

闭子函子通过外三角范畴中 3×3 -引理性质的刻画

JUAN C. CALA AND SHAIRA R. HERNÁNDEZ

摘要. 给定一个外三角范畴 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$, 我们引入了 3×3 -引理性质用于 $\mathbb{E}$ 的子函子, 并证明一个加性子函子 $\mathbb{F}$ 在 $\mathbb{E}$ 中是闭的, 当且仅当它满足这个条件。这个特征化将 A. Buan (针对阿贝尔范畴) 的一个众所周知的结论扩展到外三角范畴。作为这个结果的应用, 我们得到一个新的等价条件来描述 $\mathcal{C}$ 中的饱和适当类 ξ 。

介绍

在 [7] 中, M. Butler 和 G. Horrocks 引入了加性双函子 Ext 的子函子的概念, 在阿贝尔范畴的背景下。他们的主要贡献是通过子函子建立了一个进行相对同调代数的框架。更确切地说, 为了实现这一目标, 他们定义了闭子函子的概念。这种做法与 D. Buchsbaum 在 [4, 5] 中之前探讨的思想有关, 他展示了如何相对于满足某些公理的态射类进行相对同调代数。

另一方面, 根据 D. Quillen 在 [18] 中引入的精确范畴定义, Dräxler 等人 [9, Proposition 1.4] 建立了闭子函子与精确结构之间的联系。在此基础上, A. Buan [3, Lemma 2.2.1] 利用 3×3 -引理性质对闭子函子进行了表征, 采用了来自精确范畴理论的高级技术, 如 Freyd – Mitchell 嵌入定理 [16, Appendix A]。值得注意的是, D. Buchsbaum [5] 和 J. Fisher [11] 等人已经意识到这一属性的有用性, 但他们不熟悉这种特征化。最近, J. Cala [8, Theorem 3.18] 仅使用交换范畴理论中的基本方法证明了这一结果。

作为交换、精确和三角范畴的常见推广, H. Nakaoka 和 Y. Palu 在 [17] 中引入了所谓的外三角范畴。此外, 类似于精确范畴 (在 Quillen 的意义上) 公理化来自交换范畴的扩张封闭子范畴, 它们为三角范畴的扩张封闭子范畴提供了公理框架。因此, 在近年来, 几个概念和构造已经被推广到这个新的背景下。

关于高维模拟三角范畴的相对理论, 即 n -exangulated 范畴, 在 [12, Section 3] 中由 M. Hershend、Y. Lui 和 H. Nakaoka 进行了研究。他们的结果包含了通过设置 $n = 1$ 的模拟三角范畴 (见 [12, Proposition 4.3])。因此, 对于一个外三角范畴 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$, [12, Proposition 3.16] 提供了几个等价条件, 用于判断一个加法子函子 $\mathbb{F}$ 是否为 $\mathbb{E}$ 的闭子函子。特别是, 它表明闭子函子正好是那些对于 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ 而言 $(\mathbb{F}, \mathfrak{s}|_{\mathbb{F}})$ 给出 $\mathcal{C}$ 的外部三角结构的地方, 其中 $\mathfrak{s}|_{\mathbb{F}}$ 是将 $\mathfrak{s}$ 限制到 $\mathbb{F}$ 扩展。因此, 闭子函子提

2020 MSC: 18G80 (18G10; 18G25).

Key Words: 3×3 -lemma property, extriangulated categories.

供了一种从给定的外部三角结构构造新外部三角结构的一般方法。这已经激发了多项工作的研究，参见例如 [1, 10, 15, 19, 20]。

另一方面，由 J. Hu、D. Zhang 和 P. Zhou 在 [13] 中引入的 $\mathbb{E}$ -三角形的适当类已被用于研究精确和三角范畴中存在的不同概念，但现在应用于外三角范畴，例如 [13, 14, 21]。这推广了 A. Beligiannis 在 [2] 中考虑某些类别的三角形以发展三角范畴中的相对同调代数的想法。从 A. Sakai 的工作 [19] 我们知道， $\mathbb{E}$ 的闭子函子与 $\mathbb{E}$ -三角形的适当类之间存在一一对应关系。这意味着在研究外三角范畴中的相对理论时，两种方法是相同的。

