

多韦尔半金属中的赫利孔斯

Shiv Kumar Ram

Department of Physics, Lalit Narayan Mithila University, Darbhanga, Bihar 846004, India

Amit Gupta

Department of Physics, M. R. M. College, Lalit Narayan Mithila University, Darbhanga, Bihar 846004, India

(10Dated: 2025 年 4 月 24 日)

赫里孔是三维电子系统中存在静态磁场时的横向电磁模式。这些模式已在各向同性或单韦尔半金属 (sWSMs) 中提出 (Francesco M.D. Pellegrino 等人, Phys. Rev. B **92**, 201407(R) (2015))。在这项工作中, 我们扩展了我们的研究以探讨无能隙多韦尔半金属 (mWSMs) 中的赫里孔模式, 并讨论与单韦尔半金属相比出现的差异。

I. 介绍

赫里孔波是低频、圆偏振的横向电磁波, 在静态磁场中的三维导电介质中传播 (**B**) [1–3]。在常规金属/等离子体中, 它们遵循二次色散关系。[4]

$$\omega = \frac{k^2 B}{\mu_0 n_e e} \quad (1)$$

其中 n_e 是电子密度, k 是波矢量。Helicons 强烈地耦合到等离子体子 (集体电荷振荡) 上, 导致 helicon-等离子体子极化激元: 一种具有可调频率和光学导电率中异常吸收峰的新混合模式。

外尔半金属是一种三维拓扑物质状态, 在这种状态下, 导带和价带在有限数量的节点处接触, 这些节点被称为外尔节点 [5–10]。每个外尔节点可以视为 k 空间中的一个单极子, 携带拓扑电荷 $n=1$ 。外尔半金属具有费米弧表面态, 连接两个外尔节点 [3] 的表面投影。由于其拓扑磁电效应, 外尔半金属在外尔方程中引入了一个轴子项 $\theta(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})$, 改变了赫利孔色散。[11]

$$\omega \sim \frac{k^2 B}{\mu_0 n_e e} + k \quad (2)$$

第二项源于拓扑 θ 项。这项工作研究了包含轨道磁矩 (OMM) [11] 的各向同性或单个 WSMs。可以将 OMM 视为 Bloch 波包的自旋, 并在外部磁场 [12] 下修改 Bloch 电子的能量。轨道矩 $m_s(\mathbf{k})$ 和分布函数的各向异性贡献。Weyl 半金属中的螺旋波是拓扑电动力学的一个丰富测试平台, 将凝聚态物理学与电磁波理论相结合。它们独特的性质——受手征异常、Berry 曲

率和轴子场支配——使新型设备概念成为可能, 同时也提出了引人深思的理论挑战。由于伪场 (例如, 应变诱导规范场) 而修改了 Weyl 半金属中的螺旋模式 refres 伪螺旋波 [13]。

在本文中, 我们将相应的研究扩展到多 WSMs (更高的拓扑电荷大于一) 的情况。多 WSMs 可以被认为是由相同手性的多个 Weyl 点合并而成, 在 k 空间中产生各向异性的色散关系 [7, 8, 14]。多 WSMs 表现出一些有趣的输运现象 [15–22]。我们观察到在多 WSMs (拓扑荷 $J=2,3$) 中的 helicon 模式具有与各向同性 WSM (拓扑荷 $J=1$) 相同的一次和二次色散关系, 但它们被相应的等离子体频率 $\omega_{p,J}$ 重正化。我们还获得了磁感应频率 $\omega_{c,J}$ 关于磁场 B 的平方项表达式。

II. 模型哈密顿量和半经典玻尔兹曼方法

麦克斯韦方程组由于轴子项 $\theta(\mathbf{r}, t) = 2(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r} - b_0 t)$ 而产生的修改, 其中 $\mathbf{b}(\mathbf{b}_0)$ 表示动量 (能量) 空间中节点的分离 [11, 23]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} (E^2 - B^2) - \rho\varphi + \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} + \mathcal{L}_\theta \quad (3)$$

其中

$$\mathcal{L}_\theta = -\frac{\alpha}{4\pi^2} \theta(\mathbf{r}, t) \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \quad (4)$$

其中 $\alpha = e/(\hbar c) \approx 1/327$ 是通常的精细结构常数, $\theta(\mathbf{r}, t) = 2(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r} - b_0 t)$ 是轴子角度。轴子项 $\theta(\mathbf{r}, t)$ 修改了麦克斯韦方程组中的两个方程。

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = (\rho + \frac{\alpha}{2\pi^2} \mathbf{b} \cdot \mathbf{B}) \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7)$$

$$-\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{J} - \frac{\alpha}{2\pi^2} \mathbf{b} \times \mathbf{E} + \frac{\alpha}{2\pi^2} b_0 \mathbf{B}) \quad (8)$$

