三体长期理论和开普勒碰撞中的一个常见第一积分

GABRIELLA PINZARI[1], LEI ZHAO[2]

Abstract. 我们观察到，在三体问题的长期理论中，部分平均系统的某个第一积分也出现在可积开普勒弹子系统的重要守恒量中。在这篇笔记中，我们展示了它们与双中心问题投影动力学的共同根源。然后我们将这两个方面结合起来，定义一类在常曲率表面上的可积弹子系统。

1. 介绍

在一个至少为 2 维的欧几里得空间中，开普勒问题是超可积的：它拥有比系统在刘维尔意义下可积所需的更多的独立首次积分。具体而言，在总能量和角动量之外，由拉普拉斯-龙格-伦茨向量的分量提供了额外的守恒量。从动力学角度看，这意味着该系统是适当退化的：所有有界的非奇异轨道都是封闭的。在 d 个频率（在一个合适的 Action-Angle 坐标系中），只有 1 频率是非零的。开普勒问题的这种适当退化是天体力学中许多退化的主因。这使得研究扰动变得困难，但也留下了考虑具有变化开普勒轨道（无论是离散地还是连续地）的可能性，而不破坏可积性。此外，即使在固定开普勒能量的情况下也可以这样做。

函数

(1) $$D = C^2 - 2hA_1$$

作为最近研究的两种系统中的守恒量，其中 C 是总角动量，A_1 是拉普拉斯-龙格-楞次向量的一个分量，而 h 是一个参数：

- 开普勒轨道在部分平均的牛顿势下演化，在 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$ 中。这一现象已被第一作者在 [16] 中注意到。在这种情况下，经过某种归一化处理后，h 表示原点与第二个静止粒子位置之间距离的一半。
- 在一个平面开普勒弹子球系统中，以一条直线作为反射墙。这一点首先由 Gallavotti-Jauslin 在 [9] 中证明。在这种情况下，h 表示从开普勒中心到墙壁的距离，而 A_1 是相对于反射墙的拉普拉斯-龙格-伦茨向量的垂直分量。

[16] 中的研究在 [17, 18, 20] 中继续进行，以进一步应用于三体问题的研究。分别针对平面和空间情况，在 [12, 7] 中讨论了正则化圆形限制性三体问题中近距离相遇的一个看似不同的第一积分。

D 在 Gallavotti-Jauslin[9] 研究中的存在被用来反驳 Boltzmann[2] 论文中的一项遍历断言。自 [10, 25] 以来，这一直吸引着许多研究。函数 D 对于以圆锥曲线的一支作为反射壁的开普勒碰撞系统也成立，前提是开普勒中心位于该圆锥曲线的一个焦点上，h 是圆锥曲线的焦距距离，而 A_1 是拉普拉斯-龙格-伦兹向量沿焦点轴 [22, 23] 的分量。

特别是，在 Gallavotti-Jauslin 考虑的系统中，将一个无质量的 Kepler 中心对称地放置在反射线上是有帮助的。这条线可以被视为沿着具有焦点位于 Kepler 中心的一族共焦双曲线的退化线。然后 h 又是两个 Kepler 中心之间的半距离。

本文的一个主要观察结果是，D 在两个系统中的出现可以通过射影动力学 [1] 来理解。因此我们进行了一些进一步的推广：

- 在 [16] 中，部分平均的牛顿势能是根据开普勒映射定义的。我们提出了一种无坐标的形式化表述。
- 我们将定理 [16] 推广到了球面和双曲空间。

Date: April 26, 2025.