一个自然的问题是，是否可以通过类似 A. Buan 在阿贝尔范畴中采用的 $3\mathbb{E}3$ 引理性质来刻画 $\mathbb{E}$ 的闭子函子。据我们所知，目前没有适用于外三角范畴的 Freyd – Mitchell 嵌入定理版本，并且在这个上下文中普遍性质的独特性不成立。这些限制阻碍了直接采用 A. Buan [3] 和 J. Cala [8] 使用的方法。本工作的目标是通过仅使用外三角范畴中闭子函子的基本性质来证明这一问题的肯定回答。

论文组织结构. 在第 1 节中，我们回顾了一些关于 extra 三角范畴的定义和性质来自 [17]。我们包括了某些无需证明的结果，这些结果将在我们主要结果的证明中使用。另一方面，给定一个外三角范畴 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ ，我们回顾定义 1.2 中的 [12] 所述的函子 $\mathbb{F}$ 成为函子 $\mathbb{E}$ 的子函子意味着什么，并在命题 1.4 中回顾了 $\mathbb{E}$ 的闭合子函子与 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 的相对外三角结构之间的关系。

在第 2 节中，对于给定的外三角范畴 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ ，我们在定义 2.2 中介绍了子函子 $\mathbb{F}$ 对 $\mathbb{E}$ 的 3×3 -引理性质，并陈述了我们的主要结果，即闭合子函子 $\mathbb{F}$ 对于 $\mathbb{E}$ 正好是那些具有 3×3 引理性质的。最后，我们看到这个想法如何融入在 [13, 19] 中发展的真类理论。

惯例. 在整个论文中， $\mathcal{C}$ 表示一个加性范畴。我们用 $A \in \mathcal{C}$ 来表示 A 是 $\mathcal{C}$ 的一个对象。给定 $A, B \in \mathcal{C}$ ，我们将 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ 表示为从 A 到 B 在 $\mathcal{C}$ 中的态射的交换群。最后，Set 和 Ab 分别表示集合范畴和交换群范畴。

sectionsection=0 SUBSECTIONSECTION=0 1. 预备知识

外三角范畴和术语. 让我们简要回顾一些重要概念并建立本文将使用的符号。关于这些概念和与 extra-triangulated 范畴相关的性质的更多细节，我们请读者参考 [17, Sections 2 and 3]。

一个外三角范畴包含一个三元组 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ ，其中 $\mathcal{C}$ 是一个加性范畴， $\mathbb{E} : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$ 是一个加性双函子，并且 $\mathfrak{s}$ 是一个满足某些公理的 $\mathbb{E}$ 的加法实现（详情见 [17, Definition 2.12]）。一个 $\mathbb{E}$ -扩展是一个三元组 (A, δ, C) ，其中 $A, C \in \mathcal{C}$ 和 $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$ 。我们简单地说 δ 是一个 $\mathbb{E}$ -扩展，指的是对于某个 $A, C \in \mathcal{C}$ 有 $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$ 。对于每一个 $a \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A')$ 和 $c \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C', C)$ ，我们使用符号 $a \cdot \delta$ 和 $\delta \cdot c$ 分别表示 $\mathbb{E}(C, a)(\delta)$ 和 $\mathbb{E}(c, A)(\delta)$ 。给定 $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$ 和 $\delta' \in \mathbb{E}(C', A')$ ，从 δ 到 δ' 的 $\mathbb{E}$ -

扩展的态射是一对态射 $a \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A')$ 和 $c \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C', C)$, 使得 $a \cdot \delta = \delta' \cdot c$ 。在这种情况下, 我们写 $(a, c) : \delta \rightarrow \delta'$ 。

实现 $\mathfrak{s}$ 的 $\mathbb{E}$ 将任何 $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$ 分配到一个同构类 $\mathfrak{s}(\delta) = [A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]$ 中, 该同构类是一个在 $\mathcal{C}$ 中的态射序列 (参见 [17, Definitions 2.7 and 2.9])。在这种情况下, 我们说 $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ 实现 δ , 并将其称为一个 $\mathfrak{s}$ -混同。此外, 我们说这对 $(A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C, \delta)$ 是一个 $\mathbb{E}$ -三角形, 我们将其表示为 $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \xrightarrow{\delta} \rightarrow$ 。对于零元素 $0 = 0_{(C, A)} \in \mathbb{E}(C, A)$, 我们说 $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \xrightarrow{0} \rightarrow$ 是一个分割 $\mathbb{E}$ -三角形。因此, 由于 $\mathfrak{s}$ 是可加的, 我们得到了任意 $A, C \in \mathcal{C}$ 的分裂 $\mathbb{E}$ -三角形 $0 \rightarrow C \xrightarrow{1_C} C \xrightarrow{0} \rightarrow$ 和 $A \xrightarrow{1_A} A \rightarrow 0 \xrightarrow{0} \rightarrow$ 。设 $\mathfrak{s}(\delta) = [A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]$ 和 $\mathfrak{s}(\delta') = [A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C']$ 。我们说一个由形如 (a, b, c) 的态射组成的三元组在 $\mathcal{C}$ 实现 $(a, c) : \delta \rightarrow \delta'$ 中成立, 如果 $bx = x'a$ 和 $cy = y'b$ 成立。三元组 (a, b, c) 被称为一个 $\mathbb{E}$ -三角形的态射, 并用以下的交换图表示