因此，电场传播的波动方程被修改为

$$-\epsilon_b \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - \frac{\alpha}{\pi} \mathbf{b} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{\alpha}{\pi} b_0 \nabla \times \mathbf{E} \quad (9)$$

在具有手性 χ 和贝里单极子电荷大小为 J 的节点点附近，低能量有效连续哈密顿量由 [24–26] 给出

$$\mathcal{H}(\mathbf{k}) = \mathbf{d}_s(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (10)$$

其中 $k_\perp = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ 且 $\phi_k = \arctan(\frac{k_y}{k_x})$

$$\mathbf{d}_s(\mathbf{k}) = \{\alpha_J k_\perp^J \cos(J\phi_k), \alpha_J k_\perp^J \sin(J\phi_k), s v_F k_z\} \quad (11)$$

其中 $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ 是通常的泡利矩阵, $s \in \{1, -1\}$ 表示节点的手性, 而 v_F ($v_\perp$) 是在 z 方向 (xy 平面) 上的费米速度。哈密顿量的本征值由

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \sqrt{\alpha_J^2 k_\perp^{2J} + v_z^2 k_z^2}, \quad (12)$$

给出, 其中值 1 (−1) 对于 s 表示传导 (价) 带。我们注意到, 通过设定 $J = 1$ 和 $\alpha_1 = v_z$, 我们可以恢复 WSM 的线性和各向同性性质。对于单个外尔节点给定的手性 $s = \pm$, 在平衡状态下的半经典玻耳兹曼方程可以写为

$$\frac{\partial \tilde{f}^s}{\partial t} + \dot{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial \tilde{f}^s}{\partial \mathbf{k}} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \tilde{f}^s}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad (13)$$

这里, $\tilde{f}^s$ 是电子分布函数。

在存在静态磁场 $\mathbf{B}$ 和时变电场 $\mathbf{E}$ 的情况下, 半经典运动方程是

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}}^s - \mathbf{k} \times \mathbf{s}_{\mathbf{k}} \quad (14)$$

$$\hbar \dot{\mathbf{k}} = -e \mathbf{E} - e \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \quad (15)$$

其中 $-e$ 是电子电荷, $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别是外部电场和磁场。 $\Omega_{\mathbf{k}}^s$ 是贝里曲率, 而 $\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}^s = \epsilon_{\mathbf{k}}^s - \mathbf{m}_{\mathbf{k}}^s \cdot \mathbf{B}$ 与由半经典“自旋”引起的轨道磁矩 $m_s(\mathbf{k})$ 相关。方程 (14) 右边的第一项是 $\mathbf{v}_{\mathbf{k}}^s = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}}^s$, 它是由一个有效的能带色散 $\tilde{\epsilon}_s(\mathbf{k})$ 定义的。在拓扑金属如 WSMs 中, 这个量由于固有的轨道矩而获得了一项, 即 $\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}^s = \epsilon_{\mathbf{k}}^s - \mathbf{m}_{\mathbf{k}}^s \cdot \mathbf{B}$, 而 $\mathbf{m}_{\mathbf{k}}^s$ 是由半经典“自旋”引起的轨道矩。 $\Omega_{\mathbf{k}}^s$ 这一项是 Berry 曲率。[12, 27, 28]

$$\Omega_{\mathbf{k}}^s = \text{Im}[\langle \nabla_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^s | \times | \nabla_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^s \rangle] \quad (16)$$

$$\mathbf{m}_{\mathbf{k}}^s = -\frac{e}{2\hbar} \text{Im}[\langle \nabla_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^s | \times (\mathcal{H}_J(\mathbf{k}) - \epsilon_{\mathbf{k}}^s) | \nabla_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^s \rangle] \quad (17)$$

其中 $|u_{\mathbf{k}}^s\rangle$ 满足方程 $\mathcal{H}_J(\mathbf{k})|u_{\mathbf{k}}^s\rangle = \epsilon_{\mathbf{k}}^s|u_{\mathbf{k}}^s\rangle$

Berry 曲率和多 WSMs 轨道磁矩的一般表达式为 [25]

$$\Omega_{\mathbf{k}}^s = \pm \frac{s}{2} \frac{J v_F \alpha_J^2 k_\perp^{2J-2}}{\beta_{\mathbf{k},s}^3} \{k_x, k_y, J k_z\} \quad (18)$$

$$\mathbf{m}_{\mathbf{k},s}^\pm = \frac{s}{2} \frac{e J v_F \alpha_J^2 k_\perp^{2J-2}}{\hbar \beta_{\mathbf{k},s}^2} \{k_x, k_y, J k_z\} \quad (19)$$

