-Lie 代数同构于 $A_{1,3}$ 时，其在给定基下的导子的矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} d_{33} & 0 & -d_{31} \\ d_{21} & 2d_{33} & d_{23} \\ d_{31} & 0 & d_{33} \end{pmatrix},$$

其中矩阵的所有元素都是域 $\mathbb{F}$ 上的复数。

证明. *(A)* 将导出条件应用到给定的基上:

1. 对于 $d([e_1, e_1]) = [d(e_1), e_1] + [e_1, d(e_1)]$，我们得到：

$$d(e_2) = [d(e_1), e_1] + [e_1, d(e_1)].$$

将 $d(e_i)$ 表示为基础元素的形式为

$$d(e_i) = d_{i1}e_1 + d_{i2}e_2 + d_{i3}e_3,$$

我们得到：

$$d_{21}e_1 + d_{22}e_2 + d_{23}e_3 = 2d_{11}e_2.$$

因此，$d_{22} = 2d_{11}$，而 d_{21} 和 d_{23} 保持任意。

2. 对于 $d(e_3)$，由于 e_3 属于 $A_{0,1}$ 组件，因此独立保留：

$$d(e_3) = d_{31}e_1 + d_{33}e_3.$$

从而我们得出结论 $d_{32} = 0$。

总结而言，本情况下的导数矩阵取的形式如 *(A)* 所示。

(B) 一个导数 d 必须满足：

$$d([e_i, e_j]) = [d(e_i), e_j] + [e_i, d(e_j)], \quad \forall i, j.$$

将其应用到给定的基上：

对于 $d([e_1, e_3]) = [d(e_1), e_3] + [e_1, d(e_3)]$，我们得到：

$$d(e_1) = [d(e_1), e_3] + [e_1, d(e_3)].$$

将 $d(e_1)$ 表达为

$$d(e_1) = d_{11}e_1 + d_{12}e_2 + d_{13}e_3,$$

我们推导出：

$$d_{11}e_1 = d_{13}e_1 - d_{31}e_1,$$

这简化为 $d_{13} = -d_{31}$。

2. 对于 $d(e_2)$，利用结构方程，我们写为：

$$d(e_2) = d_{21}e_1 + d_{22}e_2 + d_{23}e_3.$$

从括号性质，我们得到 $d_{22} = 2d_{33}$。

3. 对于 $d(e_3)$，由于 e_3 具有相同的变换性质：

$$d(e_3) = d_{31}e_1 + d_{33}e_3.$$

因此，$d_{32} = 0$。

总结来说，这种情况下导数矩阵的形式如 *(B)* 所示。

因此，我们已经对两种情况建立了定理。 □

定理 3.3. *存在五种相对于给定有序基的 4 维拟 Lie 代数导子的矩阵表示。*

(A) 当 4 维 Mock-Lie 代数同构于 $A_{1,2} \oplus A_{0,1}^2$ 时，其在给定基下的导子的矩阵表示为：

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & 2d_{11} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & 0 & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & 0 & d_{43} & d_{44} \end{pmatrix}$$

(B) 当 4 维 Mock-Lie 代数同构于 $A_{1,3} \oplus A_{0,1}$ 时，其在给定基下的导子矩阵表示为：

$$\begin{pmatrix} d_{33} & 0 & -d_{31} & 0 \\ d_{21} & 2d_{33} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & 0 & d_{33} & 0 \\ d_{41} & 0 & d_{43} & d_{44} \end{pmatrix}$$

(C) 当 4 维 Mock-Lie 代数同构于 $A_{1,2} \oplus A_{1,2}$ 时，其在给定基下的导子的矩阵表示为：

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & 2d_{11} & d_{23} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 \\ d_{41} & 0 & d_{43} & 2d_{33} \end{pmatrix}$$

(D) 当 4 维 Mock-Lie 代数同构于 $A_{1,4}$ 时，其在给定基下的导子的矩阵表示为：

$$\begin{pmatrix} d_{44}-d_{33} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & 2d_{44}-2d_{33} & d_{23} & 0 \\ d_{31} & 0 & d_{33} & 0 \\ d_{41} & 2d_{31} & d_{43} & d_{44} \end{pmatrix}$$

(E) 当 4 维 Mock-Lie 代数同构于 $A_{2,4}$ 时，其在给定基下的导子矩阵表示为：

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & -d_{41} & -d_{31} \\ d_{21} & 2d_{11} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & 0 & 2d_{11}-d_{44} & 0 \\ d_{41} & 0 & 0 & d_{44} \end{pmatrix}$$