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{x} & B & \xrightarrow{y} & C \xrightarrow{\delta} \rightarrow \\ a \downarrow & & \downarrow b & & \downarrow c \\ A' & \xrightarrow{x'} & B' & \xrightarrow{y'} & C' \xrightarrow{\delta'} \rightarrow \end{array}$$

以下结果在证明我们的主要结论中将是有益的。

命题 1.1. [17, Proposition 3.15] 令 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 为一个外三角范畴。令 $A_1 \xrightarrow{x_1} B_1 \xrightarrow{y_1} C \xrightarrow{\delta_1} \rightarrow$ 和 $A_2 \xrightarrow{x_2} B_2 \xrightarrow{y_2} C \xrightarrow{\delta_2} \rightarrow$ 为任意一对 $\mathbb{E}$ -三角形。然后, 存在一个交换图的 $\mathbb{E}$ -三角形

$$\begin{array}{ccccccc} & & A_2 & \xlongequal{\quad} & A_2 & & \\ & & m_2 \downarrow & & \downarrow x_2 & & \\ A_1 & \xrightarrow{m_1} & M & \xrightarrow{e_1} & B_2 & \xrightarrow{\delta_1 \cdot y_2} & \\ \parallel & & e_2 \downarrow & & \downarrow y_2 & & \\ A_1 & \xrightarrow{x_1} & B_1 & \xrightarrow{y_1} & C & \xrightarrow{\delta_1} \rightarrow & \\ & & \delta_2 \cdot y_1 \downarrow & & \downarrow \delta_2 & & \end{array} \quad (1.1)$$

满足条件 $m_1 \cdot \delta_1 + m_2 \cdot \delta_2 = 0$ 。

闭子函子。以下, 我们回顾了 $\mathbb{E}$ 的闭子函子的概念并建立了一些相关的记号。

定义 1.2. [12, Definition 3.7] 令 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 为一个扩张范畴。若函子 $\mathbb{F} : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ 满足以下条件, 则称为子函子 $\mathbb{E}$:

- (1) $\mathbb{F}(C, A) \subseteq \mathbb{E}(C, A)$ 对于所有 $A, C \in \mathcal{C}$ 。
- (2) $\mathbb{F}(c^{\text{op}}, a) = \mathbb{E}(c^{\text{op}}, a) \mid_{\mathbb{F}(C, A)}$ 成立, 对于任意的 $c \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C', C)$ 和 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A')$ 。

在这种情况下, 我们记作 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ 。如果另外, 对于任何 $C, A \in \mathcal{C}$, $\mathbb{F}(C, A)$ 都是 $\mathbb{E}(C, A)$ 的一个阿贝尔子群, 则我们说 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{E}$ 的一个加性子函子。

令 $\mathbb{F}$ 为 $\mathbb{E}$ 的一个加性子函子。对于实现 $\mathfrak{s}$ 的 $\mathbb{E}$ ，我们将 $\mathfrak{s}|_{\mathbb{F}}$ 定义为 $\mathfrak{s}$ 在 $\mathbb{F}$ 上的限制，即对于任何 $\mathbb{F}$ -扩展 δ ，有 $\mathfrak{s}|_{\mathbb{F}}(\delta) := \mathfrak{s}(\delta)$ 。因此，我们说 $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ 是一个 $\mathfrak{s}|_{\mathbb{F}}$ -综合，而 $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \xrightarrow{\delta}$ 是一个 $\mathbb{F}$ -三角形，如果 $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ 实现了一个 $\mathbb{F}$ -扩张 δ 。在这种情况下， $x: A \rightarrow B$ 和 $y: B \rightarrow C$ 分别称为 $\mathfrak{s}|_{\mathbb{F}}$ -通胀和 $\mathfrak{s}|_{\mathbb{F}}$ -减压。

