具有许多顶点的空心多面体

SRINIVAS ARUN AND TRAVIS DILLON

摘要. 给定一个集合 $S \subseteq \mathbb{R}^d$，空多面体的顶点在 S 中，但其内部不包含 S 的任何其他点。我们证明了空心多面体最大顶点数的上界和下界，这些多面体的面是单形或顶点处于一般位置。我们还得到了一些相对紧密的渐近界限，适用于那些不包含长度很大的格段的多面体。

1. 介绍

点集 $S \subseteq \mathbb{R}^d$ 的一个子集 T 被称为空的 在 S，如果 T 中的每个点都是 $\operatorname{conv}(T)$ 的顶点，并且 S 中没有其他点包含在 $\operatorname{conv}(T)$ 中；简而言之，$\operatorname{conv}(T) \cap S = \operatorname{vert}\big(\operatorname{conv}(T)\big)$。离散集中的空多面体 S 与该集合与凸体的交集性质密切相关：

定理 1 (Hoffman [4])**.** 给定一个集合 $S \subseteq \mathbb{R}^d$，令 $h(S)$ 是最小的正整数（如果存在的话），使得以下赫利型定理成立：

> 对于有限族 $\mathcal{F}$ 中的凸集在 $\mathbb{R}^d$ 中，如果 $h(S)$ 或更少的集合在 $\mathcal{F}$ 中包含它们交集中 S 的一个点，则 $\bigcap \mathcal{F}$ 包含一个点在 S.

那么 $h(S)$ 等于空子集的最大顶点数 S.

例如，$\mathbb{Z}^d$ 的任何空子集最多有 2^d 个顶点：如果 $T \subseteq \mathbb{Z}^d$ 至少有 2^d+1 个点，则其中两个点，比如 x 和 y，在每个坐标上具有相同的奇偶性，因此 $\frac{1}{2}(x+y)$ 是一个位于 $\operatorname{conv}(T)$ 内但不是顶点的整数点。另一方面，$T = \{0,1\}^d$ 在 $\mathbb{Z}^d$ 中是空的。因此 $h(\mathbb{Z}^d) = 2^d$，这证明了以下定理（首先由 Doignon[3] 证明，后来独立地由 Bell[2] 和 Scarf[9] 证明）：

定理 2. 令 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一组有限凸集。如果 $\mathcal{F}$ 中任意 2^d 或更少的集合的交集包含一个整数点，那么 $\bigcap \mathcal{F}$ 也包含。

点集 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 的一个子集 T 被称为空的 输入 S，如果 $\operatorname{conv}(T)$ 的内部中不包含 S 的任何点。关于所谓的空的多面体有大量的文献，其中大部分关注于在幺模等价下的空心多面体的分类。空多面体与著名的平坦性定理 (本文中表述为 Theorem 2.4) 之间也有很强的联系。参见 [5] 以了解这些方面的最新综述。

在这篇论文中，我们寻求空心多面体顶点数量的界限，本质上是将关于空多面体的一个核心问题引入到空心多面体的世界。

由于我们的许多结果是渐近的，我们将使用标准的数量级记号：对于两个函数 $f(k,d)$ 和 $g(k,d)$，我们写 $f = O(g)$ 表示存在一个绝对常数 $c > 0$ 使得 $f(k,d) \leq c\,g(k,d)$ 对所有 k 和 d 成立。类似地，符号 $f = O_d(g)$ 表示存在一个正函数 $c(d)$，使得对于所有的 k 和 d. 均有 $f(k,d) \leq c(d)\,g(k,d)$。我们写 $f = \Theta_d(g)$ 如果 $f = O_d(g)$ 和 $g = O_d(f)$。我们还将说，在 $\mathbb{R}^d$ 中的一个集合处于“一般位置”，如果该集合中的任何 $d+1$ 个点都不包含在超平面中。