其中, 在 mWSMs 的情况下, 为 $\beta_{\mathbf{k},s} = \sqrt{\alpha_J^2 k_\perp^{2J} + v_F^2 k_z^2}$ 。

从这些表达式中, 我们立即观察到恒等式

$$\mathbf{m}_{\mathbf{k},s} = -e \epsilon_{\mathbf{k}} \Omega_{\mathbf{k}}^s. \quad (20)$$

虽然 BC 的符号随 s 变化, 但 OMM 不会变化。

通过求解这些耦合方程 (14) 和 (15), 可以得到

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\hbar D} \left[\nabla_{\mathbf{k}} \tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}} + e \mathbf{E} \times \mathbf{s}_{\mathbf{k}} + \frac{e}{\hbar} (\nabla_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}}^s \cdot \mathbf{s}_{\mathbf{k}}) \mathbf{B} \right] \quad (21)$$

$$\dot{\mathbf{k}} = \frac{1}{\hbar D} \left[-e \mathbf{E} - \nabla_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}}^s \times \mathbf{B} - \frac{e^2}{\hbar} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{s}_{\mathbf{k}} \right] \quad (22)$$

其中因子 $D = 1 + \frac{e}{\hbar} (\Omega_{\mathbf{k}}^s \cdot \mathbf{B})$ 修改了相空间体积。

方程 (13) 可以通过将分布函数在电场中展开为线性幂来求解:

$$\tilde{f}^s = \tilde{f}_0^s + \tilde{f}_1^s e^{-i\omega t} \quad (23)$$

其中 $\tilde{f}_1^s$ 是关于 $\mathbf{E}$ 的线性, 并被参数化如下

$$\tilde{f}_1^s = -\frac{\partial \tilde{f}_0^s}{\partial \epsilon_{\mathbf{k}}^s} (X_- e^{i\phi} + X_+ e^{-i\phi} + X_0) \quad (24)$$

$\tilde{f}_0^s(\epsilon_{\mathbf{k}}^s)$ 可以在低磁场下展开为 [11]

$$\begin{aligned}\tilde{f}_0^s(\epsilon_{\mathbf{k}}^s) &= \tilde{f}_0^s(\epsilon_{\mathbf{k}}^s - \mathbf{m}_{\mathbf{k}}^s \cdot \mathbf{B}) \\ &\simeq \tilde{f}_0^s(\epsilon_{\mathbf{k}}^s) - \mathbf{m}_{\mathbf{k}}^s \cdot \mathbf{B} \frac{\partial \tilde{f}_0^s(\epsilon_{\mathbf{k}}^s)}{\partial \epsilon_{\mathbf{k}}^s}\end{aligned}\quad (25)$$

由式 (21) 和式 (24), 时间 t 的电流密度表达式为

$$\mathbf{j}_1 = -\frac{e}{(2\pi)^3} \int d^3k \left[\mathbf{v}_{\mathbf{k}}^s + \frac{e}{\hbar} (\Omega_{\mathbf{k}}^s \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{k}}^s) \mathbf{B} \right] \tilde{f}_1^s \quad (26)$$

上述方程可以在频率空间 ω 中表示为

$$j_a(\omega) = \sigma_{ab}(\omega) E_b(\omega) \quad (27)$$

为了包含 OMM 和 BC 的影响, 我们首先定义量

$$\tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}^s = \epsilon_{\mathbf{k}}^s - \mathbf{m}_{\mathbf{k}}^s \cdot \mathbf{B} \quad (28)$$

$$= \epsilon_{\mathbf{k}}^s + \epsilon_{\mathbf{k}}^{m,s} \quad (29)$$

带有

$$\epsilon_{\mathbf{k}}^{m,s} = -\mathbf{B}_s \cdot \mathbf{m}_s(\mathbf{k})$$

$\mathbf{k}$ 空间中的速度定义为

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{k}) \equiv \nabla_{\mathbf{k}} \tilde{\epsilon}_{\mathbf{k}}^s = \mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{k}) + \mathbf{v}_s^{(m)}(\mathbf{k}) \quad (30)$$

$$\mathbf{v}_s^{(m)}(\mathbf{k}) = \nabla_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}}^{m,s} \quad (31)$$

其中, $\epsilon_{\mathbf{k}}^{m,s}$ 是由于 OMM 引起的能量的 Zeeman 类校正, $\mathbf{v}_s(\mathbf{k})$ 是在包含 $\epsilon_{\mathbf{k}}^{m,s}$ 后的 Bloch 电子的修改带速度, 而 D 是由于非零 BC 导致的相空间体积元素的修正因子。我们的弱磁场极限意味着

$$e |\mathbf{B} \cdot \Omega_{\mathbf{k}}^s| \ll 1. \quad (32)$$

将方程插入在公式 (13) 中, 我们发现 (23) 和 (24)

$$X_{\pm} = \frac{e}{2D} \frac{k_{\perp} (E_x \pm iE_y)}{i[\omega \pm \frac{eBk_{\perp}}{D}]} \quad (33)$$

$$= \frac{e}{2D} \frac{k_{\perp} (E_x \pm iE_y)}{i[\omega \pm \omega_{c,J}]} \quad (34)$$