定义 1.3. [12, Definition 3.10] 令 $\mathbb{F}$ 为 $\mathbb{E}$ 的加性子函子。

- (1) $\mathbb{F}$ 是右端闭合，如果对于任何 $\mathfrak{s}|_{\mathbb{F}}$ -组合 $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ 和 $X \in \mathcal{C}$ ，序列

$$\mathbb{F}(X, A) \xrightarrow{\mathbb{F}(X, x)} \mathbb{F}(X, B) \xrightarrow{\mathbb{F}(X, y)} \mathbb{F}(X, C)$$

在 Ab 中是正合的。

- (2) $\mathbb{F}$ 是左侧闭合，如果对于任意的 $\mathfrak{s}|_{\mathbb{F}}$ -混合 $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ 和 $X \in \mathcal{C}$ ，序列

$$\mathbb{F}(C, X) \xrightarrow{\mathbb{F}(y, X)} \mathbb{F}(B, X) \xrightarrow{\mathbb{F}(x, X)} \mathbb{F}(A, X)$$

在 Ab 中是精确的。

我们说 $\mathbb{F}$ 是关闭，如果它既在右边闭合也在左边闭合（见 [12, Lemma 3.15]）。

以下闭子函子的特征是 [12, Section 3.2] 的主要结果。这表明研究 $\mathbb{E}$ 的闭子函子的重要性，因为它们诱导相对外三角结构。

命题 1.4. [12, Proposition 3.16] 令 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 为一个扩张范畴。对于任何加性子函子 $\mathbb{F}$ 为 $\mathbb{E}$ 的，以下条件等价的。

- (1) $\mathbb{F}$ 是闭合的。
- (2) $\mathfrak{s}|_{\mathbb{F}}$ -膨胀类在复合下是封闭的。
- (3) $\mathfrak{s}|_{\mathbb{F}}$ -压缩类在复合下是封闭的。
- (4) $(\mathcal{C}, \mathbb{F}, \mathfrak{s}|_{\mathbb{F}})$ 是一个外三角范畴。

sectionsection=0 SUBSECTIONSECTION=0 2. 主要结果

我们从介绍子函子的所谓 3×3 -引理性质开始，这些子函子属于外三角范畴 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 中的 $\mathbb{E}$ ，并研究其与闭合条件的关系。以下结果对本工作的其余部分起着重要作用，因此我们在此包括其证明。

引理 2.1. 令 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 是一个外三角范畴， $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{E}$ 的加性子函子，并且 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\delta}$ 是一个 $\mathbb{E}$ -三角形。然后， f 是一个 $\mathfrak{s}|_{\mathbb{F}}$ -膨胀，当且仅当 g 是一个 $\mathfrak{s}|_{\mathbb{F}}$ -收缩。

证明. 如果 f 是一个 $\mathfrak{s}|_{\mathbb{F}}$ -膨胀，则存在一个 $\mathbb{F}$ -三角形 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g'} C' \xrightarrow{\eta}$ 。由 (ET3)，存在一个从 $c: C \rightarrow C'$ 到 $\mathcal{C}$ 的态射，使得下图可交换

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{\delta} \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow c & \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{\eta} \end{array},$$

然后是 $\eta \cdot c = \delta$ 。由于 $\mathbb{F}$ 是一个加法子函子，我们有 $\delta \in \mathbb{F}(A, C)$ ，因此 g 是一个 $\mathfrak{s}|_{\mathbb{F}}$ -通缩。对偶地，逆蕴含也成立。 $\square$

以下定义建立了在扩张三角范畴中与 3×3 引理性质的类比。这个概念最初出现在 abelian 范畴中的 [3]。

定义 2.2. 令 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 是一个外三角范畴，并且令 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{E}$ 的一个加性子函子。我们说如果对于每一个交换图中的 $\mathbb{E}$ -三角形

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & C \dashrightarrow^{\varepsilon_1} \\
 i \downarrow & & \downarrow j & & \downarrow c \\
 D & \xrightarrow{d} & E & \xrightarrow{e} & G \dashrightarrow^{\varepsilon_2} \\
 k \downarrow & & \downarrow l & & \downarrow f \\
 H & \xrightarrow{g} & I & \xrightarrow{h} & J \dashrightarrow^{\varepsilon_3} \\
 \eta_1 \downarrow & & \downarrow \eta_2 & & \downarrow \eta_3
 \end{array}$$

