磁场振荡对超高清洁二维I型超导体临界温度的影响

Aiying Zhao,^{1,*} Richard A Klemm,^{2,†} and Qiang Gu^{1,‡}

¹Institute of Theoretical Physics, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, People's Republic of China

²Department of Physics, University of Central Florida,

Orlando, FL 32816-2385, United States of America

(10Dated: 2025 年 4 月 26 日)

我们研究了由外加磁场 **B** 引起的朗道能级(LL)和塞曼能量对二维超清洁金属临界温度 *T_c* 的影响, 采用了基于巴丁-库珀-施里弗 (BCS) 理论的完全量子力学方法。与标准 BCS 理论不同的是,它允许自 旋相反、沿 **B** 方向动量相同的电子或相邻朗道能级上的电子形成库珀对。我们对朗道能级的量子力学 处理表明,在较低磁场下,同一朗道能级上配对的电子的 *T_c*(**B**) 在 BCS 临界温度附近表现出振荡现象, 这一现象类似于德哈斯-范阿尔芬效应。塞曼能量导致在同一及相邻朗道能级上的配对电子的 *T_c*(**B**) 随 着 **B** 的增加而减少。值得注意的是,随着 *g* 因子的增加,**B** 振荡的振幅逐渐减小,直到在更高的磁场 中消失。相反,对于较小的 *g* 因子,在同一或相邻 LL 上的电子配对可以在非常高的磁场下导致重新 进入超导相。

I. 介绍

超导体的一个重要特征是它们的临界温度(*T_c*)。 理解超导的基本物理依赖于对该关键属性的实验测量 和理论研究。正在进行的研究继续探索影响临界温度 的各种因素,包括同位素效应[1,2]、杂质[3,4]、压 力[5-7]以及磁场[7-17]。在这些影响因素中,磁场对 超导临界温度的影响仍然是一个关键且活跃的研究领 域,特别是关于上临界场[18]和涡旋态[19]等现象。 在这项研究中,我们特别关注磁场如何影响二维(2D) I型超导体的临界温度。

为了理解电子在磁场中的行为,研究人员经常使 用半经典近似方法,特别是在接近 *T_c* [20–23] 的上临 界场附近。当磁场变化相对于电子的波长来说较为缓 慢时,这种做法是有效的。靠近 *T_c* 时,这一点进一步 得到了金兹堡-朗道 (GL) 理论的支持。在这种近似中, 库珀对使用正常态属性来处理,并且通过一个相因子 主要捕获磁场对电子的影响,从而简化了计算。在某 些条件下,这种半经典近似可以揭示出与占据最低朗 德水准 (LLs) 的库珀对一致的行为。

然而,这种半经典图像在强磁场 B 存在的情况下 以及在超导态向正常态转变附近会失效,在这些情况 下,将形成库珀对的电子视为简单的正常态电子(不考 虑朗道量子化)的假设变得越来越不充分。因此,许多 研究深入探讨了高磁场中超导体中的朗道能级 LL 的 影响,但通常集中在只填充最低 LL 或几个 LL 的"量 子"极限区域[8,13],这一体系已知会表现出如超导性 再现等特别有趣的物理现象。然而,大多数常规超导 体在实验中实现这一量子极限仍是一个重大挑战,通 常需要几千特斯拉的磁场强度,这些磁场往往难以达 到。尽管最近的研究表明,低载流子密度系统神奇角 度扭曲双层石墨烯 (MATBG) 有可能在更易获得的场强 [17] 下到达这个量子极限,但大多数超导体中显著较高的载流子密度意味着它们通常在实验条件下无法达到这种极端的量子极限。相反,在费米面 FS 附近的这些材料表现出数千个朗道能级 LL,这使得在这种多层级制度下的朗道能级效应研究成为更常见的研究领域。

除了 LLs 捕获的轨道量子化效应外, 塞曼分裂(塞曼能量)在磁场中超导体的行为中也扮演着至关重要的角色, 作为另一个抑制超导性的显著因素。塞曼分裂的一个重要后果是确定泡利极限 (*B_p*)[24, 25], 这代表了超过该强度的磁场将使得自旋极化能克服超导凝聚能。然而, 在这里我们选择了忽略泡利极限的影响, 这意味着所考虑的强磁场不会导致电子产生显著的自旋极化。确实, 虽然在磁场中的库仑相互作用、自旋-自旋相互作用和磁相互作用都能影响电子的行为 [26, 27], 但我们选择忽略这些复杂性以保持一个简化但仍具有洞察力的物理模型。