- 我们将 [16] 推广为牛顿势与适当放置的胡克势的部分平均和，在定义于欧几里得空间、半球面以及双曲空间中的系统中。
- 我们基于部分平均系统定义新的可积机械弹子球系统。

本笔记据此组织。

2. 两中心问题

2.1. **常曲率空间上的两个中心问题.** 我们考虑在欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$ 中的两中心问题。在这个系统中，一个单位质量的运动粒子在两个固定的开普勒中心的吸引力下，在空间 $\mathbb{R}^d$ 内移动。这个系统是一个可积系统，已经由欧拉 [4] 和拉格朗日 [11] 在 $d = 2, 3$ 时所知。确实，围绕中心轴的旋转提供了通过诺特定理在 $\mathbb{R}^d$ 中与能量对易的 $d-2$ 第一积分，并且因此系统的可积性来自于这些作者已经识别的一个额外的非平凡的第一积分。

此类问题也可以施加于球体上。球面双中心问题描述了在 $\mathbb{S}^d$ 上受两个对径点 Kepler-Coulomb 类型中心吸引的粒子运动,这些中心由与中心角余切成比例的势能生成。这种 1-中心 Kepler-Coulomb 类型的潜在识别是为了尽可能地保留球形宇宙上的开普勒定律，特别是为了保持椭圆律。这是由 Graves[8] 和 Serret[21] 完成的。双曲 3 空间中的双中心问题已被 Killing[13] 研究。

2.2. **两中心/拉格朗日问题的射影动力学.** 在 [1] 中，Albouy 解释了两中心问题中额外的非平凡第一积分 $\mathbb{R}^d$ 最终与球面上定义的一个相应的系统能量相关，这是半球上的球面两中心问题 $\mathbb{S}^d$。

我们更精确地回顾这个构造。我们将 $\mathbb{S}^d$ 嵌入为 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中的单位球体，将 $\mathbb{R}^d$ 嵌入为超平面 $\mathbb{R}^d \times \{-1\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$。下半球 $\mathbb{S}^d_{SH} := \{(x_1, \cdots, x_{d+1}) \in \mathbb{S}^d, x_{d+1} < 0\}$ 的 $\mathbb{S}^d$ 通过从原点 $\mathbb{R}^{d+1}$ 的中心投影映射到 $\mathbb{R}^d$。如果两个中心问题的中心相对于 $\mathbb{S}^d$ 与 $\mathbb{R}^d \times \{-1\}$ 的接触点对称放置，那么这种投影也将无参数轨道从这个球面问题映射到 $\mathbb{R}^d$ 中的双中心问题的无参数轨道上，这定义了一个修改后的度量 $\|\cdot\|_a$，如下所示 [1]。因此，球面能量为 $\mathbb{R}^d$ 中的双中心问题诱导出一个额外的第一个积分，并且反之亦然，欧几里得双中心问题的能量是球面双中心问题的一个额外第一个积分。此外，我们也可以在两个开普勒中心之间放置一个谐波势能，并且所有这些对于修改后的系统都成立，称为拉格朗日问题 [11]。这同样可以定义在 $\mathbb{S}^d_{SH}$ 上，其势能与中心角的正切平方成比例，类似于球谐函数的势能。

我们将两个开普勒中心的质量和胡克中心的弦常数在 $\mathbb{R}^d$ 中分别记为 m_1, m_2, f。我们把中心放在 $\mathbb{R}^d$ 的位置 $(0, \cdots, 0, \pm a)$。在 $\mathbb{R}^d$ 中，系统是根据仿射范数 $\|(v_1, \cdots, v_d)\|_a := \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_{d-1}^2 + \frac{v_d^2}{1+a^2}}$ 定义的。

我们回顾来自 [1, 22] 的以下命题：

命题 2.1. *拉格朗日问题在 $\mathbb{R}^d$ 中，度量来自范数 $\|\cdot\|_d$，并带有参数 (m_1, m_2, f)，在 $\mathbb{S}^d_{SH}$ 上具有从 $\mathbb{R}^{d+1}$ 继承的圆度量，并带有参数 $(m_1\sqrt{1+a^2}, m_2\sqrt{1+a^2}, f)$，处于射影对应关系。*

这些系统以及在 $\mathbb{S}^d_{SH}$ 上定义的那些系统因此是可积的。类似的结果也适用于在 $\mathbb{S}^d$ 和 $\mathbb{H}^d$ 中定义的系统。我们参考 [22] 以获得精确的陈述。