其中 (i, j, c) 是 $\mathbb{E}$ -三角形的态射，如果所有的列和外部行都是 $\mathbb{F}$ -三角形，则中间的行也是一个 $\mathbb{F}$ -三角形，那么 $\mathbb{F}$ 具有 3×3 -引理性质。

如我们在上一节中提到的，研究闭子函子 $\mathbb{E}$ 是相关的，因为它们诱导相对外三角结构。 3×3 引理性质允许我们添加另一个等价条件到命题 1.4 中给出的那些条件中，这将 [3, Lemma 2.2.1] 推广到了外三角范畴的上下文中。

定理 2.3. 令 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 是一个拓展三角范畴。对于任何加性子函子 $\mathbb{F}$ 的 $\mathbb{E}$ ，以下条件 是等价的。

- (1) $\mathbb{F}$ 具有 3×3 -引理性质。
- (2) $\mathbb{F}$ 是闭合的。

证明. (1) $\Rightarrow$ (2) 根据命题 1.4，只需证明 $\mathfrak{s}|_{\mathbb{F}}$ -挠元类在合成下是封闭的。设 $A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \dashrightarrow^{\delta}$ 和 $D \xrightarrow{d} E \xrightarrow{e} G \dashrightarrow^{\theta}$ 是两个 $\mathbb{F}$ -三角形。由 (ET4)^{op}，存在一个交换图中的 $\mathbb{E}$ -三角形

$$\begin{array}{ccccc}
 D & \xlongequal{\quad} & D & & \\
 f \downarrow & & \downarrow d & & \\
 G & \longrightarrow & E & \longrightarrow & C \dashrightarrow^{\theta} \\
 g \downarrow & & \downarrow e & & \parallel \\
 A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & C \dashrightarrow^{\delta} \\
 \mu \downarrow & & \downarrow \eta & &
 \end{array}$$

, 使得 $g \cdot \theta = \delta$ 和 $\eta \cdot a = \mu$ 。此图可以扩展为如下通勤的 $\mathbb{E}$ -三角形:

$$\begin{array}{ccccc}
 D & \xlongequal{\quad} & D & \longrightarrow & 0 & \overset{0_{0,D}}{\dashrightarrow} \\
 f \downarrow & & \downarrow d & & \downarrow & \\
 G & \longrightarrow & E & \longrightarrow & C & \overset{\theta}{\dashrightarrow} \\
 g \downarrow & & \downarrow e & & \parallel & \\
 A & \xrightarrow{\quad a \quad} & B & \xrightarrow{\quad b \quad} & C & \overset{\delta}{\dashrightarrow} \\
 \mu \downarrow & & \downarrow \eta & & \downarrow 0_{C,0} & \\
 & & & & &
 \end{array} \tag{2.1}$$

由于 $\mu = \eta \cdot a$ 是一个 $\mathbb{F}$ -扩张, 那么在图 (2.1) 中所有列以及第一行和第三行都是 $\mathbb{F}$ -三角形。给定 $\mathbb{F}$ 具有 3×3 引理性质, 因此 $G \rightarrow E \xrightarrow{be} C \overset{\theta}{\dashrightarrow}$ 是一个 $\mathbb{F}$ -三角形, 从而使得态射 be 是一个 $\mathfrak{s}|_{\mathbb{F}}$ -通缩。

(2) $\Rightarrow$ (1)。令 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{E}$ 的一个闭子函子。假设我们有一个交换图的 $\mathbb{E}$ -三角形

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{\quad a \quad} & B & \xrightarrow{\quad b \quad} & C & \overset{\varepsilon_1}{\dashrightarrow} \\
 i \downarrow & & \downarrow j & & \downarrow c & \\
 D & \xrightarrow{\quad d \quad} & E & \xrightarrow{\quad e \quad} & G & \overset{\varepsilon_2}{\dashrightarrow} \\
 k \downarrow & & \downarrow l & (*) & \downarrow f & \\
 H & \xrightarrow{\quad g \quad} & I & \xrightarrow{\quad h \quad} & J & \overset{\varepsilon_3}{\dashrightarrow} \\
 \eta_1 \downarrow & & \downarrow \eta_2 & & \downarrow \eta_3 &
 \end{array} \tag{2.2}$$