基于对磁场效应的理解,我们知道由于塞曼分裂, 在相同 LL 上具有相反自旋方向的电子拥有不同的能 量。在磁场中的 LL 之间的能量分离,结合即使是微 小的吸引力相互作用,可以诱导二维材料中的超导性。 假设是自旋单态配对,这开启了各种库珀配对构型的 可能性,包括在同一 LL 上的电子之间、相邻 LL 之间 的配对或跨越混合 LL 的配对。为了简化我们的研究, 我们专注于通过占据相同或邻近 LL 且具有相反自旋 的电子形成的库珀对(如图 1 所示)。

为了分析这一特定场景,我们采用了 BCS 理论框架内的完全量子力学方法,与半经典方法相对照。本文的其余部分结构如下:第二节介绍了在同一能级和相邻能级上配对的电子的量化哈密顿量,并随后推导了这两个模型的临界温度。第三节然后呈现并讨论了从第二节方程获得的数值结果,详细说明了能级和塞曼分裂的影响。最后,第四节总结了本研究的主要发现和结论。

^{*} ayzhao0909@sina.cn

 $^{^{\}dagger}$ richard.klemm@ucf.edu

 $^{^{\}ddagger}$ qgu@ustb.edu.cn



图 1. LL 和二维中电子配对的示意图。箭头表示电子自旋, n,n+1...代表费米面附近薄壳中的LL数量, b是塞曼能量, $\hbar\omega$ 是最邻近LL之间的能量差。第一列(a)不包括塞曼能量,最 后三列(b-d)显示了三种不同的塞曼能量相对于相邻LL之间 能量差的一半的情况。(b-d)中的红色圆圈表示同一LL上的电 子配对,而绿色圆圈代表在相邻LL上配对的电子。在图中,自 旋向上的电子在第n个LL中的能量是 $n\hbar\omega + b$,而自旋向下 的电子在第(n+1)个LL中的能量是 $(n+1)\hbar\omega - b$ 。图 c 特别 描绘了相邻的LL上配对的电子具有相同能量的情况。

II. 模型

A. 在同一LL 上配对的电子

电子在垂直磁场 B 下的椭球费米面二维超导体中的哈密顿量,当它们在同一朗道能级上配对时为

$$H = \sum_{n} \frac{eBL^2}{2\pi\hbar} \left((\epsilon_n + b) a^{\dagger}_{n,\uparrow} a_{n\uparrow} + (\epsilon_n - b) a^{\dagger}_{n,\downarrow} a_{n,\downarrow} \right)$$
$$-V_{int} \sum_{n} \frac{eBL^2}{2\pi\hbar} (a^{\dagger}_{n,\uparrow} a^{\dagger}_{n,\downarrow} a_{n,\downarrow} a_{n,\uparrow}), \qquad (1)$$

$$\epsilon_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega - \mu_F, \qquad (2)$$

其中 $-V_{int}$ 是围绕 FS 壳层内的电子能量的小吸引性电 子-电子相互作用, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ 为约化普朗克常数, $\omega = \frac{eB}{m_{xy}}$ 为回旋频率, $m_{xy} = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$ 表示在平面 [28, 30? , 31] 中的有效质量, $b = |\frac{g}{2}\mu_B\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B}|$ 是齐曼能, $\frac{eBL^2}{2\pi\hbar}$ 是一个朗道能级的简并度, 而 L^2 是与 **B** 垂直的样品面 积。求和指标 $n \in \mathcal{R}$ 件 $-\hbar\omega_D \leq (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \pm b - \mu_F \leq \hbar\omega_D$ 的限制。

为了对哈密顿量进行对角化,我们通过定义新的

费米算符

$$\begin{split} \gamma_{n,\uparrow} &= \mu_n a_{n,\uparrow} - \nu_n a_{n,\downarrow}^{\dagger}, \\ \gamma_{n,\downarrow} &= \mu_n a_{n,\downarrow} + \nu_n a_{n,\uparrow}^{\dagger}; \\ \gamma_{n,\uparrow}^{\dagger} &= \mu_n^* a_{n,\uparrow}^{\dagger} - \nu_n^* a_{n,\downarrow}, \\ \gamma_{n,\downarrow}^{\dagger} &= \mu_n^* a_{n,\downarrow}^{\dagger} + \nu_n^* a_{n,\uparrow}, \end{split}$$
(3)

来使用改进的 Bogoliubov-Valatin 变换 [32, 33], 其中 系数 μ_n, ν_n 满足

$$|\mu_n|^2 + |\nu_n|^2 = 1.$$
(4)

然后很容易得到

$$a_{n,\uparrow} = \mu_n^* \gamma_{n,\uparrow} + \nu_n \gamma_{n,\downarrow}^{\dagger},$$

$$a_{n,\downarrow} = \mu_n^* \gamma_{n,\downarrow} - \nu_n \gamma_{n,\uparrow}^{\dagger};$$

$$a_{n,\uparrow}^{\dagger} = \mu_n \gamma_{n,\uparrow}^{\dagger} + \nu_n^* \gamma_{n,\downarrow},$$

$$a_{n,\downarrow}^{\dagger} = \mu_n \gamma_{n,\downarrow}^{\dagger} - \nu_n^* \gamma_{n,\uparrow}.$$
(5)