其中矩阵的所有元素都是域 $\mathbb{F}$ 上的复数。

证明. *(A)* 将推导条件应用到 $[e_1, e_1]$ 上，我们得到：

$$d(e_2) = [d(e_1), e_1] + [e_1, d(e_1)].$$

展开 $d(e_1) = d_{11}e_1$，我们获得：

$$d_{21}e_1 + d_{22}e_2 + d_{23}e_3 + d_{24}e_4 = 2d_{11}e_2.$$

因此，$d_{22} = 2d_{11}$，而 d_{21}, d_{23}, d_{24} 保持任意。类似地，将导出条件应用于 $d(e_3)$ 和 $d(e_4)$，我们得到：

$$d(e_3) = d_{31}e_1 + d_{33}e_3 + d_{34}e_4, \quad d(e_4) = d_{41}e_1 + d_{43}e_3 + d_{44}e_4.$$

这证实了 *(A)* 中的矩阵表示。

(B) 应用导出条件：

$$d(e_1) = [d(e_1), e_3] + [e_1, d(e_3)],$$

并展开 $d(e_1) = d_{11}e_1 + d_{12}e_2 + d_{13}e_3 + d_{14}e_4$，我们得到 $d_{13} = -d_{31}$。类似地，通过将导出条件应用于 $d(e_2)$、$d(e_3)$ 和 $d(e_4)$，我们得到 *(B)* 中的矩阵。

(C) 应用导出规则：

$$d(e_2) = [d(e_1), e_1] + [e_1, d(e_1)], \quad d(e_4) = [d(e_3), e_3] + [e_3, d(e_3)],$$

我们发现 $d_{22} = 2d_{11}$ 和 $d_{44} = 2d_{33}$，从而得出 *(C)* 中的矩阵形式。

(D) 应用导出条件：

$$d(e_2) = [d(e_1), e_1] + [e_1, d(e_1)],$$

我们得到 $d_{22} = 2(d_{44} - d_{33})$，这给出了 *(D)* 中的矩阵。

(E) 展开导数后，我们推导出对系数的约束条件，这导致了矩阵 *(E)*。

因此，在所有情况下，我们都得到了所需的矩阵表示。 □

数据可用性：没有数据支持这项研究。

利益冲突：作者声明他们没有利益冲突。

致谢：我们感谢审稿人提供的有益评论和建议，这些有助于改进本文。

References

1. Burde, D., & Fialowski, A. (2014). Jacobi – Jordan algebras. Linear Algebra and its Applications, 459, 586-594.
2. Agore, A. L., & Militaru, G. (2015). On a type of commutative algebras. Linear Algebra and its Applications, 485, 222-249.
3. Baklouti, A., & Benayadi, S. (2021). Symplectic Jacobi-Jordan algebras. Linear and Multilinear Algebra, 69(8), 1557-1578.
4. Okubo, S., & Kamiya, N. (1997). Jordan – Lie super algebra and Jordan – Lie triple system. Journal of algebra, 198(2), 388-411.
5. Zusmanovich, P. (2017). Special and exceptional mock-Lie algebras. Linear Algebra and its Applications, 518, 79-96.
6. Poonen, B. (2008). Isomorphism types of commutative algebras of finite rank over an algebraically closed field. Computational arithmetic geometry, 463, 111-120.
7. Burde, D., & Fialowski, A. (2014). Jacobi – Jordan algebras. Linear Algebra and its Applications, 459, 586-594.
8. Zhevlakov, K. A. (1966). Solvability and nilpotence of Jordan rings. Algebra i Logika, 5(3), 37-58.