其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ 都是 $\mathbb{F}$ -扩张, 并且使得 $i \cdot \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \cdot c$ 。为了看出 $D \xrightarrow{d} E \xrightarrow{e} G \overset{\varepsilon_2}{\dashrightarrow}$ 是一个 $\mathbb{F}$ -三角形, 我们将证明 d 是一个 $\mathfrak{s}|_{\mathbb{F}}$ -膨胀。

根据命题 1.1 的对偶, 我们有以下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{\quad a \quad} & B & \xrightarrow{\quad b \quad} & C & \overset{\varepsilon_1}{\dashrightarrow} \\
 i \downarrow & & \downarrow q & & \parallel & \\
 D & \xrightarrow{\quad u \quad} & M & \xrightarrow{\quad x \quad} & C & \overset{i \cdot \varepsilon_1}{\dashrightarrow} \\
 k \downarrow & & \downarrow p & & & \\
 H & \xlongequal{\quad} & H & & & \\
 \eta_1 \downarrow & & \downarrow a \cdot \eta_1 & & &
 \end{array} .$$

现在由于 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{E}$ 的加性子函子, 因此 $i \cdot \varepsilon_1 \in \mathbb{F}(C, D)$ 和 $a \cdot \eta_1 \in \mathbb{F}(H, B)$ 。

另一方面, 由 $(\text{ET4})^{\text{op}}$, 我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
 D & \xlongequal{\quad} & D & & & & \\
 u \downarrow & & \downarrow d & & & & \\
 M & \xrightarrow{v} & E & \xrightarrow{y} & J & \dashrightarrow^{\theta} & \\
 x \downarrow & & \downarrow e & & \parallel & & \\
 C & \xrightarrow{c} & G & \xrightarrow{f} & J & \dashrightarrow^{\eta_3} & \\
 \varepsilon_2 \cdot c = i \cdot \varepsilon_1 \downarrow & & \downarrow \varepsilon_2 & & & &
 \end{array}$$

注意在图 (2.2) 中的可换性 (*) 产生 $y = fe = hl$ 。给定 $\mathbb{F}$ 是闭合的, 且 h, l 都是 $\mathfrak{s}|_{\mathbb{F}}$ -降解, 根据命题 1.4 可知 $y = hl$ 也是一个 $\mathfrak{s}|_{\mathbb{F}}$ -降解, 因此从引理 2.1 可得 v 是一个 $\mathfrak{s}|_{\mathbb{F}}$ -膨胀。现在我们得到 $d = vu$ 是由 $\mathfrak{s}|_{\mathbb{F}}$ -膨胀组成的, 这再次根据命题 1.4 意味着 d 是一个 $\mathfrak{s}|_{\mathbb{F}}$ -膨胀。 $\square$

作为前面结果的推论, 我们在精确范畴的背景下得到了与 [6, Corollary 3.6] 类似的结论。

推论 2.4. 设 $(C, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 是一个三角范畴, 并且设 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{E}$ 的一个闭子函子。考虑一个交换图中的 $\mathbb{E}$ -三角形

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & C \dashrightarrow^{\varepsilon_1} \\
 i \downarrow & & \downarrow j & & \downarrow c \\
 D & \xrightarrow{d} & E & \xrightarrow{e} & G \dashrightarrow^{\varepsilon_2} \\
 k \downarrow & & \downarrow l & & \downarrow f \\
 H & \xrightarrow{g} & I & \xrightarrow{h} & J \dashrightarrow^{\varepsilon_3} \\
 \eta_1 \downarrow & & \downarrow \eta_2 & & \downarrow \eta_3
 \end{array} \tag{2.3}$$

其中所有列都是 $\mathbb{F}$ -三角形, 使得 $(i, c) : \varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2$ 和 $(k, f) : \varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_3$ 是 $\mathbb{E}$ -扩张的态射。然后, 以下条件是等价的。

- (1) (2.3) 的中间一行是一个 $\mathbb{F}$ -三角形。
- (2) (2.3) 的第一行和第三行为 $\mathbb{F}$ -三角形。

证明. 由于 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{E}$ 的一个闭子函子, 根据定理 2.3 可知 $\mathbb{F}$ 具有 3×3 引理性质。因此, (2) $\Rightarrow$ (1) 成立。