其中 $\omega_{c,J} = \frac{eBk_{\perp}}{D}$ 是 m-WSMs 的旋磁频率的一般表达式, J 表示拓扑荷。旋磁频率的二阶 B 表达式为

$$\omega_{c1} = Be v_F^2 / \epsilon_F - s B^2 e^2 v_F^4 \cos \phi / (2\epsilon_F^3) \quad (35)$$

$$\omega_{c2} = 2Be \alpha_2 \sin \phi + 4s B^2 e^2 \alpha_2^2 \cos^3 \phi / \epsilon_F \quad (36)$$

$$\begin{aligned}\omega_{c3} &= 3Be \alpha_3^{2/3} \epsilon_F^{1/3} \sin^{4/3} \phi \\ &+ 9s B^2 e^2 \alpha_3^{4/3} \epsilon_F^{-1/3} \cos \phi (4 \cos^2 \phi + \sin \phi)\end{aligned} \quad (37)$$

其中 ϵ_F 表示多 WSMs 的费米能。

$$X_0 = \frac{eE_z}{i\omega D} [v_{kz} + eB(\Omega_{\mathbf{k}}^s \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}^s)] \quad (38)$$

利用关于 z 轴的方位对称性, 我们利用由 [26] 定义的柱坐标

$$k_x = k_{\perp} \cos \phi, \quad k_y = k_{\perp} \sin \phi, \quad \text{and } k_z = k_z, \quad (39)$$

其中 $k_{\perp} \in [0, \infty)$ 和 $\phi \in [0, 2\pi)$ 。我们可以将速度分量 (x 和 y) 重写为

$$v_{k_x}^s = v_{k_{\perp}}^s \cos \phi, \quad v_{k_y}^s = v_{k_{\perp}}^s \sin \phi \quad (40)$$

在下一步中, 我们通过坐标变换

$$v_{k_{\perp}}^s = J \frac{\alpha_J^2 k_{\perp}^{2(J-1)+1}}{\epsilon(\mathbf{k})} \quad (41)$$

$$+ seBJ^2 v_F \alpha_J^2 k_z k_{\perp}^{2(J-2)+1} \frac{(v_F^2 k_z^2 (J-1) - \alpha_J^2 k_{\perp}^{2J})}{\epsilon(\mathbf{k})^4} \quad (42)$$

将变量从 $(k_{\perp}, k_z)$ 更改为 $(\epsilon_{\mathbf{k}}, \varphi)$

$$k_{\perp} = \left(\frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{\alpha_J} \sin \varphi \right)^{1/J}, \quad k_z = \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{v_F} \cos \varphi, \quad (43)$$

其中 $\epsilon_{\mathbf{k}} \in [0, \infty)$ 和 $\varphi \in [0, \pi)$ 。变换的雅可比矩阵是 $\mathcal{J}(\epsilon_{\mathbf{k}}, \varphi) = \frac{1}{J v_F \sin \varphi} \left(\frac{\epsilon_{\mathbf{k}} \sin \varphi}{\alpha_J} \right)^{1/J}$, 从而得到多 WSMs 纵向电导率 σ_{zz}^J 的解析表达式。

$$\sigma_{zz}^1(\omega) = i \frac{e^2}{120\pi^2 v_F \omega \epsilon_F} (13B^2 e^2 v_F^4 + 20\epsilon_F^4) \quad (44)$$

$$\sigma_{zz}^2(\omega) = i \frac{e^2}{4\pi^2 \omega} \left(\frac{B^2 e^2 \pi v_F \alpha_2}{8\epsilon_F} + \frac{\pi v_F \epsilon_F}{4\alpha_2} \right) \quad (45)$$

和

$$\sigma_{zz}^3(\omega) = i \frac{e^2 v_F}{41496 \pi^{3/2} (\frac{\epsilon_F}{\alpha_3})^{2/3} \omega \Gamma(1/3)} \left(-\frac{81 B^2 e^2 (2\sqrt{3}\pi + 19\Gamma(1/3)\Gamma(2/3))}{\Gamma(7/6)} + \frac{1729(\epsilon_F/\alpha_3)^{4/3} \Gamma(1/3)^2}{\Gamma(11/6)} \right) \quad (46)$$

