均匀可分解的 K_v 分解成 1-因子和奇数 n-星因子

李哲润和梅丽莎 · 凯拉宁

数学科学系

密歇根科技大学

2025 年 4 月 22 日

摘要

我们考虑将 K_v 均匀分解为子图，使得每个解析类仅包含与同一图形同构的块。对于所有解析类要么是 K_2 要么是 $K_{1,n}$ 的情况，其中 n 为奇数，我们给出一个部分解。

1 介绍

令 $G = (V, E)$ 是一个图。图 G 的一个 $\mathcal{H}$-*decomposition* 是一组边不相交的子图 $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \ldots, H_a\}$，使得 G 中的每条边恰好出现在其中一个图 $H_i \in \mathcal{H}$ 中。

子图 $H_i \in \mathcal{H}$ 被称为区组。一个 $\mathcal{H}$-分解被称为可解的，如果区组在 $\mathcal{H}$ 中可以被划分为类（或因子）F_i，使得每个 F_i 都是 G 的生成子图。可解析的 $\mathcal{H}$ 分解也称为 G 的 $\mathcal{H}$ 因子分解，其类被称为 $\mathcal{H}$ 因子。一个 $\mathcal{H}$-分解称为 $uniformly\ resolvable$ ，如果每个因子 F_i 都由所有同构的块组成。

在均匀可解的 $\mathcal{H}$-分解的情况下，存在性结果可以根据 $\mathcal{H}$ 进行分类：当 $\mathcal{H}$ 是 [7, 23, 25, 26] 中阶数最多为五的两个完全图的集合时；当 $\mathcal{H}$ 是 [10, 11, 19] 中具有两个、三个或四个顶点的两个或三个路径的集合时；对于 [9] 中的 $\mathcal{H} =$

$\{P_3, K_3+e\}$；对于 [14] 中的 $\mathcal{H}=\{K_3, K_{1,3}\}$；对于 [21] 中的 $\mathcal{H}=\{C_4, P_3\}$；以及对于 [22] 中的 $\mathcal{H}=\{K_3, P_3\}$。

如果 $\mathcal{H}=\{H_1, H_2\}$，那么我们还可以考虑包含 H_1 的因子有多少个以及包含 H_2 的因子有多少个。我们令 (H_1, H_2)-$URD(v;r,s)$ 表示一个均匀可解析分解 K_v 成 r 类别，每个类别仅包含 H_1 的副本和 s 类别，每个类别仅包含 H_2 的副本。在本文中，我们考虑了 $\{H_1, H_2\}=\{K_2, K_{1,n}\}$ 的存在性问题。

虽然一般情况 $(K_2, K_{1,n})$-$URD(v;r,s)$ 仍然是开放的并且正在发展中，我们观察到用于大多数 (r,s) 情况的标准方法不适用于解决 1 因子数量较少的情况。因此，我们单独研究了这些情况。关于极端情况，我们有以下发现。

一个 K_2-分解的 G 被称为一个 1-因子分解，其因子被称为 1-因素。我们令 I 表示一个 1-因子。众所周知，当 v 是偶数时（[20]），K_v 的 1-因子分解存在。

如果 $n=3$，即 $(K_2, K_{1,3})$-$URD(v;r,s)$ 的情况，分解存在的充要条件在 [5] 中给出。如果 $n=4$，即 $(K_2, K_{1,4})$-$URD(v;r,s)$ 的情况，分解存在的充要条件在 [12] 中给出。如果 $n=5$，即 $(K_2, K_{1,5})$-$URD(v;1,s)$ 的情况，分解存在的充要条件在 [16] 中给出。这一结果被推广到了奇数 $n\geq 3$ 的情况下 $(K_2, K_{1,n})$-$URD(v;1,s)$，并在 [17] 中完全解决。

在这篇论文中，我们关注所有 (r,s) 对中的 $(K_2, K_{1,n})$-$URD(v;r,s)$，其中 $r,s\geq 1$，并且我们给出了一个关于 $(K_2, K_{1,n})$-URD(v; r,s) 存在性问题的部分解。

2 必要条件

引理 2.1. 令 $n\geq 3$ 为一个奇数。如果存在一个 $(K_2, K_{1,n})-URD(v;r,s)$，则存在整数 x，$0\leq x\leq \lfloor\frac{v-1}{2n}\rfloor$，使得 $s=(n+1)x$ 和 $r=v-1-2nx$。此外，如果 $r>0$，则 $v\equiv 0 \pmod 2$；如果 $s>0$，则 $v\equiv 0 \pmod{(n+1)}$。

证明. 假设存在一个 $(K_2, K_{1,n})-URD(v;r,s)$.，通过计算出现在因子中的 K_v 的边的数量，可以得出结论。

$$r\frac{v}{2}+s\frac{nv}{n+1}=\frac{v(v-1)}{2},$$

并且因此

$$(n+1)r + 2ns = (n+1)(v-1). \tag{1}$$

令 S 为 s $K_{1,n}$-因子的集合，并令 R 为 r1-因子的集合。由于 R 的因子是次数为 1 的正则图，K_v 的每个顶点与 R 中的 r 条边和 S 中的 $(v-1)-r$ 条边相关联。假设任何固定顶点出现在 x 个 S 因子中，其度数为 n，并且出现在 y 个 S 因子中，其度数为 1。因为

$$x + y = s \text{ and } nx + y = v - 1 - r,$$

方程（1）给出

$$(n+1)(v-1-nx-y) + 2n(x+y) = (n+1)(v-1).$$

这表明 $y = nx$ 和 $s = (n+1)x$。

进一步，在方程（1）中用 $s = (n+1)x$ 替换得到 $r = v - 1 - 2nx$，其中 $x \leq \frac{v-1}{2n}$（因为 r 是一个非负整数）。