论文的主要结果如下。

定理 1.1. 如果 P 是在 $\mathbb{Z}^d$ 中的一个空心多面体，其中每个面都是一个单形，则 P 最多有 2^d 个顶点。此外，如果 P 的顶点处于一般位置，则 P 有 $O\big(d^2(\log d)^3\big)$ 个顶点。

正如我们在 Section 2 中描述的，为了获得顶点数量的任何边界，必须施加某些限制 (如单纯形面或一般位置的顶点)；这两个条件似乎相当合理。

在 Section 3 中，我们以不同的方式放宽了空条件，并证明了包含没有“长格段”的多面体的顶点数量的界限。

定理 1.2. 如果 P 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个凸晶格多面体，且不包含形式为 $\{x, x+y, x+2y, \ldots, x+ky\}$ 的集合，其中包含 $x, y \in \mathbb{Z}^d$ 和 $y \neq 0$，那么 P 有 $O_d(k^{d-1})$ 个顶点。

我们还构造了一个具有 $\Theta_d(k^{(d-1)\frac{d}{d+1}})$ 个顶点且不包含此类集合的多面体。

我们在 Section 4 中以几个开放问题作为结论。

2. 内部格点

$\mathbb{Z}^d$ 的空多面体可以包含多少个点？事实证明，任意多个：例如，取一个格子矩形 $[0,1] \times [0,n]$。甚至顶点的数量也可以是任意大的。

观察 2.1. 对于任何 $d \geq 3$，存在一个在 $\mathbb{Z}^d$ 中具有任意多个顶点的凸多面体 $\mathcal{P}$，使得 $\mathcal{P}$ 中的唯一格点在其顶点、边或二维面上。

证明. 令 $x_1, \ldots, x_n$ 为在 $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{Z}^d$ 中的凸 n-边形的顶点，令 e_i 为第 i 个标准基向量。那么 $\operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_n, e_3, \ldots, e_d)$ 是一个有 $n+d-2$ 个顶点的多面体。 □

为了获得有意义的上界，我们必须施加一些进一步的限制。为此，令 $\operatorname{hol}_{\mathrm{gp}}(\mathbb{Z}^d)$ 表示一般位置中空格点阵多面体顶点的最大数量。$\operatorname{hol}_{\mathrm{gp}}(\mathbb{Z}^d)$ 是有限的这一点并不明显；尽管一般位置条件是严格的，我们仍然有允许许多整数点位于凸包边界的自由。

事实上，$\operatorname{hol}_{\mathrm{gp}}(\mathbb{Z}^d)$ 是有限的，而这一事实的关键在于顶点集处于一般位置的多面体其面是单纯形。因此，我们也定义 $\operatorname{hol}_{\triangle}(\mathbb{Z}^d)$ 为空心单纯格点多面体中顶点的最大数量。由于任何顶点处于一般位置的空心格点多面体都是单纯形的，$\operatorname{hol}_{\mathrm{gp}}(\mathbb{Z}^d) \leq \operatorname{hol}_{\triangle}(\mathbb{Z}^d)$。我们的第一个结果是 $\operatorname{hol}_{\triangle}(\mathbb{Z}^d)$ 是有限的。

定理 2.2. $\operatorname{hol}_{\triangle}(\mathbb{Z}^d) \leq 2^d$.

证明. 我们将证明对于任何空心单纯形格点多面体，我们可以构造一个具有相同顶点数的空格点多面体。

假设 P 是一个其边界包含非顶点格点 x 的单纯格多面体。令 y 为包含 x 的 P 最小维数面的顶点，并令 Q 为顶点集是 $\{x\} \cup \operatorname{vert}(P) \setminus \{y\}$ 的多面体。然后，Q 是一个具有严格较少非顶点格点在其边界上的单纯格多面体，并且与 P 具有相同数量的顶点。通过对 $|P \cap \mathbb{Z}^d|$ 进行归纳，存在一个具有与 P 相同数量顶点的空多面体，因此 Doignon 定理表明 $|\operatorname{vert}(P)| \leq 2^d$。 □