将方程(5)代入方程(1)后,哈密顿量变为

$$H = H_0 + H_1 + E_g, (6)$$

其中

$$H_{0} = \frac{eBL^{2}}{2\pi\hbar} \sum_{n} \left[\left((\epsilon_{n} + b) |\mu_{n}|^{2} - (\epsilon_{n} - b) |\nu_{n}|^{2} + \mu_{n}^{*}\nu_{n}\Delta^{*} + \mu_{n}\nu_{n}^{*}\Delta \right) \gamma_{n,\uparrow}^{\dagger} \gamma_{n,\uparrow} + \left(-(\epsilon_{n} + b) |\nu_{n}|^{2} + (\epsilon_{n} - b) |\mu_{n}|^{2} + \mu_{n}^{*}\nu_{n}\Delta^{*} + \mu_{n}\nu_{n}^{*}\Delta \right) \gamma_{n,\downarrow}^{\dagger} \gamma_{n,\downarrow} \right],$$

$$H_{1} = \frac{eBL^{2}}{2\pi\hbar} \sum_{n} \left[\left(2\epsilon_{n}\mu_{n}\nu_{n} + \Delta^{*}\nu_{n}^{2} - \Delta\mu_{n}^{2} \right) \gamma_{n,\uparrow}^{\dagger} \gamma_{n,\downarrow}^{\dagger} - \left(2\epsilon_{n}\mu_{n}^{*}\nu_{n}^{*} + \Delta\nu_{n}^{*2} - \Delta^{*}\mu_{n}^{*2} \right) \gamma_{n,\uparrow} \gamma_{n,\downarrow} \right],$$

$$E_{g} = \frac{eBL^{2}}{2\pi\hbar} \sum_{n} \left(2\epsilon_{n}|\nu_{n}|^{2} - \Delta^{*}\mu_{n}^{*}\nu_{n} - \Delta\mu_{n}\nu_{n}^{*} \right) + \frac{|\Delta|^{2}}{V_{int}},$$
(7)

其中超导能隙 $\Delta(T)$ 满足

$$\Delta(T) = V_{int} \sum_{n} \frac{eBL^2}{2\pi\hbar} < a_{n,\downarrow} a_{n,\uparrow} > .$$
 (8)

由于 H_1 只包含 γ 和 γ^{\dagger} 运算符中的非对角线项, 我们要求其消失,从而导致

$$2\epsilon_{n}\mu_{n}\nu_{n} + \Delta^{*}\nu_{n}^{2} - \Delta\mu_{n}^{2} = 0,$$

$$2\epsilon_{n}\mu_{n}^{*}\nu_{n}^{*} + \Delta\nu_{n}^{*2} - \Delta^{*}\mu_{n}^{*2} = 0.$$
 (9)

从方程(4)和方程(9)的两行,我们得到:

$$|\mu_n|^2 = \frac{1}{2} (1 + \frac{\epsilon_n}{\xi_n}),$$

$$|\nu_n|^2 = \frac{1}{2} (1 - \frac{\epsilon_n}{\xi_n}),$$
 (10)

其中 $\xi_n = \sqrt{|\Delta|^2 + \epsilon_n^2}$ 。现在哈密顿量,即方程 (1),已 经被对角化

$$H = H_0 + E_g$$

$$= \frac{eBL^2}{2\pi\hbar} \sum_n \left[(\xi_n + b)\gamma^{\dagger}_{n,\uparrow}\gamma_{n,\uparrow} + (\xi_n - b)\gamma^{\dagger}_{n,\downarrow}\gamma_{n,\downarrow} \right]$$

$$+ \frac{eBL^2}{2\pi\hbar} \sum_n (\epsilon_n - \xi_n) + \frac{\Delta^2}{V_{int}}.$$
(11)

使用方程(5)中定义的新费米子算符,我们可以 将上述自治方程(8)重写为

$$1 = V_{int} \frac{eBL^2}{2\pi\hbar} \sum_{n} \frac{1 - \frac{1}{\frac{\xi_n + b}{1 + e^{\frac{k_B T}{k_B T}}} - \frac{1}{\frac{\xi_n - b}{1 + e^{\frac{k_B T}{k_B T}}}}}{2\xi_n}.$$
 (12)

当 $\Delta(T) \rightarrow 0$ 时, $\xi_n \rightarrow |\epsilon_n|$, 超导态的基本激发 变为正常态的激发。我们通过设定 $\Delta(T) = 0$ 得到方程 (12) 中的临界温度 $T_c(B)$, 结果为

$$1 = V_{int} \frac{eBL^2}{2\pi\hbar} \sum_{n} \left[\frac{\sinh \frac{|(n+\frac{1}{2})\hbar\omega - \mu_F|}{k_B T_c}}{\cosh \frac{b}{k_B T_c} + \cosh \frac{|(n+\frac{1}{2})\hbar\omega - \mu_F|}{k_B T_c}} \times \frac{1}{2|(n+\frac{1}{2})\hbar\omega - \mu_F|} \right].$$
(13)