最后，如果 $r > 0$，则 v 必须是偶数；而如果 $s > 0$，则必然 $n+1$ 整除 v (因为 $K_{1,n}$ 是一个有 $n+1$ 个顶点的图)。 $\square$

如果存在一个 $(K_2, K_{1,n}) - URD(v; r, s)$ 具有 $s = 0$，则结果是一个 1-因子分解（见 [20]）。因此，我们将考虑具有 $s > 0$ 的情况。因此，$v \equiv 0 \pmod{n+1}$，我们将证明所有可能的 $(r,s) \in \mathcal{J} = \{(r,s) | r = v - 1 - 2nx, s = (n+1)x, \text{ with } 0 \leq x \leq \lfloor \frac{v-1}{2n} \rfloor\}$ 存在一个 $(K_2, K_{1,n})$-$URD(v; r, s)$。

3 加权图和初步结果

设 G 是一个图, t 是一个正整数。一个 *weighted graph* $G_{(t)}$ 是在 $V(G) \times \mathbb{Z}_t$ 上的图，其边集为 $\{\{x_i, y_j\} : \{x,y\} \in E(G), i,j \in \mathbb{Z}_t\}$。我们将从 G 构造 $G_{(t)}$ 称为“giving weight t to G ”。

对于某个正整数 m，令 K_m 是一个完全图。然后，对于某个正整数 n，令 $K_{m(n+1)}$ 是通过给 K_m 赋予权重 $n+1$ 得到的图。然后对于每个 $x \in V(K_m)$，令 K^x_{n+1} 表示一个顶点集为 $V(K^x_{n+1}) = \{x_i | x \in K_m, i \in \mathbb{Z}_{n+1}\}$ 的完全图。注

意每个 K_{n+1}^x 都是彼此不相交的。因此，对于 $v=m(n+1)$，我们可以将完全图 K_v 视为 $K_v=K_{m(n+1)}\cup\Big(\bigcup_{x\in V(K_m)}K_{n+1}^x\Big)$。

对于我们的目的，我们将 $K_{m(n+1)}$ 分解为加权循环 $C_{m(n+1)}$。我们从两个关于完全图分解为循环的众所周知的结果开始。

引理 3.1. *(Alspach, Brian (2001))：* 对于正奇整数 m 和 n 满足 $3\le m\le n$，图 K_n 可以分解为长度为 m 的圈当且仅当 K_n 中的边数是 m 的倍数。

引理 3.2. *(Alspach, Brian (2001))：* 对于正偶数整数 m 和 n，当 $4\le m\le n$ 时，图 K_n-I 可以分解为长度为 m 的圈当且仅当 K_n-I 中的边的数量是 m 的倍数。

显然，m 整除 $|E(K_m)|$，因此如果 m 是奇数，则根据引理 3.1，我们可以将 K_m 分解为 m-循环。m-循环在分解中的数量是：

$$|E(K_m)|=\frac{m(m-1)}{2}\cdot\frac{1}{m}=\frac{m-1}{2}.$$

类似地，如果 m 是偶数，则根据引理 3.2，我们可以将 K_m 分解为 I 和 $\frac{m-2}{2}$ m-圈。

现在给 $n+1$ 权重到 K_m 和每个 m-循环, C_m 以获得 $K_{m(n+1)}$ 和加权的 m-循环的副本, $C_{m(n+1)}$。一个 m-循环和一个加权 m-循环如图 1所示。因此, 我们将 $K_{m(n+1)}$ 分解为 $\frac{m-1}{2}$ 加权的 m-周期, 当 $m\ge 3$ 为奇数时是 $C_{m(n+1)}$。我们还有将 $K_{m(n+1)}$ 分解为 $I_{(n+1)}$ 和 $\frac{m-2}{2}$ 加权的 m-周期, $C_{m(n+1)}$, 对于偶数 $m\ge 4$。令 $C_{m(n+1)}^k$ 表示 k^{th} 加权的 m-圈。如果 $m\ge 3$ 是奇数，则 $i\in\{1,2,\ldots,\frac{m-1}{2}\}$，如果 $m\ge 4$ 是偶数，则 $k\in\{1,2,\ldots,\frac{m-2}{2}\}$。注意所有 $C_{m(n+1)}^i$ 都有相同的顶点集，但它们都是 $K_{m(n+1)}$ 的互不相交的子图。

通过这种分解, 我们现在将 $K_v=(K_{m(n+1)})\cup\Big(\bigcup_{x\in V(K_m)}K_{n+1}^x\Big)$ 视为如下。

$$\begin{aligned}K_v&=(K_{m(n+1)})\cup\Big(\bigcup_{x\in V(K_m)}K_{n+1}^x\Big)\\&=\begin{cases}\Big(\cup_{k=1}^{\frac{m-1}{2}}C_{m(n+1)}^k\Big)\cup\Big(\bigcup_{x\in V(K_m)}K_{n+1}^x\Big), & \text{if } m \text{ is odd}\\ \Big(\cup_{k=1}^{\frac{m-2}{2}}C_{m(n+1)}^k\Big)\cup\Big(\bigcup_{x\in V(K_m)}K_{n+1}^x\Big)\cup(I_{(n+1)}), & \text{if } m \text{ is even}\end{cases}\end{aligned}\tag{2}$$