定理 2.2 中的界对于 $d > 2$ 来说不一定是最优的，但我们遗憾地是没有更好的界限来适用于单纯多面体。然而，对于顶点处于一般位置的多面体，我们可以利用格宽度的概念获得一个好得多的界限。

定义 2.3. 凸体 $K \subseteq \mathbb{R}^d$ 在向量 $v \in \mathbb{R}^d$ 方向的宽度是

$$w_v(K) = \sup_{x \in K} \langle x, v \rangle - \inf_{x \in K} \langle x, v \rangle.$$

凸体 K 的格宽度是

$$w_L(K) = \min_{v \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} w_v(K).$$

格超平面正交于整数向量 v 的那些超平面正交于 v 并且与 $\mathbb{Z}^d$ 相交。两个相邻的晶格超平面正交于 v，它们之间的距离是 $1/\|v\|$。所以如果 $w_v(K) = \alpha$，最多有 $\alpha + 1$ 个格超平面与 v 正交并相交于 k，并且如果 $w_L(K) = \alpha$，则存在一个格向量 v，使得最多有 $\alpha + 1$ 个格超平面与 v 正交并相交于 K。

1948 年，Khinchine[7] 证明了一个基本事实：任何不包含格点的凸体具有有界的格宽度。这个格宽度的最小上界被称为平坦常数。一系列的工作改进了 Khinchine 的上界；Kannan 和 Lovász 在 1988 年提供了一个优雅的证明，表明在 $\mathbb{R}^d$ 中的平坦度常数至多为 d^2 [6]。另一方面，平坦常数至少为 d：格单纯形 $\mathrm{conv}(0, de_1, \ldots, de_d)$ 的内部是一个具有格宽度 d 且不包含任何格点的凸集。最近，Reis 和 Rothvoss 得到了一个接近最优的上限：

定理 2.4 (平坦性定理，Reis–Rothvoss [8])**.** *如果 K 是包含在 $\mathbb{R}^d$ 中且不包含任何格点的凸体，$w_L(K) = O\big(d(\log d)^3\big)$。*

我们可以应用这个结果来获得 $\mathrm{hol}_{\mathrm{gp}}(\mathbb{Z}^d)$ 的改进上界。

定理 2.5. $\mathrm{hol}_{\mathrm{gp}}(\mathbb{Z}^d) = O\big(d^2(\log d)^3\big)$.

证明. 令 X 是在 $\mathbb{Z}^d$ 中的一般位置上的整数点集，使得 $\mathrm{conv}(X)$ 是空心的且 $\mathrm{vert}\big(\mathrm{conv}(X)\big) \cap \mathbb{Z}^d = X$。令 $c \in \mathrm{conv}(X)$。那么 $K := \frac{1}{2}(\mathrm{conv}(X) - c) + c$ 是一个不包含格点的凸体。使用 Theorem 2.4，我们获得一个向量 v，使得 K 与最多 $O(d(\log d)^3)$ 个与 v 正交的晶格超平面相交；因此，$\mathrm{conv}(X)$ 也与最多 $O(d(\log d)^3)$ 个与 v 正交的晶格超平面相交。每个格超平面最多包含 d 个 X 点，因此 X 最多只能包含 $O(d^2(\log d)^3)$ 个点。 □

定理 2.2 和定理 2.5 一起蕴含了定理 1.1。

关于下界，格单纯形 $\mathrm{conv}(0, e_1, \ldots, e_d)$ 表明了 $\mathrm{hol}_{\triangle}(\mathbb{Z}^d) \geq \mathrm{hol}_{\mathrm{gp}}(\mathbb{Z}^d) \geq d+1$。一个简单的构造稍微改进了这个下界。

命题 2.6. $\mathrm{hol}_{\triangle}(\mathbb{Z}^d) \geq 2d$.