上述组件已在图中绘制。(1) 用于图注释中提到的参

数。在低频极限下，横向导电性的解析表达式是不可能存在的。

$$\sigma_{xx}^{(2)}(\omega) = -\frac{e}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_0^{\infty} k_{\perp} dk_{\perp} \int_0^{\pi} d\phi \frac{e}{2D} v_{\perp}^2 \cos^2 \phi \left(\frac{1}{i[\omega + \frac{eBv_{\perp}}{Dk_{\perp}}]} + \frac{1}{i[\omega - \frac{eBv_{\perp}}{Dk_{\perp}}]} \right) \left(-\frac{\partial f_0^s}{\partial \epsilon_{\mathbf{k}}^s} \right) \quad (47)$$

$$\sigma_{xy}^{(2)}(\omega) = -\frac{e}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_0^{\infty} k_{\perp} dk_{\perp} \int_0^{\pi} d\phi \frac{e}{2D} v_{\perp}^2 \cos^2 \phi \left(\frac{1}{i[\omega + \frac{eBv_{\perp}}{Dk_{\perp}}]} - \frac{1}{i[\omega - \frac{eBv_{\perp}}{Dk_{\perp}}]} \right) \left(-\frac{\partial f_0^s}{\partial \epsilon_{\mathbf{k}}^s} \right) \quad (48)$$

我们对上述方程进行了数值求解，直到 B 的二次幂，并在图 (2) 和图 (3) 中绘制了结果。方程 (37) 中 B 的主导幂次确定了回旋频率 $\omega_{c1}^0 = 5.68125 \times 10^{-5}$, $\omega_{c2}^0 = 7.0902 \times 10^{-5} \sin \phi$, $\omega_{c3}^0 = 3.49896 \times 10^{-4} \sin \phi^{4/3}$ 的值。我们可以看到，随着拓扑荷的增加，回旋频率的主要部分在减小。这些回旋频率值的不同区分了多 WSMs。

接下来，我们定义电介质张量

$$\epsilon_{lm} = \delta_{lm} \epsilon_b + \frac{4\pi i}{\omega} \left[\sigma_{lm} - \epsilon_{lmn} \frac{\alpha c}{2\pi^2} (b_n - q_n \frac{b_0}{\omega}) \right] \quad (49)$$

其中 ϵ_{lmn} 是 Levi-Civita 反对称张量，指标 l, m 和 n 遍历笛卡尔坐标 x, y 和 z。上述方程可以与波动方程结合给出以下关系

$$\left(\frac{ck}{\omega} \right)^2 - \frac{2\alpha}{\pi c \omega} \left(b_z - \frac{b_0 k}{\omega} \right) = \epsilon_b + \frac{4\pi i}{\omega} (\sigma_{xx} - i\sigma_{xy}) \quad (50)$$

我们可以看到，多 WSM 的电导率的横向部分与其色散关系不同。然而，线性和二次 k 功率保持不变，如同单 WSM 的情况 [11]。色散关系已在图中绘制。(4)

我们现在将计算在 $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ 处的有能隙集体模式。在长波极限下，我们发现三个有能隙模式 $\Omega_{\lambda}(q)$ 随着 $\lambda = 1, 2, 3$ 给出由

$$\Omega_{1,J}(k=0) = \omega_{-,J} \quad (51)$$

$$\Omega_{2,J}(k=0) = \omega_{p,J}/\sqrt{\epsilon_b} \quad (52)$$

$$\Omega_{3,J}(k=0) = \omega_{+,J} \quad (53)$$

其中 $\omega_{\pm,J} = \alpha c b / (\pi \epsilon_b) \pm \sqrt{(\alpha c b)^2 / (\pi \epsilon_b)^2 + \omega_{p,J}^2 / \epsilon_b}$ 具有 $b = |\mathbf{b}|$

其中 $\omega_{p,J}$ 定义了多 WSM 中的等离子体频率。

$$\omega_{p,1}^2 = \frac{4e^2 \omega_{c1}^2}{3\pi \hbar v_F} \quad (54)$$

$$\omega_{p,2}^2 = \frac{\pi e^2 v_F}{4\alpha_2^2 \hbar} \quad (55)$$

$$\omega_{p,3}^2 = \frac{2}{9} \frac{\sqrt{\pi} e^2 v_F \omega^{2/3} \Gamma(1/3)}{2^{2/3} \alpha_3^{2/3} \hbar \Gamma(11/6)} \quad (56)$$

因此，多层 WSMs 中电磁响应中的轴子项消除了 $k=0$ 处三个带隙集体模式的简并。这些模式可以通过它们对应的等离子频率 $\omega_{p,J}$ 来区分。