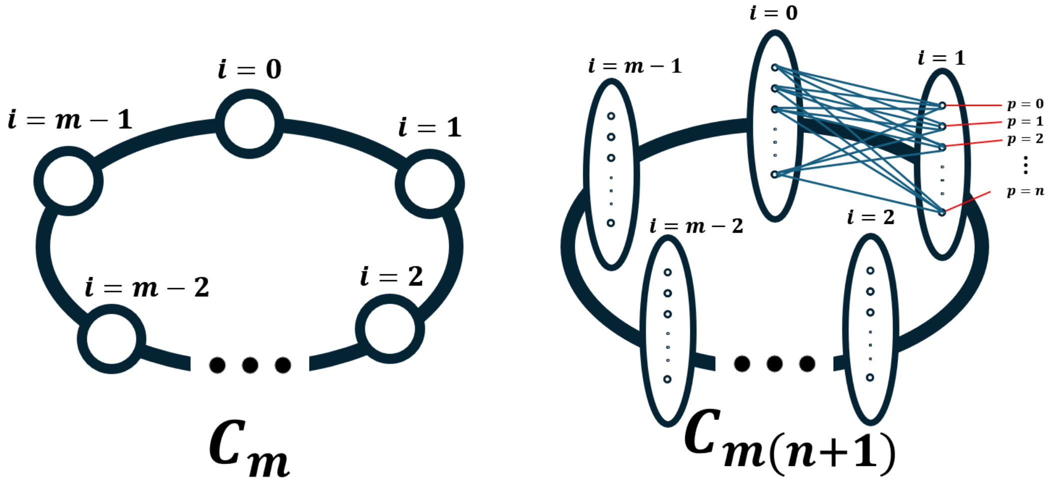

图 1: 一个循环 C_m 和一个加权循环 $C_{m(n+1)}$

3.1 几乎均匀可解析分解

对于顶点集为 $V(G)\times\mathbb{Z}_t$ 的加权图 $G_{(t)}$，令 $J(G_{(t)})$ 是一个子图 $G_{(t)}$，具有 $V(J(G_{(t)}))=V(G_{(t)})$ 和边集 $\{\{x_i,y_i\}:\{x,y\}\in E(G),i\in\mathbb{Z}_t\}$。令 $H=G_{(t)}-J(G_{(t)})$ 为顶点集为 $V(G)\times\mathbb{Z}_t$ 且边集为 $\{\{x_i,y_j\}:\{x,y\}\in E(G),i,j\in\mathbb{Z}_t,i\neq j\}$ 的图。如果存在一个 $(X,Y)-URD(H;r,s)$，则我们说 $G_{(t)}$ 具有一个几乎均匀可解分解，记为 (X,Y)-$AURD(G_{(t)};r,s)$。

在本节中，我们构造给定加权循环和一个加权边的 $AURD$。

假设 $C_m=(0,1,\dots,m-1)$ 是一个 m-循环，并且 $C_{m(n+1)}$ 是相应的带权重的 m-循环（权重为 $n+1$）。然后在 C_m 中的边是有向边，例如，$(x,x+1)$ 到 $x\in\{0,1,2,\dots,m-1\}$。顶点集为 $C_{m(n+1)}$ 是

$$V(C_{m(n+1)})=V(C_m)\times\mathbb{Z}_{n+1}$$

边集为 $C_{m(n+1)}$ 是

$$E(C_{m(n+1)}=\{(x_i,(x+1)_j)|(x,x+1)\in E(C_m);i,j\in\mathbb{Z}_{n+1}\}.$$

我们定义边 $(x_i,(x+1)_j)$ 的差为 $d=j-i \pmod{n+1}$。

我们的第一个结果给出了将 $C_{m(n+1)}$ 分解为 1 因子的等价形式。然而，对于我们来说，关键是我们要将其视为几乎均匀可解析分解。

引理 3.3. *存在一个* $(K_2,K_{1,n})-AURD(C_{m(n+1)};2n,0)$ *对于任何奇数* n *和整数* $m\geq 3$。

证明. 如果 $m \geq 3$ 是偶数,我们将通过以下方法构造一个 $(K_2, K_{1,n})-AURD(C_{m(n+1)}; 2n, 0)$。不失一般性，假设 $C_m = (0, 1, \ldots, m-1)$ 是 m-循环。令 $C_{m(n+1)}$ 为带权重的 m-循环（权重为 $n+1$）。

如果 $d \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 是奇数，我们将按以下方式构造 $C_{m(n+1)}$ 的一对 1-因子 $B_{1_a,d}$ 和 $B_{1_b,d}$。对于任意的 d，令

$$\begin{aligned}
B_{1_a,d} =& \{((x)_i, (x+1)_{i+d}) | x \in \mathbb{Z}_m \text{ and even } i \in \mathbb{Z}_{n+1}\} \\
B_{1_b,d} =& \{((x)_i, (x+1)_{i+d}) | x \in \mathbb{Z}_m \text{ and odd } i \in \mathbb{Z}_{n+1}\}.
\end{aligned}$$

如果 $d \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 是偶数，我们构造一对 1-因子 $B_{2_a,d}$ 和 $B_{2_b,d}$ 的 $C_{m(n+1)}$ 如下。对于任意的 d，令

$$\begin{aligned}
B_{2_a,d} =& \{((x)_i, (x+1)_{i+d}), ((x+1)_{i+1}, (x+2)_{i+d+1}) | \text{ even } x \in \mathbb{Z}_m \text{ and even } i \in \mathbb{Z}_{n+1}\} \\
B_{2_b,d} =& \{((x)_i, (x+1)_{i+d}), ((x+1)_{i+1}, (x+2)_{i+d+1}) | \text{ even } x \in \mathbb{Z}_m \text{ and odd } i \in \mathbb{Z}_{n+1}\}
\end{aligned}$$