证明. 我们使用来自 [10, p. 11] 的一个示例。令 $\mathbf{1}$ 为每个坐标中都有 1 的向量。集合 $X = \{e_i\}_{i=1}^d \cup \{\mathbf{1} - e_i\}_{i=1}^d$ 位于单位立方体 $\{0,1\}^d$ 内，因此 $\mathrm{conv}(X)$ 是空心的。此外，X 关于点 $\frac{1}{2} \cdot \mathbf{1}$ 对称，因此存在一个仿射变换将 X 变换到标准十字多面体；因此 $\mathrm{conv}(X)$ 是单纯形的。 □

3. 格段

我们现在研究那些在凸包中避免某些点集的多面体。这种最简单的例子是禁止给定长度的线段。

定义 3.1. 我们使用 $[x, y]$ 表示端点为 x 和 y 的线段。如果 $x, y \in \mathbb{Z}^d$ 与 $\left|[x, y] \cap \mathbb{Z}^d\right| = k$，我们说 $[x, y]$ 是一个长度为的格段 $k-1$ 。

请注意单个点的长度为 0。我们首先考虑一个多边形可以包含的最大晶格点数，而不包含长度为 k 的晶格线段。

命题 3.2. 如果 P 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个凸格多面体，并且 P 不包含长度为 k 的格线段，则 $|P \cap \mathbb{Z}^d| \leq k^d$。

证明. 如果 $|P \cap \mathbb{Z}^d| > k^d + 1$，则存在两个格点 $x, y \in P \cap \mathbb{Z}^d$ 其坐标模 k 相等。如果我们设 $z = \frac{1}{k}(y - x) \in \mathbb{Z}^d$，那么 $x, x+z, x+2z \ldots, x+kz = y$ 是一组包含在 P 内的 $k+1$ 共线格点；因此 P 包含一个长度至少为 k 的格段。 □

由于超立方体 $[1, k]^d$ 恰好包含 k^d 个格点，但没有一组 $k+1$ 个共线的格点，因此这个不等式是紧致的。另一方面，这样的格多面体包含的顶点要少得多。(这是 Theorem 1.2。)

命题 3.3. 任何不包含长度为 k 的格线段的凸格多面体在 $\mathbb{R}^d$ 中有 $O_d(k^{d-1})$ 个顶点。

证明. 我们用归纳法进行证明。如果 $d = 1$，由于 $\mathbb{R}^1$ 中的每个多面体最多有 2 个顶点，所以定理成立。假设 P 是 $\mathbb{R}^d$ 中没有长度为 k 的格线段的凸格多面体。如果 $|P \cap k\mathbb{Z}^d| \geq 2$，则 P 包含一个长度为 k 的格段。因此 $|P \cap k\mathbb{Z}^d| \leq 1$。通过将 P 平移一个整数向量，我们可以假设 $P \cap (2k)\mathbb{Z}^d = \emptyset$。

在这种情况下，$\frac{1}{2k}P$ 不与整数格相交。由 Flatness Theorem 可知，存在一个常数 c_d，使得 $\frac{1}{2k}P$ 的格宽度至多为 c_d；因此 P 的格宽度至多为 $2c_dk$。这意味着存在一个整数向量 v，使得至多有 $2c_dk + 1$ 个格超平面与 v 正交并相交于 P。P 的每个顶点都位于这些超平面中的一个上，且根据归纳法，每个超平面上至多有 $O_d(k^{d-2})$ 个顶点。所以 P 至多有 $O_d(k^{d-1})$ 个顶点。 □

另一方面，存在一个几乎具有相同数量顶点的格多面体，并且没有长度为 k 的格线段。

命题 3.4. *存在一个在 $\mathbb{R}^d$ 中的凸格多面体，具有 $\Theta_d(k^{(d-1)\frac{d}{d+1}})$ 个顶点且没有长度为 k 的格线段。*