III. 结论

总结来说，我们从半经典玻尔兹曼输运理论出发研究了三维多重 Weyl 半金属中的赫利孔模式，并包含了或我们已经计算出了电导张量纵向部分的解析表达式。电导横向部分可以通过数值方法来计算。这些横向分量固定了多重 WSMs 的旋衡频率，我们发现这种频率在三重 WSM 中最低，在单重 WSM 中最高。由于多 WSMs 电磁响应中的轴子项的存在， $k=0$ 处三种带隙集体模式的简并性被解除。可以通过它们各自的等离子体频率 $\omega_{p,J}$ 来区分这些模式。我们的工作可以在未来的实验中通过赫利孔模式的不同来区分多重 WSMs。

IV. 致谢

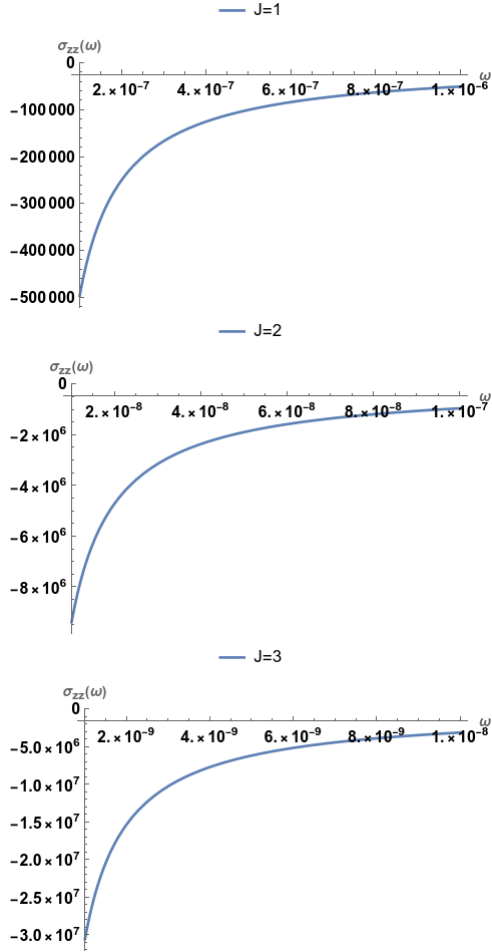


图 1. 纵向光学电导率的频率依赖性在 $B = 3$ 时的情况。其他参数取为 $v_F = 0.005, \mu = 0.4, \alpha_2 = 3.9 \times 10^{-5}$ 和 $\alpha_3 = 2.298 \times 10^{-6}$

我们感谢 Debanand Sa 的有益讨论。

-
- [1] C. Kittel and P. McEuen, *Introduction to solid state physics* (John Wiley & Sons, 2018).
 - [2] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics* (John Wiley & Sons, 2021).
 - [3] O. Konstantinov and V. Perel, Possible transmission of electromagnetic waves through a metal in a strong magnetic field, *SOVIET PHYSICS JETP-USSR* **11**, 117 (1960).
 - [4] P. M. Platzman and P. A. Wolff, *Waves and interactions in solid state plasmas*, Vol. 13 (Academic Press New York, 1973).
 - [5] X. Wan, A. M. Turner, A. Vishwanath, and S. Y. Savrasov, Topological semimetal and fermi-arc surface states in the electronic structure of pyrochlore iridates, *Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics* **83**, 205101 (2011).
 - [6] A. Burkov and L. Balents, Weyl semimetal in a topological insulator multilayer, *Physical review letters* **107**, 127205 (2011).
 - [7] G. Xu, H. Weng, Z. Wang, X. Dai, and Z. Fang, Chern semimetal and the quantized anomalous hall effect in hgcr 2 se 4, *Physical review letters* **107**, 186806 (2011).
 - [8] S.-M. Huang, S.-Y. Xu, I. Belopolski, C.-C. Lee, G. Chang, B. Wang, N. Alidoust, G. Bian, M. Neupane, C. Zhang, *et al.*, A weyl fermion semimetal with surface fermi arcs in the transition metal monpnictide taas class, *Nature communications* **6**, 7373 (2015).
 - [9] B. Lv, N. Xu, H. Weng, J. Ma, P. Richard, X. Huang, L. Zhao, G. Chen, C. Matt, F. Bisti, *et al.*, Observation of weyl nodes in taas, *Nature Physics* **11**, 724 (2015).
 - [10] S.-Y. Xu, I. Belopolski, N. Alidoust, M. Neupane, G. Bian, C. Zhang, R. Sankar, G. Chang, Z. Yuan, C.-C.