通过这种构造，对于给定的 $d \in \{1, 2, \ldots, n\}$，我们得到两个包含所有差值为 d 的边的 $C_{m(n+1)}$ 的 1-因子。因为我们能够为每个 d 构造两个 1-因子，所以我们成功构造了一个 $(K_2, K_{1,n}) - AURD(C_{m(n+1)}; 2n, 0)$。

如果 $m \geq 3$ 是奇数,我们将通过以下方法构造一个 $(K_2, K_{1,n})-AURD(C_{m(n+1)}; 2n, 0)$。

如果 $n+1 \equiv 2 \pmod 4$，令 $D = \{1, 2, \ldots, n\}$，并令 $D' = \{d | d \equiv 3 \pmod 4 \text{ and } d \in D\}$。对于任何 $d \in D'$，我们将用两个偶数差 $d-1$ 和 $d+1$ 匹配 d，以构建三对 1-因子 $B_{3_a,d}$ 和 $B_{3_b,d}$，$B_{4_a,d}$ 和 $B_{4_b,d}$，以及 $B_{5_a,d}$ 和 $B_{5_b,d}$ 的 $C_{m(n+1)}$ 如下。对于每个 $d \in D'$，令

$$\begin{aligned}
B_{3_a,d} = \{&((0)_i, (1)_{i+d}), ((x)_i, (x+1)_{i+(d-1)}), ((x+1)_{i+1}, (x+2)_{i+1+(d-1)}) | \\
&\text{odd } x \in \mathbb{Z}_m, \text{ even } i \in \mathbb{Z}_{n+1}\} \\
B_{3_b,d} = \{&((0)_i, (1)_{i+d}), ((x)_i, (x+1)_{i+(d-1)}), ((x+1)_{i+1}, (x+2)_{i+1+(d-1)}) | \\
&\text{odd } x \in \mathbb{Z}_m, \text{ and odd } i \in \mathbb{Z}_{n+1}\},
\end{aligned}$$

$$B_{4_a,d} = \{((1)_i,(2)_{i+d}),((x)_i,(x+1)_{i+(d+1)}),((x+1)_{i+1},(x+2)_{i+1+(d+1)})| \\ x \neq 0,\ \text{even } x \in \mathbb{Z}_m,\ \text{and even } i \in \mathbb{Z}_{n+1}\}$$

$$B_{4_b,d} = \{((1)_i,(2)_{i+d}),((x)_i,(x+1)_{i+(d+1)}),((x+1)_{i+1},(x+2)_{i+1+(d+1)})| \\ x \neq 0,\ \text{even } x \in \mathbb{Z}_m,\ \text{and odd } i \in \mathbb{Z}_{n+1}\},$$

$$B_{5_a,d} = \{((0)_i,(1)_{i+(d-1)}),((1)_{i+1},(2)_{(i+1)+(d+1)}),((x)_i,(x+1)_{i+d})| \\ x \neq 0,1, x \in \mathbb{Z}_m,\ \text{and even } i \in \mathbb{Z}_{n+1}\}$$

$$B_{5_b,d} = \{((0)_i,(1)_{i+(d-1)}),((1)_{i+1},(2)_{(i+1)+(d+1)}),((x)_i,(x+1)_{i+d})| \\ x \neq 0,1, x \in \mathbb{Z}_m,\ \text{and odd } i \in \mathbb{Z}_{n+1}\}.$$

然后，对于任意给定的奇数 $d \in D\backslash D'$，即 $d \equiv 1 \pmod 4$，我们构造一对 1-因子 $B_{6_a,d}$ 和 $B_{6_b,d}$ 的 $C_{m(n+1)}$ 如下。对于每个 $d \in D\backslash D'$，令

$$B_{6_a,d} = \{((x)_i,(x+1)_{i+d})|x \in \mathbb{Z}_m \text{ and odd } i \in \mathbb{Z}_{n+1}\}$$
$$B_{6_b,d} = \{((x)_i,(x+1)_{i+d})|x \in \mathbb{Z}_m \text{ and even } i \in \mathbb{Z}_{n+1}\}.$$

通过这种构造，对于给定的 $d \in \{1,2,3,\ldots,n\}$，我们得到两个包含所有差值为 d 的边的 $C_{m(n+1)}$ 的 1-因子。因此，我们对任意的 $n+1 \equiv 2 \pmod 4$ 都有一个 $(K_2, K_{1,n}) - AURD(C_{m(n+1)}; 2n, 0)$。

如果 $n+1 \equiv 0 \pmod 4$，则令 $D = \{1,2,\ldots,n\}$。在这种情况下，D 包含奇数个偶数差。因此，为了将两个偶数差与一个奇数差配对，如同之前的构造，我们将构建两个 1-因子 $B_{7_a,2}$ 和 $B_{7_b,2}$ 的 $C_{m(n+1)}$，这两个只包含差值为 $d=2$ 的边。

$$B_{7_a,2} = \{((x)_i,(x+1)_{i+2}),((x)_{(i+1)},(x+1)_{(i+1)+2})| \\ x \in \mathbb{Z}_m, i \in \mathbb{Z}_{n+1},\ \text{and } i \equiv 0 \pmod 4\}$$

$$B_{7_b,2} = \{((x)_i,(x+1)_{i+2}),((x)_{(i+1)},(x+1)_{(i+1)+2})| \\ x \in \mathbb{Z}_m, i \in \mathbb{Z}_{n+1},\ \text{and } i \equiv 2 \pmod 4\}.$$