B. 邻近 LL 上的电子配对

电子在相邻 LLs 上配对的哈密顿量是

$$H' = \sum_{n} \frac{eBL^2}{2\pi\hbar} \left[(\epsilon_n + b)a^{\dagger}_{n,\uparrow}a_{n,\uparrow} + (\epsilon_{n+1} - b)a^{\dagger}_{n+1,\downarrow}a_{n+1,\downarrow} \right] - \sum_{n} \frac{eBL^2}{2\pi\hbar} \left(\Delta^* a_{n,\uparrow}a_{n+1,\downarrow} + \Delta a^{\dagger}_{n+1,\downarrow}a^{\dagger}_{n,\uparrow} \right) + \frac{|\Delta|^2}{V_{int}},$$
(14)

满足的限制

$$\Delta(T) = V_{int} \sum_{n} \frac{eBL^2}{2\pi\hbar} < a_{n,\uparrow} a_{n+1,\downarrow} >$$
(15)

然后我们通过定义新的费米子算符来使用一个修改过的 Bogoliubov 变换:

$$\gamma_{n,\uparrow} = \overline{\mu}_n a_{n,\uparrow} + \overline{\nu}_n a_{n+1,\downarrow}^{\dagger},$$

$$\gamma_{n+1,\downarrow} = \overline{\mu}_n a_{n+1,\downarrow} - \overline{\nu}_n a_{n,\uparrow}^{\dagger};$$

$$\gamma_{n,\uparrow}^{\dagger} = \overline{\mu}_n a_{n,\uparrow}^{\dagger} + \overline{\nu}_n a_{n+1,\downarrow},$$

$$\gamma_{n+1,\downarrow}^{\dagger} = \overline{\mu}_n a_{n+1,\downarrow}^{\dagger} - \overline{\nu}_n a_{n,\uparrow},$$
(16)

其中系数 $\overline{\mu}_n, \overline{\nu}_n$ 是实数并满足

$$\overline{\mu}_n^2 + \overline{\nu}_n^2 = 1. \tag{17}$$

那么很容易得到

$$a_{n,\uparrow} = \overline{\mu}_n \gamma_{n,\uparrow} - \overline{\nu}_n \gamma_{n+1,\downarrow}^{\dagger},$$

$$a_{n+1,\downarrow} = \overline{\mu}_n \gamma_{n+1,\downarrow} + \overline{\nu}_n \gamma_{n,\uparrow}^{\dagger};$$

$$a_{n,\uparrow}^{\dagger} = \overline{\mu}_n \gamma_{n,\uparrow}^{\dagger} - \overline{\nu}_n \gamma_{n+1,\downarrow},$$

$$a_{n+1,\downarrow}^{\dagger} = \overline{\mu}_n \gamma_{n+1,\downarrow}^{\dagger} + \overline{\nu}_n \gamma_{n,\uparrow}.$$
(18)

将方程(18)代入方程(14),有效哈密顿量变为

$$H' = H'_0 + H'_1 + E'_a, \tag{19}$$

其中

$$H_{0}^{\prime} = \frac{eBL^{2}}{2\pi\hbar} \sum_{n} \left[\left((\epsilon_{n} + b)\overline{\mu}_{n}^{2} - (\epsilon_{n+1} - b)\overline{\nu}_{n}^{2} + 2\overline{\mu}_{n}\overline{\nu}_{n}\Delta \right) \gamma_{n,\uparrow}^{\dagger}\gamma_{n,\uparrow} + \left(-(\epsilon_{n} + b)\overline{\nu}_{n}^{2} + (\epsilon_{n+1} - b)\overline{\mu}_{n}^{2} + 2\overline{\mu}_{n}\overline{\nu}_{n}\Delta \right) \gamma_{n+1,\downarrow}^{\dagger}\gamma_{n+1,\downarrow} \right],$$

$$H_{1}^{\prime} = \frac{eBL^{2}}{2\pi\hbar} \sum_{n} \left((\epsilon_{n} + \epsilon_{n+1})\overline{\mu}_{n}\overline{\nu}_{n} + \Delta(\overline{\nu}_{n}^{2} - \overline{\mu}_{n}^{2}) \right) \times \left(\gamma_{n+1,\downarrow}^{\dagger}\gamma_{n,\uparrow}^{\dagger} + \gamma_{n,\uparrow}\gamma_{n+1,\downarrow} \right),$$