假设 ε_2 是一个 $\mathbb{F}$ -扩展。然后, 我们有 $\varepsilon_3 \cdot f = k \cdot \varepsilon_2 \in \mathbb{F}(G, H)$ 和 $i \cdot \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \cdot c \in \mathbb{F}(C, D)$, 其中 f 是一个 $\mathfrak{s}|_{\mathbb{F}}$ -紧缩, 而 i 是一个 $\mathfrak{s}|_{\mathbb{F}}$ -膨胀。因此, 从 [12, Lemma 3.14] 及其对偶我们可以得出 ε_1 和 ε_2 是 $\mathbb{F}$ -扩张。 $\square$

备注 2.5. 在对定理 2.3 的证明进行仔细修订后, 我们观察到, 在假设 (k, l, f) 是 $\mathbb{E}$ -三角形的态射而不是 (i, j, c) 为一个, 的情况下, 该证明仍然成立。证明通过使用对偶论据得出。

与饱和恰当类的关系。我们在此项工作中得出的结论将所发展的理论与在 [2, 13] 中给出的饱和类和恰当类联系起来。我们首先回顾以下定义。

定义 2.6. [13, Definition 3.1] 令 $(C, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 是一个外三角范畴, ξ 是一类在同构下封闭的 $\mathbb{E}$ -三角形。我们说 ξ 是一个**真类**, 如果以下条件成立。

- (1) ξ 包含所有分割的 $\mathbb{E}$ -三角形。
- (2) ξ 在有限余积下是封闭的。
- (3) ξ 在基变换和余基变换下是封闭的。

此外, 如果满足以下条件, 则 ξ 是**饱和的**: 在图 (1.1) 的情况下, 如果第三列和中间行是 ξ 中的 $\mathbb{E}$ -三角形, 则第三行也属于 ξ 。

一些参考文献, 如在 [13] 中, 认为饱和条件是适当类定义的一部分。在这项工作中, 适当的类不一定满足饱和 (见 [19, Appendix A])。

令 $(C, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 是一个外三角范畴, 令 ξ 是一类在同构下封闭的 $\mathbb{E}$ -三角形。对于任何 $A, C \in C$, 设定

$$\mathbb{E}_\xi(C, A) := \{\delta \in \mathbb{E}(C, A) \mid \text{there exists an } \mathbb{E}\text{-triangle } A \rightarrow B \rightarrow C \xrightarrow{\delta} \in \xi\}.$$

在 [13, Theorem 3.2] 中证明了, ξ 是一个饱和的真类当且仅当 $(C, \mathbb{E}_\xi, \mathfrak{s}|_{\mathbb{E}_\xi})$ 是一个外三角范畴, 并且从命题 1.4 可知, $\mathbb{E}_\xi$ 是从 $\mathbb{E}$ 的一个闭合子函子。此外, 如以下命题所示, 这种对应是双射的。

命题 2.7. [19, Proposition A4.] 令 $(C, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 为一个扩张范畴。则以下条件成立。

- (1) $\xi \mapsto \mathbb{E}_\xi$ 对应于 $\mathbb{E}$ -三角形的恰当类与 $\mathbb{E}$ 的加法子函子之间是一一对应的。
- (2) 在上述对应中, 饱和恰当类对应于 $\mathbb{E}$ 的闭子函子。

先前的结果表明饱和恰当类和闭子函子本质上是相同的。因此, 我们可以按照恰当类来建立我们的主要结果如下。

推论 2.8. 令 $(C, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 是一个外三角范畴。如果 ξ 是 $\mathbb{E}$ -三角形的一个恰当类, 那么以下条件是等价的。

- (1) ξ 是饱和的。
- (2) ξ 满足 **3 × 3-引理性质**: 对于任意的交换图中的 $\mathbb{E}$ -三角形

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & C & \cdots\cdots\cdots & \\
 i \downarrow & & \downarrow j & & \downarrow c & & \\
 D & \xrightarrow{d} & E & \xrightarrow{e} & G & \cdots\cdots\cdots & \\
 k \downarrow & & \downarrow l & & \downarrow f & & \\
 H & \xrightarrow{g} & I & \xrightarrow{h} & J & \cdots\cdots\cdots & \\
 \vdots \downarrow & & \vdots \downarrow & & \vdots \downarrow & &
 \end{array} \tag{2.4}$$