然后，$D\backslash\{2\}$ 包含偶数个偶数差。现在，令 $D' = \{d|d \equiv 1 \pmod 4, d \in D, \text{ and } d \neq 1\}$。对于任何 $d \in D'$，我们匹配两个偶数差 $d-1$ 和 $d+1$ 来构造三个对 1-因子 $B_{8_a,d}$ 和 $B_{8_b,d}$，$B_{9_a,d}$ 和 $B_{9_b,d}$，以及 $B_{10_a,d}$ 和 $B_{10_b,d}$ 的 $C_{m(n+1)}$

如下：

$$B_{8_a,d}=\{((0)_i,(1)_{i+d}),((x)_i,(x+1)_{i+(d-1)}),((x+1)_{i+1},(x+2)_{i+1+(d-1)})|$$
$$\text{odd } x\in\mathbb{Z}_m \text{ and even } i\in\mathbb{Z}_{n+1}\}$$
$$B_{8_b,d}=\{((0)_i,(1)_{i+d}),((x)_i,(x+1)_{i+(d-1)}),((x+1)_{i+1},(x+2)_{i+1+(d-1)})|$$
$$\text{odd } x\in\mathbb{Z}_m \text{ and odd } i\in\mathbb{Z}_{n+1}\},$$

$$B_{9_a,d}=\{((1)_i,(2)_{i+d}),((x)_i,(x+1)_{i+(d+1)}),((x+1)_{i+1},(x+2)_{i+1+(d+1)})|$$
$$x\neq 0,\ \text{even } x\in\mathbb{Z}_m,\ \text{and even } i\in\mathbb{Z}_{n+1}\}$$
$$B_{9_b,d}=\{((1)_i,(2)_{i+d}),((x)_i,(x+1)_{i+(d+1)}),((x+1)_{i+1},(x+2)_{i+1+(d+1)})|$$
$$x\neq 0,\ \text{even } x\in\mathbb{Z}_m,\ \text{and odd } i\in\mathbb{Z}_{n+1}\},$$

$$B_{10_a,d}=\{((0)_i,(1)_{i+(d-1)}),((1)_{i+1},(2)_{(p+1)+(d+1)}),((x)_i,(x+1)_{i+d})|$$
$$x\neq 0,1,x\in\mathbb{Z}_m,\ \text{and even } i\in\mathbb{Z}_{n+1}\}$$
$$B_{10_b,d}=\{((0)_i,(1)_{i+(d-1)}),((1)_{i+1},(2)_{(p+1)+(d+1)}),((x)_i,(x+1)_{i+d})|$$
$$x\neq 0,1,x\in\mathbb{Z}_m,\ \text{and odd } i\in\mathbb{Z}_{n+1}\}.$$

然后，对于任意给定的奇数 $d\in D\backslash D'$，我们构造 $C_{m(n+1)}$ 的一对 1-因子 $B_{11_a,d}$ 和 $B_{11_b,d}$ 如下：

$$B_{11_a,d}=\{((x)_i,(x+1)_{i+d})|x\in\mathbb{Z}_m \text{ and odd } i\in\mathbb{Z}_{n+1}\}$$
$$B_{11_b,d}=\{((x)_i,(x+1)_{i+d})|x\in\mathbb{Z}_m \text{ and even } i\in\mathbb{Z}_{n+1}\}$$

通过这种构造，对于给定的 $d\in\{1,2,3,\ldots,n\}$，我们获得两个 1 因子 $C_{m(n+1)}$，它们包含所有具有差值 d 的边。因此，我们对任何 $n+1\equiv 0 \pmod 4$ 都有一个 $(K_2,K_{1,n})-AURD(C_{m(n+1)};2n,0)$。

因此，对于任意奇数 $n>1$，存在一个 $(K_2,K_{1,n})-AURD(C_{m(n+1)};2n,0)$。 □

引理 3.4. *存在一个 $(K_2,K_{1,n})-AURD(C_{m(n+1)};0,n+1)$ 对于任何奇数 $n>1$ 和整数 $m\geq 3$。*

证明. 假设 $C_m=(0,1,\ldots,m-1)$ 是 m-循环，$C_{m(n+1)}$ 是加权的 m-循环。我们给出 $n+1$ n-星因子如下。对于每个 $j\in\mathbb{Z}_{n+1}$，令

$$S_j=\{(x_j;(x+1)_{j+1},(x+1)_{j+2},\ldots,(x+1)_{j+n})|x\in\mathbb{Z}_m\}.$$

然后, $E(C_{m(n+1)})$ 中差值为 $d\in\{1,2,3,\ldots,n\}$ 的所有边在某个 S_j 中恰好出现一次。因此, 对于任何奇数 $n>1$ 都存在一个 $(K_2,K_{1,n})-AURD(C_{m(n+1)};0,n+1)$。 □

令 $m\geq 4$ 为一个偶数, 并考虑顶点集 $V(K_m)\times\mathbb{Z}_{n+1}$ 上的加权图 $K_{m(n+1)}$。令 I 是 K_m 的一个 1-因子，具有 $\frac{m}{2}$ 条边 $\{x,y\}\in E(I)$，并且 $I_{(n+1)}$ 是对应的加权 1-因子 $K_{m(n+1)}$。然后，对于每个 $d\in\{1,2,\ldots,n\}$，我们可以取以下 1 因子的 $I_{(n+1)}$：

$$B_d=\{\{(x)_i,(y)_{i+d}\}|i\in\mathbb{Z}_{n+1}\}.$$

唯一没有出现的边是从 $I_{(n+1)}$ 到 $J(I_{(n+1)})=\{\{x_i,y_i\}|\{x,y\}\in E(I),i\in\mathbb{Z}_{(n+1)}\}$ 的边。因此，我们得到以下结果。