$$E_{g}^{\prime} = \frac{eBL^{2}}{2\pi\hbar} \sum_{n} \left((\epsilon_{n} + \epsilon_{n+1})\overline{\nu}_{n}^{2} - 2\Delta\overline{\mu}_{n}\overline{\nu}_{n} \right) + \frac{|\Delta|^{2}}{V_{int}}.$$

$$(20)$$

由于 H'_1 包含 γ 和 γ^{\dagger} 算符的非对角项,我们要求它为 零,这意味着

$$(\epsilon_n + \epsilon_{n+1})\overline{\mu}_n\overline{\nu}_n + \Delta(\overline{\nu}_n^2 - \overline{\mu}_n^2) = 0.$$
 (21)

$$\overline{\mu}_{n}^{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\epsilon_{n,n+1}}{\xi_{n,n+1}} \right),$$

$$\overline{\nu}_{n}^{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_{n,n+1}}{\xi_{n,n+1}} \right),$$
 (22)

其中
$$\xi_{n,n+1} = \sqrt{\Delta^2 + \epsilon_{n,n+1}^2},$$

 $\epsilon_{n,n+1} = \frac{\epsilon_n + \epsilon_{n+1}}{2}.$ (23)

请注意由于方程(21), μ_n 和 $\overline{\nu}_n$ 是 $\epsilon_{n,n+1}$ 和 Δ 的函数。最后,位于相邻朗道能级上的电子配对的哈密顿量被对角化并变为

$$H' = H'_{0} + E'_{g}$$

$$= \frac{eBL^{2}}{2\pi\hbar} \sum_{n} \left[\left(\xi_{n,n+1} - \epsilon_{n,n+1} + b \right) \gamma^{\dagger}_{n,\uparrow} \gamma_{n,\uparrow} + \left(\xi_{n,n+1} + \epsilon_{n,n+1} - b \right) \gamma^{\dagger}_{n+1,\downarrow} \gamma_{n+1,\downarrow} \right]$$

$$+ \frac{eBL^{2}}{2\pi\hbar} \sum_{n} (\epsilon_{n,n+1} - \xi_{n,n+1}) + \frac{\Delta^{2}}{V_{int}}.$$
(24)

使用方程(18)中定义的新费米子算符,我们可以 将自洽方程(15)重写为

$$1 = V_{int} \frac{eBL^2}{2\pi\hbar} \sum_{n} \frac{1 - \frac{1}{1+e^{\frac{\xi_{n,n+1}+b}{k_BT}}} - \frac{1}{1+e^{\frac{\xi_{n,n+1}-b}{k_BT}}}}{2\xi_{n,n+1}}$$
(25)

当 $\Delta(T) \rightarrow 0$ 时, $\xi_{n,n+1} \rightarrow |\epsilon_{n,n+1}|$, 超导态的基本激发减少到正常态的水平。我们通过设定 $\Delta(T) = 0$ 来从方程 (25) 中获得临界温度 $T_c(B)$ 。

$$1 = V_{int} \frac{eBL^2}{2\pi\hbar} \sum_{n} \frac{\sinh\frac{|(n+1)\hbar\omega - \mu_F|}{k_B T_c}|}{\cosh\frac{b}{k_B T_c} + \cosh\frac{|(n+1)\hbar\omega - \mu_F|}{k_B T_c}} \times \frac{1}{2|(n+1)\hbar\omega - \mu_F|}.$$
 (26)

III. 数值结果与讨论

本工作研究了 LLs 和塞曼分裂在 BCS 理论框架内 对超导临界温度 (T_c) 的影响。为了建立一个基准场景, 我们考虑一个二维模型,其费米能为 $\mu_F = 0.1$ 电子伏 特,德拜频率为 $\hbar\omega_D = 0.01$ 电子伏特,这给出了 BCS 临界温度 (T_c) 为 1 开尔文。BCS 吸引力强度 $-V_{int}$ 由 关系式 $k_BT_c = (2e^{\gamma}/\pi)\hbar\omega_D \exp(-1/N(0)V_{int})$ 确定, 其中 $\gamma \approx 0.5772$ 是欧拉常数且 $2e^{\gamma}/\pi \approx 1.13$ 。为了



图 2. 临界温度 $T_c(\mathbf{B})$ 在完全各向同性的系统中表现出磁场中的振荡行为,其中电子在同一朗道能级上配对且没有塞曼分裂。 插图清楚地显示了在忽略塞曼分裂时包含朗道能级的 $T_c(\mathbf{B})$ 的振荡。

隔离其他参数对 T_c 的影响,我们在所有模拟中保持 - V_{int} 恒定。这里,N(0) 代表在 μ_F 处的电子态密度。 最初,我们展示了完全各向同性系统中的临界温度数 值结果,该系统由 $b = \hbar\omega/2$ 和 g = 2 表征。我们采用 了 Bogoliubov-Valatin 变换来对哈密顿量(方程 (1) 和 (14))进行对角化,并通过假设在临界温度 T_c 下自洽 方程 (8) 和 (15) 中的能隙消失,从而确定了磁场 $T_c(\mathbf{B})$ 下的临界温度。