使得 (i, j, c) 或 (k, l, f) 是 $\mathbb{E}$ -三角形的态射, 如果所有的列和外部行属于 ξ , 那么中间行也属于 ξ 。

推论 2.9. 令 $(C, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 为一个拓展三角范畴, 令 ξ 为 $\mathbb{E}$ -三角形的一个饱和恰当类。考虑一个如 (2.4) 所示的 $\mathbb{E}$ -三角形交换图, 使得所有列都属于 ξ , 且三元组 (i, j, c) 和 (k, l, f) 是 $\mathbb{E}$ -三角形的态射。那么, 下列条件是等价的。

- (1) (2.4) 的中间一行属于 ξ 。
- (2) (2.4) 的第一行和第三行属于 ξ 。

致谢

我们感谢 Mindy Huerta 和 Octavio Mendoza 对本工作的第一版提供的鼓励、反馈和有益的改进。

REFERENCES

- [1] R.-L. Baillargeon, T. Brüstle, M. Gorsky, and S. Hassoun. On the lattices of exact and weakly exact structures. *Journal of Algebra*, 612:77–109, 2022.
- [2] A. Beligiannis. Relative homological algebra and purity in triangulated categories. *Journal of algebra*, 227(1):268–361, 2000.
- [3] A. B. Buan. Closed subbifunctors of the extension functor. *Journal of Algebra*, 244(2):407–428, 2001.
- [4] D. A. Buchsbaum. A note on homology in categories. *Annals of Mathematics*, 69(1):66–74, 1959.
- [5] D. A. Buchsbaum. Satellites and Universal Functors. *Annals of Mathematics*, 71(2):199–209, 1960.
- [6] T. Bühler. Exact categories. *Expo. Math.*, 28(1):1–69, 2010.
- [7] M. Butler and G. Horrocks. Classes of extensions and resolutions. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 254(1039):155–222, 1961.
- [8] J. C. Cala. An elementary proof of a criterion for subfunctors of Ext to be closed. *arXiv:2407.01203*, 2024.
- [9] P. Dräxler, I. Reiten, S. Smalø, and Ø. Solberg. Exact categories and vector space categories. *Transactions of the American Mathematical Society*, 351(2):647–682, 1999. With an appendix by B. Keller.
- [10] H. Enomoto. Classifying substructures of extriangulated categories via serre subcategories. *Applied Categorical Structures*, 29(6):1005–1018, 2021.
- [11] J. L. Fisher. The tensor product of functors; satellites; and derived functors. *Journal of Algebra*, 8(3):277–294, Mar. 1968.
- [12] M. Herschend, Y. Liu, and H. Nakaoka. n -exangulated categories (I): Definitions and fundamental properties. *Journal of Algebra*, 570:531–586, 2021.
- [13] J. Hu, D. Zhang, and P. Zhou. Proper classes and Gorensteinness in extriangulated categories. *Journal of algebra*, 551:23–60, 2020.
- [14] J. Hu, D. Zhang, and P. Zhou. Gorenstein homological dimensions for extriangulated categories. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 44(4):2235–2252, 2021.
- [15] O. Iyama, H. Nakaoka, and Y. Palu. Auslander–Reiten theory in extriangulated categories. *Transactions of the American Mathematical Society, Series B*, 11(08):248–305, 2024.
- [16] B. Keller. Chain complexes and stable categories. *Manuscripta Mathematica*, 67(1):379–417, 1990.
- [17] H. Nakaoka and Y. Palu. Extriangulated categories, Hovey twin cotorsion pairs and model structures. *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.*, 60(2):117–193, 2019.

- [18] D. Quillen. Higher algebraic K-theory: I. In H. Bass, editor, *Higher K-Theories*, Lecture Notes in Mathematics, pages 85–147, Berlin, Heidelberg, 1973. Springer.
- [19] A. Sakai. Relative extriangulated categories arising from half exact functors. *Journal of Algebra*, 614:592–610, 2023.
- [20] A. Tattar. The structure of aisles and co-aisles of t-structures and co-t-structures. *Applied Categorical Structures*, 32(1):5, 2024.
- [21] R. Xu and X. Fu. Ideal balanced pairs in extriangulated categories. *Science China Mathematics*, 68(2):271–284, 2025.

(Juan C. Cala) FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO. CIRCUITO EXTERIOR, CIUDAD UNIVERSITARIA. CP04510. MEXICO CITY, MEXICO.

Email address: jccalab@gmail.com

(Shaira R. Hernández) INSTITUTO DE MATEMÁTICAS. UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO. CIRCUITO EXTERIOR, CIUDAD UNIVERSITARIA. CP04510. MEXICO CITY, MEXICO

Email address: shaira.hernandez@im.unam.mx