引理 3.5. 对于任何奇数 $n>1$，存在一个 $(K_2,K_{1,n})-AURD(I_{(n+1)};n,0)$。

由引理 3.3 和引理 3.4，我们已经证明了 $C_{m(n+1)}-J(C_{m(n+1)})$ 可以分解为 $2n$ 1-因子或 $n+1$ n-星因子。为了找到 K_v 的均匀可分解分解，我们现在必须转向寻找 $J(K_{m(n+1)})\cup\left(\bigcup_{x\in V(K_m)}K^x_{n+1}\right)$ 的分解。

4 差值 0 和内部边

回顾，由引理 3.1和 3.2，$K_{m(n+1)}$ 已按如下方式分解:

$$K_{m(n+1)}=\begin{cases}\left(\cup_{k=1}^{\frac{m-1}{2}}C^k_{m(n+1)}\right), & \text{if } m \text{ is odd}\\ \left(\cup_{k=1}^{\frac{m-2}{2}}C^k_{m(n+1)}\right)\cup(I_{(n+1)}), & \text{if } m \text{ is even.}\end{cases}$$

记每个加权循环为 $C^k_{m(n+1)}$, 其中当 m 为奇数时为 $1\leq k\leq t$ 与 $t=\frac{m-1}{2}$, 而当 m 为偶数时则为 $t=\frac{m-2}{2}$。回忆一下, 所有 $C^k_{m(n+1)}$ 都有相同的顶点集, 但它们都是 $K_{m(n+1)}$ 的互不相交的子图。由于每个 $C^k_{m(n+1)}$ 都具有 $(K_2,K_{1,n})-AURD(C_{m(n+1)};0,n+1)$ 分解或 $(K_2,K_{1,n})-AURD(C_{m(n+1)};2n,0)$ 分解，因

此 $\cup_{k=1}^{t} C^{k}_{m(n+1)}$ 具有几乎均匀可分解为 r K_2-因子和 s $K_{1,n}$-因子的形式，其中 $(r,s) \in \mathcal{J} = \{(r,s)|r = 2nx, s = (n+1)(t-x),\ \text{for any non negative integer } x \leq t\}$。

回忆一下，加权图 $K_{m(n+1)}$ 的 $AURD$ 存在当且仅当存在 H 的 URD 使得 $H = K_{m(n+1)} - J(K_{m(n+1)})$。在引理 4.1和 4.2中，我们将把 $\overline{H} = K_v - H$ 分解为 1 因子。注意 $\overline{H} = J(K_{m(n+1)} \cup \Big(\bigcup_{x\in V(K_m)} K^{x}_{n+1}\Big)$。

引理 4.1. 令 $v = m(n+1)$ 为某个奇数 $m \geq 3$，以及奇数 $n \geq 3$。存在一个 $(K_2, K_{1,n}) - URD(\overline{H}; m + (n-1), 0)$。

证明. 对于任意边 $\{x, y\} \in K_m$，令 $R^{x,y} = \{\{x_i, y_i\}|i \in \mathbb{Z}_{n+1}\}$ 表示来自 $E(J(K_{m(n+1)})$ 的 $n+1$ 条边的集合。对于任意顶点 $x \in V(K_m)$，令 $R^x = \{\{x_i, x_{i+1}\}|\ \text{even } i \in \mathbb{Z}_{n+1}\}$ 表示来自 $E(K^{x}_{n+1})$ 的边的集合。然后，对于每个 $x \in K_m$，定义 $A_x \cup B_x$ 为 1 因子的 $\overline{H}$，如下所示:

$$\begin{aligned} A_x =& \{R^{x-1,x+1}, R^{x-2,x+2}, R^{x-3,x+3}, \cdots, R^{x-\frac{m-1}{2}, x+\frac{m-1}{2}}\} \\ B_x =& \{R^x\} \end{aligned}$$

这生成了 m 1 因子的 $\overline{H}$。注意, 对于任意的 $x \in V(K_m)$, B_x 是 K^{x}_{n+1} 的一个 1 因子。由于 $n+1$ 是偶数, 将 $K^{x}_{n+1} - B_x$ 分解为 $n-1$ 1 因子是显而易见的。令 B^{k}_{x} 为此分解中的 k^{th} 1 因子。然后对于 $k = 1, 2, \ldots, n-1$, $\cup_{x\in V(K_m)} B^{k}_{x}$ 给出了剩余的 $n-1$ 1 因子的 $\overline{H}$。因此, 存在一个 $(K_2, K_{1,n}) - URD(\overline{H}; m+n-1, 0)$。 □

引理 4.2. 令 $v = m(n+1)$ 表示某个偶数 $m \geq 4$ 和某个奇数 $n \geq 3$。存在一个 $(K_2, K_{1,n}) - URD(\overline{H}; m + n - 1, 0)$。

证明. 因为 m 是偶数，存在一个 1-因子分解 K_m，其中包含 $m-1$ 1-因子。令 $F_1, F_2, \ldots, F_{m-1}$ 表示 $m-1$ 1-因子。对于每条边 $\{x, y\} \in F_k$，其中 $k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$，令 $R^{x,y} = \{\{x_i, y_i\}|i \in \mathbb{Z}_{n+1}\}$ 是来自 $J(K_{m(n+1)})$ 的边集。然后，对于 $k = 1, 2, \ldots, m-1$，定义 $A_k = \cup_{\{x,y\}\in F_k} R^{x,y}$ 为 $J(K_{m(n+1)})$ 的一个 1-因子。这总共产生了 $m-1$ 1-因子的 $\overline{H}$。