9. Pouye, M., & Kpamegan, B. (2022). Extensions, crossed modules and pseudo quadratic Lie type superalgebras.
10. Sania, A., Imed, B., Mosbahi, B., & Saber, N. (2023). Cohomology of compatible BiHom-Lie algebras. arXiv preprint arXiv:2303.12906.
11. Zahari, A., Mosbahi, B., & Basdouri, I. (2023). Classification, Derivations and Centroids of Low-Dimensional Complex BiHom-Trialgebras. arXiv preprint arXiv:2304.06781.
12. Zahari, A., Mosbahi, B., & Basdouri, I. (2023). Classification, Derivations and Centroids of Low-Dimensional Complex BiHom-Trialgebras. arXiv preprint arXiv:2304.06781.
13. Mosbahi, B., Zahari, A., & Basdouri, I. (2023). Classification, α-Inner Derivations and α-Centroids of Finite-Dimensional Complex Hom-Trialgebras. arXiv preprint arXiv:2305.00471.
14. Mosbahi, B., Asif, S., & Zahari, A. (2023). Classification of tridendriform algebra and related structures. arXiv preprint arXiv:2305.08513.
15. Fiidow, M. A., Zahari, A., & Mosbahi, B. (2023). Quasi-Centroids and Quasi-Derivations of Low Dimensional Associative Algebras. arXiv preprint arXiv:2306.14331.
16. Asif, S., Wang, Y., Mosbahi, B., & Basdouri, I. (2023). Cohomology and deformation theory of $\mathcal{O}$-operators on Hom-Lie conformal algebras. arXiv preprint arXiv:2312.04121.
17. Mansuroglu, N., & Mosbahi, B. (2024). On structures of BiHom-Superdialgebras and their derivations. arXiv preprint arXiv:2404.12098.
18. Mansuroglu, N., & Mosbahi, B. (2024). Generalized derivations of BiHom-supertrialgebras. arXiv preprint arXiv:2404.12112.
19. Mainellis, E., Mosbahi, B., & Zahari, A. (2024). Cohomology of BiHom-Associative Trialgebras. arXiv preprint arXiv:2404.15567.
20. Mainellis, E., Mosbahi, B., & Zahari, A. (2024). Compatible Associative Algebras and Some Invariants. arXiv preprint arXiv:2405.18243.
21. Imed, B., & Mosbahi, B. (2024). Classification of (ρ, τ, σ)-derivations of two-dimensional left-symmetric dialgebras. arXiv preprint arXiv:2411.05716.
22. Imed, B., Lerbet, J., & Mosbahi, B. (2024). Quasi-Centroids and Quasi-Derivations of low-dimensional Zinbiel algebras. arXiv preprint arXiv:2411.09532.
23. Mosbahi, M., Elgasri, S., Lajnef, M., Mosbahi, B., & Driss, Z. (2021). Performance enhancement of a twisted Savonius hydrokinetic turbine with an upstream deflector. International Journal of Green Energy, 18(1), 51-65.
24. Mosbahi, M., Lajnef, M., Derbel, M., Mosbahi, B., Aricò, C., Sinagra, M., & Driss, Z. (2021). Performance improvement of a drag hydrokinetic turbine. Water, 13(3), 273.
25. Mosbahi, M., Derbel, M., Lajnef, M., Mosbahi, B., Driss, Z., Aricò, C., & Tucciarelli, T. (2021). Performance study of twisted Darrieus hydrokinetic turbine with novel blade design. Journal of Energy Resources Technology, 143(9), 091302.
26. Mosbahi, M., Lajnef, M., Derbel, M., Mosbahi, B., Driss, Z., Aricò, C., & Tucciarelli, T. (2021). Performance improvement of a Savonius water rotor with novel blade shapes. Ocean Engineering, 237, 109611.
27. Mosbahi, M., Derbel, M., Hannachi, M., Mosbahi, B., Driss, Z., Aricò, C., & Tucciarelli, T. (2023). Performance study of spiral Darrieus water rotor with V-shaped blades. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 237(21), 4979-4990.
28. Mosbahi, B., Zahari, A., Basdouri, I. (2023). Classification, α-Inner Derivations and α-Centroids of Finite-Dimensional Complex Hom-Trialgebras. Pure and Applied Mathematics Journal, 12(5), 86-97. https://doi.org/10.11648/j.pamj.20231205.12
29. ABDOU, A. Z., & MOSBAHI, B. (2024). CLASSIFICATION OF COMPATIBLE ASSOCIATIVE ALGEBRAS AND SOME INVARIANTS. Available at SSRN 4877916.

30. Makhlouf, A., & Zahari, A. (2020). Structure and classification of Hom-associative algebras. Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica, 24(1), 79-102.
31. Zahari, A.; Bakayoko, I. On BiHom-Associative dialgebras.Open Journal of Mathematical Sciences, Vol. 7, No. 1 (2023).pp. 96-117.
32. Imed, B., Lerbet, J., & Mosbahi, B. (2024). Central derivations of low-dimensional Zinbiel algebras. arXiv preprint arXiv:2411.15642.
33. Imed, B., & Mosbahi, B. (2024). Rota-type operators on 2-dimensional dendriform algebras. arXiv preprint arXiv:2411.15358.

[10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33]

[1]Department of Mathematics, Faculty of Sciences, University of Gafsa, Gafsa, Tunisia

[2]Department of Mathematics, Faculty of Sciences, University of Sfax, Sfax, Tunisia

Email address: [1]basdourimed@yahoo.fr

Email address: [2]mosbahi.bouzid.etud@fss.usf.tn