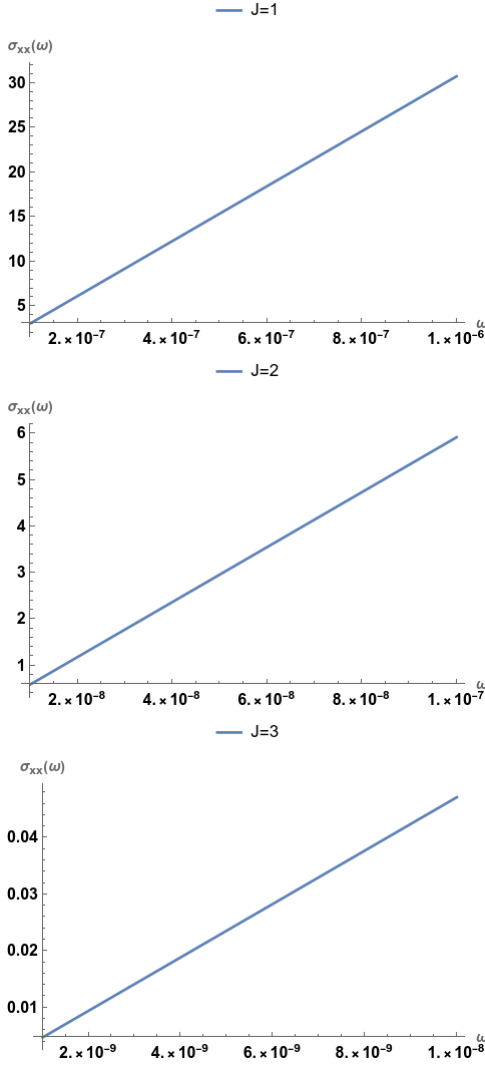


图 2. 纵向光电导率的频率依赖性在 $B=3$ 时的情况。其他参数取值为 $v_F=0.005, \mu=0.4, \alpha_2 = 3.9 \times 10^{-5}$ 和 $\alpha_3 = 2.298 \times 10^{-6}$

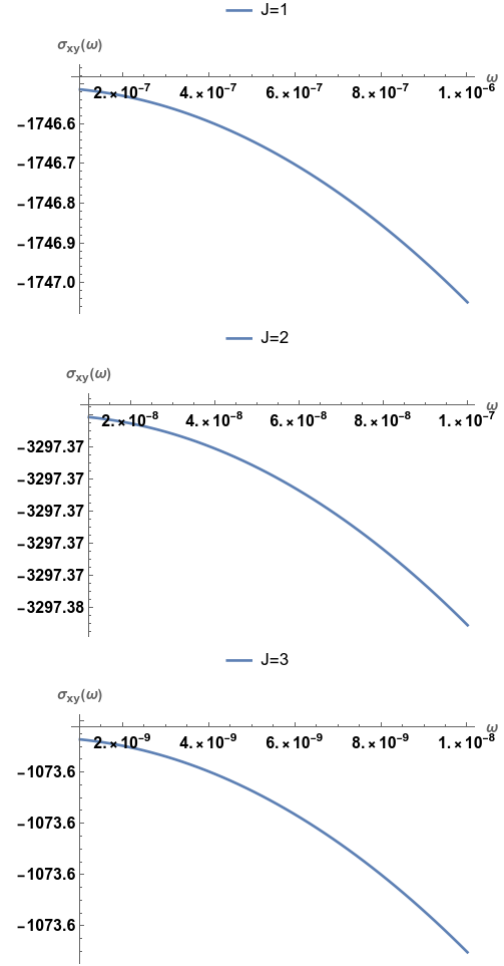


图 3. 横向霍尔光学电导率的频率依赖性在 $B=3$ 时。其他参数取值为 $v_F=0.005, \mu=0.4, \alpha_2 = 3.9 \times 10^{-5}$ 和 $\alpha_3 = 2.298 \times 10^{-6}$

Lee, *et al.*, Discovery of a weyl fermion semimetal and topological fermi arcs, *Science* **349**, 613 (2015).

- [11] F. M. Pellegrino, M. I. Katsnelson, and M. Polini, Helicons in weyl semimetals, *Physical Review B* **92**, 201407 (2015).
- [12] G. Sundaram and Q. Niu, Wave-packet dynamics in slowly perturbed crystals: Gradient corrections and berry-phase effects, *Physical Review B* **59**, 14915 (1999).
- [13] E. Gorbar, V. Miransky, I. Shovkovy, and P. Sukhachov, Pseudomagnetic helicons, *Physical Review B* **95**, 115422 (2017).
- [14] S.-M. Huang, S.-Y. Xu, I. Belopolski, C.-C. Lee, G. Chang, T.-R. Chang, B. Wang, N. Alidoust, G. Bian, M. Neupane, *et al.*, New type of weyl semimetal with

quadratic double weyl fermions, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **113**, 1180 (2016).