为了首先理解 LLs 的作用,我们考虑了一个完全 各向同性的系统在磁场中的超导临界温度,忽略了齐 曼分裂。图 2 说明了这个临界温度 $T_c(\mathbf{B})$ 随着磁场的 变化情况,特别针对同一LLs中自旋相反的电子配对。 在低磁场条件下, $T_c(\mathbf{B})$ 大约为 1K, 与标准 BCS 理论 一致。在这个区域附近费米面充满了大量 LLs,并且 相邻能级之间的能量差异很小,使得电子的能量谱几 乎连续并类似于自由电子。随着磁场强度的增加,在 $T_c(\mathbf{B})$ 中出现了明显的振荡现象,如图 2 左侧插图所 示。这些振荡在更高的磁场下继续存在;然而,与低磁 场区域不同的是,它们的幅度显著增加,其值既超过 又低于 BCS 理论预测的 1K。这一现象归因于随着磁 场的增强,费米面周围的LLs数量减少,而每个LL内 的态密度增加,从而增强了库珀对的形成。在非常高的 磁场条件下, $T_c(\mathbf{B})$ 的行为变得尤为有趣,不仅出现了 振荡,还持续存在于特定的磁场区间内,表明存在一个 重新进入超导相的现象。在这类高场强下, $T_c(\mathbf{B})$ 展示 出一种复杂且引人注目的模式,特征是明显的振荡以 及在不同磁场范围内持续存在的非超导性,如图2右 侧插图所示。这里观察到的强磁场下的超导重新进入 行为与原始半经典近似[8]的结果相似。

建立了 LLs 单独的影响后,我们继续研究了在磁场中 Zeeman 分裂对超导转变温度 ($T_c(\mathbf{B})$)的影响,通过改变 g 因子来进行。为了简化分析,我们假设相邻





图 3. 临界温度, $T_c(\mathbf{B})$, 在磁场中, 对于具有不同 g 因子的同一朗道能级上的电子配对, 其中电子受到塞曼分裂的影响。在此图中, $T_c(\mathbf{B})$ 用空的橄榄绿色正方形表示 g = 0.5, 用空的红色圆圈表示 g = 1.0, 用空的蓝色三角形表示 g = 2.0, 用空的 普通三角形表示 g = 2.0, 用空的倒三角形表示 g = 3.0, 用空的紫色菱形表示 g = 3.5。嵌入图清楚地说明了小 g 因子引起的 $T_c(\mathbf{B})$ 的塞曼分裂振荡。

具有相反自旋的 LLs 之间的能量分裂小于2 (以 $\hbar\omega$ 为单位,其中 ω 是回旋频率),这对应于g因子小于4。 图 3 和图 4 分别展示了在假设自旋单态配对以及库珀 对在同一能级或相邻能级形成的情况下,各种g因子 的 $T_c(\mathbf{B})$ 结果。

图 3 说明了临界温度 $T_c(\mathbf{B})$ 对于同一 LL 上配对的 电子的磁场依赖性。在小的 g 因子情况下, $T_c(\mathbf{B})$ 表现 出类似没有塞曼分裂时观察到的振荡行为,随着磁场 强度的增加,振荡幅度增大。图 3 中的插图清楚地显 示了这些 $T_c(\mathbf{B})$ 在磁场中的振荡。然而,与没有塞曼分 裂的情况(图 2)相比,一个关键的区别是 $T_c(\mathbf{B})$ 总体 上随着磁场强度的增加而下降。在高磁场下,特别是 对于小的 g 因子时, $T_c(\mathbf{B})$ 的行为变得特别引人入胜, 在强磁场下超导性重新出现,尽管重现的超导性的振 荡范围显著缩小,如图 5a 所示。这一再现现象反映了 在没有塞曼效应的情况下 $T_c(\mathbf{B})$ 的行为。图 3 所示的 数据表明,塞曼能量(或 g 因子)显著影响了磁场中的 $T_c(\mathbf{B})$ 行为,在强磁场强度下这种影响尤为明显。

图 4 说明了邻近 LL 上配对的电子在磁场中的临 界温度 T_c(**B**)。数据揭示了与在同一 LL 上配对的电子 结果有很强的相似性。此外,该图证实了塞曼能在磁 场中显著影响邻近 LL 上配对的电子的 T_c(**B**) 行为。进 一步观察到,在二维超导体中,形成于同一和邻近 LL 上的库珀对在磁场中的超导临界温度表现出极小的影 响,这与三维系统 [34] 的行为形成了对比。