对于任何 $x \in V(K_m)$，存在一个 1-因子分解的 K^{x}_{n+1}，因为 n 是奇数。令 F^{x}_{k} 表示 k^{th} 1-因子的 1-分解因子。然后，对于 $k = 1, 2, \ldots, n$，定义 $B_k = \cup_{x\in V(K_m)} F^{x}_{k}$ 是 $\cup_{x\in V(K_m)} K^{x}_{n+1}$ 的一个 1 因子。因此，我们得到另一个 $\overline{H}$ 的 n 1 因子。 □

5 结果

设 $v=m(n+1)$。回想我们在引理 3.2的公式 (2) 中是如何看待 K_v 的。我们将完成对 K_v 的分解，分别处理 m 为奇数和 m 为偶数的情况。

定理 5.1. 设 $v = m(n+1)$ 对于任何奇数 $n \geq 3$ 和任何奇数 $m \geq 3$。存在一个 $(K_2, K_{1,n}) - URD(K_v; r, s)$ 对于所有成对的 $(r,s) \in \mathcal{J} = \{(r,s) | r = 2n\ell + (m+n-1), s = (n+1)(\frac{m-1}{2} - \ell)$，其中任意一些非负整数 $\ell \leq \frac{m-1}{2}\}$。

证明. 回顾引理 3.2之后的讨论，我们将 K_v 视为：

$$
\begin{aligned}
K_v &= (K_{m(n+1)}) \cup \Big(\bigcup_{x \in V(K_m)} K_{n+1}^x \Big) \\
&= \left(\bigcup_{k=1}^{\frac{m-1}{2}} C_{m(n+1)}^k \right) \cup \Big(\bigcup_{x \in V(K_m)} K_{n+1}^x \Big)
\end{aligned}
$$

根据引理 3.3和引理 3.4，每个 $C_{m(n+1)}$ 都可以分解为一个 $(K_2, K_{1,n}) - AURD(C_{m(n+1)}; 2n, 0)$ 或一个 $(K_2, K_{1,n}) - AURD(C_{m(n+1)}; 0, n+1)$。设 ℓ（带有 $0 \leq \ell \leq \frac{m-1}{2}$）为选择 $(K_2, K_{1,n}) - AURD(C_{m(n+1)}; 2n, 0)$ 中的加权 m 环的数量。然后，$(\frac{m-1}{2} - \ell)$ 个加权环将被选择以具有 $(K_2, K_{1,n}) - AURD(C_{m(n+1)}; 0, n+1)$。通过这种方法，我们获得 $2n\ell$ 1-因子和 $(n+1)(\frac{m-1}{2} - \ell)$ n-星因子。然后，由引理 4.1，我们得到 $(m+n-1)$ 个更多的 1-因子，这完成了分解。 □

定理 5.2. 令 $v = m \cdot (n+1)$ 对任意奇数 $n \geq 3$ 和任意偶数 $m \geq 4$ 成立。存在一个 $(K_2, K_{1,n}) - URD(K_v; r, s)$ 满足所有成对的 $(r,s) \in \mathcal{J} = \{(r,s) | r = 2n\ell + (m+2n-1), s = (n+1)(\frac{m-2}{2} - \ell)$ 条件，对于任意非负整数 $0 \leq \ell \leq \frac{m-2}{2}\}$。

证明. 回顾引理 3.2之后的讨论，我们将 K_v 视为：

$$
\begin{aligned}
K_v &= (K_{m(n+1)}) \cup \Big(\bigcup_{x \in V(K_m)} K_{n+1}^x \Big) \\
&= \left(\bigcup_{k=1}^{\frac{m-2}{2}} C_{m(n+1)}^k \right) \cup \Big(\bigcup_{x \in V(K_m)} K_{n+1}^x \Big) \cup (I_{(n+1)})
\end{aligned}
$$

根据引理 3.3和引理 3.4，每个 $C_{m(n+1)}$ 都可以分解为一个 $(K_2, K_{1,n}) - AURD(C_{m(n+1)}; 2n, 0)$ 或一个 $(K_2, K_{1,n}) - AURD(C_{m(n+1)}; 0, n+1)$。设 ℓ（带有 $0 \leq \ell \leq \frac{m-2}{2}$）为选择一个 $(K_2, K_{1,n}) - AURD(C_{m(n+1)}; 2n, 0)$ 的加权 m-循环的数量。然后，将有 $(\frac{m-2}{2} - \ell)$ 加权循环被选中以具有一个 $(K_2, K_{1,n}) - AURD(C_{m(n+1)}; 0, n+1)$。

通过这种方法，我们获得 $2n\ell$ 1-因子和 $(n+1)(\frac{m-2}{2}-\ell)$ n-星因子。由引理 3.5，$I_{(n+1)}$ 具有一个 $(K_2, K_{1,n}) - AURD(I_{(n+1)}; n, 0)$，因此这产生了更多的 n1-因子。然后，由引理 4.2，我们得到更多 $(m+n-1)$ 个 1-因子，这完成了分解。 $\square$

由引理 5.1，设 $n \geq 3$ 为奇数且 $m \geq 3$ 为奇数。我们提供了一个解的存在性问题解决方案，当 $r \geq m+n-1$ 时存在 $(K_2, K_{1,n}) - URD(K_v; r, s)$。由引理 5.2，如果 $n \geq 3$ 是一个奇数且 $m \geq 4$ 是一个偶数，我们提供了一个当 $r \geq m+2n-1$ 时存在 $(K_2, K_{1,n}) - URD(K_v; r, s)$ 的解。

由于我们的构造需要一个包含 m 个顶点的环的形式，m 必须不小于 3。如果 $m < 3$，则不存在 C_m，我们无法使用我们的构造。其次，如果 m 是奇数，我们的构造需要最少 $m+n-1$ 1-因子。类似地，如果 m 是偶数，我们的构造需要最少 $m+2n-1$ 1-因子。因此，以下情况被排除在我们的结果之外。

- $v = (n+1)$ 和 $v = 2(n+1)$。
- 任何 (r, s) 对具有奇数 $m \geq 3$ 的 $r < m+n-1$。
- 任何 (r, s) 对与偶数 $m \geq 4$ 的 $r < m+2n-1$。

参考文献

[1] R. J. R. Abel, *Some new near resolvable BIBDs with $k = 7$ and resolvable BIBDs with $k = 5$*, Australas. J. Combin. 37,(2007), 141–146.