- [15] S. Ahn, E. Mele, and H. Min, Optical conductivity of multi-weyl semimetals, *Physical Review B* **95**, 161112 (2017).
- [16] S. Mukherjee and J. Carbotte, Doping and tilting on optics in noncentrosymmetric multi-weyl semimetals, *Physical Review B* **97**, 045150 (2018).
- [17] T. Nag, A. Menon, and B. Basu, Thermoelectric transport properties of floquet multi-weyl semimetals, *Physical Review B* **102**, 014307 (2020).
- [18] T. Nag and S. Nandy, Magneto-transport phenomena of type-i multi-weyl semimetals in co-planar setups, *Journal of Physics: Condensed Matter* **33**, 075504 (2020).
- [19] A. Menon and B. Basu, Anomalous hall transport in tilted multi-weyl semimetals, *Journal of Physics: Condensed Matter* **33**, 045602 (2020).

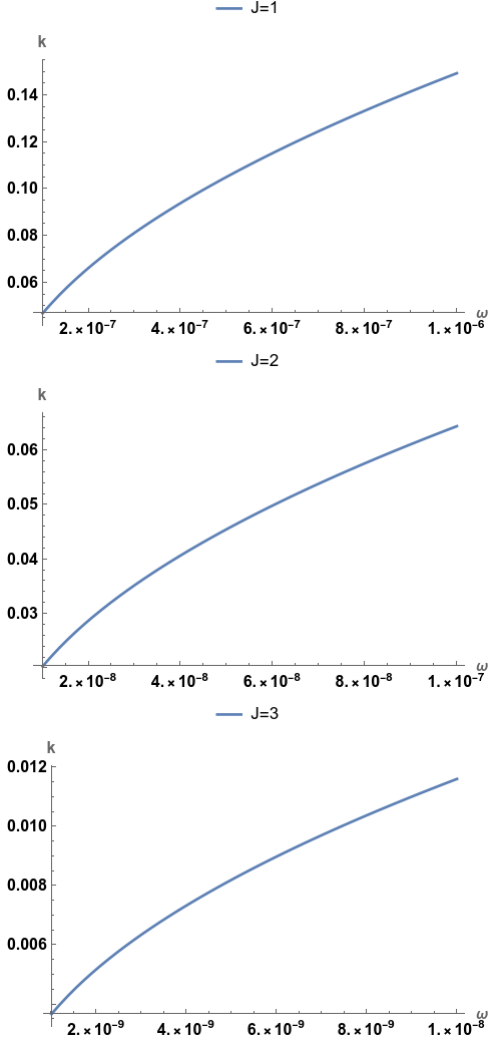


图 4. ω 对于 $B = 3$ 处的多 WSMs 的色散关系其他参数取为 $v_F = 0.005, \mu = 0.4, \alpha_2 = 3.9 \times 10^{-5}$ 和 $\alpha_3 = 2.298 \times 10^{-6}, \epsilon_b = 5, b_z = .01\pi/3.5, b_0 = 0$ 以及精细结构常数 $\alpha = 1/137$

- [20] A. Gupta, Novel electric field effects on landau levels in multi-weyl semimetals, *Physics Letters A* **383**, 2339 (2019).
- [21] A. Gupta, Floquet dynamics in multi-weyl semimetals, arXiv preprint arXiv:1703.07271 (2017).
- [22] A. Gupta, Kerr effects in tilted multi-weyl semimetals, arXiv preprint arXiv:2209.07506 (2022).
- [23] A. Zyuzin and A. Burkov, Topological response in weyl semimetals and the chiral anomaly, *Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics* **86**, 115133 (2012).
- [24] R. Dantas, F. Peña-Benitez, B. Roy, and P. Surówka, Magnetotransport in multi-weyl semimetals: A kinetic theory approach, *Journal of High Energy Physics* **2018**, 1 (2018).
- [25] S. Nandy, C. Zeng, and S. Tewari, Chiral anomaly induced nonlinear hall effect in semimetals with multiple weyl points, *Physical Review B* **104**, 205124 (2021).
- [26] L. Medel, R. Ghosh, A. Martín-Ruiz, and I. Mandal, Electric, thermal, and thermoelectric magnetoconductivity for weyl/multi-weyl semimetals in planar hall set-ups induced by the combined effects of topology and strain, *Scientific Reports* **14**, 21390 (2024).
- [27] D. Xiao, M.-C. Chang, and Q. Niu, Berry phase effects on electronic properties, *Reviews of modern physics* **82**, 1959 (2010).
- [28] Y. Gao, Z.-Q. Zhang, H. Jiang, and K.-H. Ding, Suppression of magneto-optical transport in tilted weyl semimetals by orbital magnetic moment, *Physical Review B* **105**, 165307 (2022).