图 5 阐明了在同一和相邻 LL 上的电子配对临界 温度 $T_c(\mathbf{B})$ 的磁场依赖性,考虑了具有 g = 0.5 和 g = 2.0 的 g 因子的 Zeeman 分裂。具体来说,在图 5a 中,

图 4. 临界温度, $T_c(\mathbf{B})$, 在磁场中, 对于具有不同 g 因子的邻近 LL 上的电子配对, 其中电子具有塞曼分裂。在此图中, $T_c(\mathbf{B})$ 用橄榄绿正方形表示 g = 0.5, 用全红圆圈表示 g = 1.0, 用全 正常三角形表示 g = 2.0, 用全倒三角形表示 g = 3.0, 以及用 全紫色菱形表示 g = 3.5。插图清晰地说明了在磁场中, 由于塞 曼分裂引起的 $T_c(\mathbf{B})$ 振荡, 电子配对发生在具有较小 g 因子的 相邻朗道能级上。

随着 g = 0.5, $T_c(B)$ 在磁场范围内表现出振荡行为, 并且值得注意的是,在非常高的磁场下出现了再入超 导相。图 5a 中的插图清楚地展示了低磁场和高磁场下 的这些由 Zeeman 分裂引起的 $T_c(\mathbf{B})$ 的振荡。虽然振荡 幅度随磁场变化,但没有明显的模式可辨。相比之下, 如图 5b 所示,代表 g = 2.0,在高磁场下的再入超导 相和 $T_c(\mathbf{B})$ 振荡的消失被观察到。

图 3-5 说明了超导转变温度 $T_c(\mathbf{B})$ 随着磁场中 g因子的增加显示出显著下降,强调了 Zeeman 效应的 重要贡献。这一结果与实验确定的临界磁化场行为一 致,突出了在磁场分析中纳入 Zeeman 项影响的必要 性。此外,如图 5 所示,在同一和相邻 LL 上形成的 库珀对之间观察到 $T_c(\mathbf{B})$ 差异可以忽略不计,这归因 于费米面附近 LL 密度高。这一点进一步受到二维超 导体缺乏三维约束的影响,与它们的三维对应物不同, 导致二维系统中的 $T_c(\mathbf{B})$ 行为较少多样化。

本研究仅限于清洁极限。然而,杂质可以显著改变 超导特性,包括上临界场和朗道能级展宽,从而影响 $T_c(\mathbf{B})$ 。未来的研究将调查杂质对同一和相邻朗道能级 上的混合电子配对的影响,重点是临界温度、上临界 场以及 I 型超导体的间隙。这项工作也应适用于二维 II 型超导体在低于下临界场 H_{c1} [?]的情况下,此 时没有涡旋。对于二维 II 型超导体中的同一和不同朗 道能级上的电子配对,首先需要计算 H_{c1} 。这可以使用 GL 模型方法来完成,正如之前为三维超导体所建议的 那样 [34]。最终,未来的进一步工作可能会利用这些或 更复杂的理论框架来研究涡旋行为。



在本文中,我们分析了动量空间中的电子行为,并 重点关注磁场存在下系统处于正常态和超导态之间的 临界点。通过遵循 BCS 理论方法来研究 LLs 和塞曼分 裂对二维超导临界温度的影响。这些结果与使用相位 因子 $\exp(\frac{ie}{\hbar}\int_{r_1}^{r_2} A \cdot dr)$ 半经典处理磁场效应所获得的 结果不同。我们将外部磁场中配对电子的能量表示为 量子化能级 $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega + \frac{g}{2}\mu_B\sigma \cdot B - \mu_F$,当电子在垂 直于磁场的轨道上配对时,具有高度简并性。受塞曼 能量 $\frac{g}{2}\mu_B\sigma \cdot B$ 影响的量子化 LLs 使得电子有可能在 同一或相邻的 LLs 中形成库珀对,并且这些电子沿磁 场方向自旋相反。

我们发现,在低磁场且没有自旋响应的情况下, 形成在相同 LL 上的库珀对会在 BCS 预测附近引起 $T_c(\mathbf{B})$ 的振荡。随着磁场强度的增加, $T_c(\mathbf{B})$ 继续振荡, 并穿过 BCS 预测值。在非常高的磁场中, $T_c(\mathbf{B})$ 表现 出振荡,但在特定场强区间内保持超导行为持续存在。 此外, $T_c(\mathbf{B})$ 显示了在同一和相邻 LL 上的电子配对之 间几乎没有变化,在具有塞曼分裂的磁场中。值得注意 的是, $T_c(\mathbf{B})$ 逐渐减少,与同一和相邻 LL 上的配对相 关的振荡随着 g 因子的增加而减弱。最重要的是,在 非常高的磁场下出现了再入超导相,并且具有较小的 g 因子时,类似于没有塞曼分裂的相同 LL 内的配对。