证明. 取 $P = \operatorname{conv}\left(\frac{k-1}{2}B^d \cap \mathbb{Z}^d\right)$，其中 B^d 是 $\mathbb{R}^d$ 中的单位球。由于 $P \subset \frac{k-1}{2}B^d$，它不包含长度为 k 的格段。另一方面，Bárány 和 Larman 证明了 [1] 中 P 有 $\Theta_d(k^{(d-1)\frac{d}{d+1}})$ 个顶点。 □

4. 开放问题

尽管我们为 $\mathrm{hol}_\triangle(\mathbb{Z}^d)$ 获得了上下界，但它们在渐近意义上相差甚远：我们只知道 $2d \leq \mathrm{hol}_\triangle(\mathbb{Z}^d) \leq 2^d$。$\mathrm{hol}_\triangle(\mathbb{Z}^d)$ 的增长率是否真的是指数级的，还是慢得多？对于 $\mathrm{hol}_{\mathrm{gp}}(\mathbb{Z}^d)$ 的界限也存在渐近差异，尽管差距不那么显著。

问题 1. 改进 $\mathrm{hol}_{\mathrm{gp}}(\mathbb{Z}^d)$ 和 $\mathrm{hol}_\triangle(\mathbb{Z}^d)$ 的渐近界限。

此外，我们对于在 $\mathbb{R}^d$ 中不包含长度为 k 的格段的格多面体顶点数的界限虽然接近，但并不完全吻合。我们怀疑我们的下界或上界是紧的，但不做任何猜想具体是哪一个。

问题 2. 建立关于不包含长度为 k 的格线段的格多面体的最大顶点数的紧渐近界。

而且，当然，“长度为 k 的格段” 可以被任何点配置族替换，对于一系列相关问题都是如此。

5. 致谢

该项研究是在 MIT PRIMES –USA计划的资助下进行的。迪林还获得了国家科学基金会研究生科研奖学金的资助，资助编号为 2141064。

References

[1] Imre Bárány and David G. Larman, *The convex hull of the integer points in a large ball*, Mathematische Annalen **312** (1998), 167–181.

[2] David E. Bell, *A theorem concerning the integer lattice*, Studies in Applied Mathematics **56** (1977), no. 2, 187–188.

[3] Jean-Paul Doignon, *Convexity in cristallographical lattices*, Journal of Geometry **3** (1973), no. 1, 71–85.

[4] Alan J. Hoffman, *Binding constraints and Helly numbers*, Annals of the New York Academy of Sciences **319** (1979), no. 1 Second Intern, 284–288.

[5] Oscar Iglesias-Valiño, *Hollow lattice polytopes: Latest advances in classification and relations with the width*, Algebraic and Geometric Combinatorics on Lattice Polytopes: Proceedings of the Summer Workshop on Lattice Polytopes, 2019, pp. 230–241.

[6] Ravi Kannan and László Lovász, *Covering minima and lattice-point-free convex bodies*, Annals of Mathematics (1988), 577–602.

[7] Aleksandr Khinchine, *A quantitative formulation of Kronecker’ s theory of approximation*, Izvestiya Akademii Nauk SSR Seriya Matematika **12** (1948), no. 2, 113–122.

[8] Victor Reis and Thomas Rothvoss, *The subspace flatness conjecture and faster integer programming*, Proceedings of the 64th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS), 2023, pp. 974–988.

[9] Herbert E. Scarf, *An observation on the structure of production sets with indivisibilities*, Proceedings of the National Academy of Sciences **74** (1977), no. 9, 3637–3641.

[10] Günter M. Ziegler, *Lectures on 0/1-polytopes*, Polytopes — Combinatorics and Computation (Gil Kalai and Günter M. Ziegler, eds.), DMV Seminar, vol. 29, Birkhäuser, 2000.

Srinivas Arun, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139, USA

Email address: sarun@mit.edu

Travis Dillon, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139, USA

Email address: travis.dillon@mit.edu