[2] R. J. R. Abel, G. Ge, M. Greig, and L. Zhu, *Resolvable BIBDs with a block size of* 5, J. Stat. Plann. Infer. **95** (2001), 49–65.

[3] R. J. R. Abel and M. Greig, *Some new* $(v, 5, 1)$ *RBIBDs and PBDs with block sizes* $\equiv 1 \pmod 5$, Australas. J. Combin. **15** (1997), 177–202.

[4] B. Alspach, *The wonderful Walecki construction*, Bull. Inst. Combin. Appl. **52** (2008), 7–20.

[5] F. Chen and H. Cao, *Uniformly resolvable decompositions of K_v into K_2 and $K_{1,3}$ graphs*, Discrete Math. **339** (2016), 2056–2062.

[6] C. J. Colbourn and J. H. Dinitz (eds.), *Handbook of Combinatorial Designs*, Second Edition, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007.

[7] J. H. Dinitz, A.C.H. Ling and P. Danziger, *Maximum Uniformly resolvable designs with block sizes* 2 *and* 4, Discrete Math. **309** (2009), 4716–4721.

[8] S. C. Furino, Y. Miao, and J. X. Yin, *Frames and Resolvable Designs*, CRC Press, Boca Raton FL, 1996.

[9] M. Gionfriddo and S. Milici, *On the existence of uniformly resolvable decompositions of K_v and $K_v - I$ into paths and kites*, Discrete Math. **313** (2013), 2830–2834.

[10] M. Gionfriddo and S. Milici, *Uniformly resolvable $\mathcal{H}$-designs with $\mathcal{H}$=$\{P_3, P_4\}$*, Australas. J. Combin. **60** (2014), 325–332.

[11] M. Gionfriddo and S. Milici, *Uniformly resolvable $\{K_2, P_k\}$-designs with k=$\{3, 4\}$*, Contrib. Discret. Math. **10** (2015), 126–133.

[12] M. Keranen, D. Kreher, S. Milici, and A. Tripodi, *Uniformly Resolvable Decompositions of K_v into* 1*-factors and* 4*-stars* (2020) *ASTURALASIAN JOURNAL OF COMBINATORICS, 76(1), 55-72.*

[13] S. Kucukcifci, G. Lo Faro, S. Milici, and A. Tripodi, *Resolvable* 3*-star designs*, Discrete Math. **338** (2015), 608–614.

[14] S. Kucukcifci, S. Milici and Zs. Tuza, *Maximum uniformly resolvable decompositions of* K_v *into* 3*-stars and* 3*-cycles*, Discrete Math., in press doi:10.1016/j.disc.2014.05.016 .

[15] R. Laskar and B. Auerbach, *On decomposition of r-partite graphs into edge-disjoint Hamilton circuits*, Discrete Math. **14** (1976), 265–268.

[16] J. Lee and M. Keranen, *Uniformly Resolvable Decompositions of* $K_v - I$ *into* 5*-stars* (2023) Article is currently under review.

[17] J. Lee and M. Keranen, *Uniformly Resolvable Decompositions of* K_vI *into one* 1*-factor and n-stars* (2025) Article is currently under review.

[18] J. Liu, *The equipartite Oberwolfach problem with uniform tables*, J. Comb. Theory A **101** (2003), 20–34.

[19] G. Lo Faro, S. Milici, and A. Tripodi, *Uniformly resolvable decompositions of into paths on two, three and four vertices*, Discrete Math. **338** (2015), 2212–2219.

[20] E. Lucas, *Récréations mathématiques*, Vol. 2, Gauthier-Villars, Paris, 1883.

[21] S. Milici, *A note on uniformly resolvable decompositions of* K_v *and* $K_v - I$ *into* 2*-stars and* 4*-cycles*, Austalas. J. Combin. **56** (2013), 195–200.

[22] S. Milici and Zs. Tuza, *Uniformly resolvable decompositions of* K_v *into* P_3 *and* K_3 *graphs*, Discrete Math. **331** (2014), 137–141.

[23] R. Rees, *Uniformly resolvable pairwise balanced designs with block sizes two and three*, J. Comb. Theory A **45** (1987), 207–225.

[24] R. Rees and D. R. Stinson. *On resolvable group divisible designs with block size* 3*, Ars Combinatoria* **23** (1987), 107–120.

[25] E. Schuster and G. Ge, *On uniformly resolvable designs with block sizes* 3 *and* 4 , Design. Code. Cryptogr. **57** (2010), 57–69.

[26] H. Wei and G. Ge, *Uniformly resolvable designs with block sizes* 3 *and* 4, Discrete Math. **339** (2016), 1069–1085.

[27] M. L. Yu, *On tree factorizations of* K_n, J. Graph Theory **17** (1993), 713–725.

[28] L. Zhu, B. Du, and X. B. Zhang, *A few more RBIBDs with* $k = 5$ *and* $\lambda = 1$, Discrete Math. **97** (1991), 409–417.