ACKNOWLEDGMENTS

此项工作得到了中国国家自然科学基金(编号: 11874083)的支持。

 Bardeen, J., Cooper, L. N., Schrieffer, J. R. 1957 Phys. Rev. 108, 1175 - 1204

图 5. 磁场依赖的临界温度, $T_c(\mathbf{B})$,揭示了同一能级和相邻能级中的电子配对,考虑到具有 (a)g = 0.5和 (b)g = 2.0的 g因子的塞曼分裂。图 (a) 说明了 $T_c(\mathbf{B})$,对于在同一(填充黑色倒三角形)和相邻(空心红色三角形)能级中的电子配对,应用

了塞曼分裂和 g = 0.5。图 (a) 中的插图清楚地展示了在低磁场 和高磁场下由塞曼分裂引起的 $T_c(\mathbf{B})$ 振荡。图 (b) 描绘了在同 一 (填充黑色正方形) 和相邻 (空红色圆圈) LL 上的电子配对

[2] Gweon, G.-H. et al. 2004 Nature 430, 187 – 190

的 $T_c(\mathbf{B})$,同时施加了 Zeeman 分裂和 g = 2.0。

- [3] Alloul, H., Bobroff, J., Gabay, M., Hirschfeld, P. J. 2009 *Rev. Mod. Phys.* 81, 45 - 108
- [4] Markowitz, D., Kadanoff, L. P. 1963 Phys. Rev. 131, 563
 575
- [5] Somayazulu, M. et al. 2019 Phys. Rev. Lett. 122, 027001
- [6] Mozaffari, S. et al. 2019 Nat Commun 10, 2522
- [7] Drozdov, A. P. et al. 2019 Nature 569, 528 531



- [8] Tešanović, Z., Rasolt, M., Xing, L. 1991 Phys. Rev. B
 43, 288 298
- [9] Tešanović, Z., Rasolt, M., Xing, L.1989 Phys. Rev. Lett.
 63, 2425 2428
- [10] Gruenberg, L. W., Gunther, L. 1968 Phys. Rev. 176, 606
 613
- [11] Rajagopal, A. K., Vasudevan, R. 1966 Phys. Lett. 23, 539 - 540
- [12] Gunther, L., Gruenberg, L. W. 1966 Solid State Commun. 4, 329 - 331
- [13] Rasolt, M., Tešanović, Z 1992 Rev. Mod. Phys. 64 709-754
- [14] Norman, M. R., Akera, H., MacDonald, A. H. 1992 Physica C 196, 43 – 47
- [15] MacDonald, A. H., Akera, H., Norman, M. R. 1992 Phys. Rev. B 45, 10147 - 10150
- [16] MacDonald, A. H., Akera, H., Norman, M. R. 1993 Aust.
 J. Phys. 46, 333 344
- [17] Chaudhary, G., MacDonald, A. H., Norman, M. R. 2021 Phys. Rev. Res. 3, 033260
- [18] Ran, S. et al. 2019 Science 365, 684 687
- [19] Abrikosov, A. A. 2004 Rev. Mod. Phys. 76, 975 979
- [20] Helfand, E., Werthamer, N. R. 1964 Phys. Rev. Lett. 13, 686 - 688

- [21] Helfand, E., Werthamer, N. R. 1966 Phys. Rev. 147, 288
 294
- [22] Werthamer, N. R., Helfand, E., Hohenberg, P. C. 1966 *Phys. Rev.* 147, 295 – 302
- [23] Zhao, A., Gu, Q., Klemm, R. A. 2022 J. Phys.: Condens. Matter 34, 355601
- [24] Chandrasekhar, B. S. 1962 Appl. Phys. Lett. 1, 7 8
- [25] Clogston, A. M. 1962 Phys. Rev. Lett. 9, 266 267
- [26] Tu, W.-L., Schindler, F., Neupert, T., Poilblanc, D. 2018 Phys. Rev. B 97, 035154
- [27] Yang, W.-W., Luo, H.-G., Zhong, Y. 2024 New J. Phys. 26, 103002
- [28] Klemm, R. A. and Clem, J. R., 1980 Phys. Rev. B 21, 1868-1875
- [29] Klemm, R. A. 1993 Phys. Rev. B 47, 14630 14633;
 1994 Phys. Rev. B 49, 752 752
- [30] Klemm, R. A. 1994 Phys. Rev. B 49, 752
- [31] Klemm, R. A. Layered Superconductors Vol. I (Oxford University Press, Oxford 2012)
- [32] Bogoljubov, N. N. 1958 Riv. Nuovo Cim. 7, 794 805
- [33] Valatin, J. G. 1958 Riv. Nuovo Cim. 7, 843 857
- [34] Zhao, A., A Klemm, R., Gu, Q. 2025 J. Phys.: Condens. Matter 37, 185603