对于问题 $\mathbb{R}^d$，我们将该问题的能量表示为 E_{Eucl}。我们考虑将 $\mathbb{R}^d$ 作为下半球 $\mathbb{S}_{SH}$ 的图表，并用 E_{sph} 表示以位置和速度为依据的球形能量，即视为切丛 $T\mathbb{R}^d$ 上的一个函数。请注意，Legendre 变换允许我们将切丛与余切丛进行识别。在后续内容中，当需要时，我们也将其视为余切丛上的函数。

2.3. **两中心问题中首次积分的关系.** 我们考虑双中心问题，并在 $d = 2$ 的情况下进行论证。由于旋转不变性，这些公式对任何 $d \geq 2$ 也成立。

我们将 Kepler 中心置于 $(0, a)$ 和 $(0, -a)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中，质量分别为 m_1 和 m_2。我们给 $\mathbb{R}^2$ 配备范数 $\|\cdot\|_a$，定义为 $\|(u, v)\|_a = \sqrt{u^2 + \frac{v^2}{1+a^2}}$。

这与 [25] 中的设置相同。同样的论点，只需添加第二个中心的势，就导致了这一点。

$$E_{Eucl} = \frac{1}{2}\Big(\dot{x}^2 + \frac{\dot{y}^2}{1+a^2}\Big) - \frac{m_1}{\sqrt{x^2 + \frac{(y-a)^2}{1+a^2}}} - \frac{m_2}{\sqrt{x^2 + \frac{(y+a)^2}{1+a^2}}}, \tag{2}$$

(3) $$E_{sph} = \frac{1}{2}\big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\big) + \frac{1}{2}(x\dot{y} - \dot{x}y)^2 - \frac{m_1\sqrt{1+a^2}(ay+1)}{\sqrt{(y-a)^2 + (1+a^2)x^2}} - \frac{m_2\sqrt{1+a^2}(-ay+1)}{\sqrt{(y+a)^2 + (1+a^2)x^2}}.$$

我们使用仿射坐标变换 $(\xi, \eta) \mapsto (x = \xi, y = \sqrt{1+a^2}\eta + a)$ 将范数带入 $\mathbb{R}^2$ 的标准欧几里得形式。通过这种变化，我们将第二个中心放置在新坐标中的 $(0, -2a/\sqrt{1+a^2})$ 处。并且我们有

$$E_{Eucl} = \frac{1}{2}\Big(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2\Big) - \frac{m_1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} - \frac{m_2}{\sqrt{\xi^2 + (\eta + 2a/\sqrt{1+a^2})^2}},$$

$$E_{sph} = (1+a^2)\Big(\frac{1}{2}(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2) - \frac{m_1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\Big) + \frac{(1+a^2)}{2}\Big((\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi})^2 - \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}((\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi})\dot{\xi} + \frac{m_1\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}})\Big) - \frac{m_2(-a\sqrt{1+a^2}\eta + 1 - a^2)}{\sqrt{(\eta+2a/\sqrt{1+a^2})^2 + \xi^2}}.$$

进一步设置第一中心的开普勒能量为 $E_{Kep} := E_{Eucl}|_{m_2=0}$。然后

$$E_{Eucl} = E_{Kep} + V_{Eucl,2} := E_{Kep} - \frac{m_2}{\sqrt{\xi^2 + (\eta + 2a/\sqrt{1+a^2})^2}}.$$

这清楚地表明了

(4) $$E_{sph} = (1+a^2)(E_{Kep} + V_{Eucl,2} + (D+K)/2).$$

其中 D 如 (1) 中出现的是 E_{Kep} 的第一个积分。$V_{Eucl,2}$ 这一项在 m_2 中是线性的，同样也是 K 的。

$$K := -\frac{2}{1+a^2}\frac{m_2(a\sqrt{1+a^2}\eta + 2a^2)}{\sqrt{(\eta+2a/\sqrt{1+a^2})^2 + \xi^2}}.$$

我们有

(5) $$\{E_{Eucl}, E_{sph}\} = 0,$$

因为 E_{sph} 在 E_{Eucl} 的流下是不变的。

因此我们得到

(6) $$\{E_{Kep} + V_{Eucl,2}, D + K\} = 0.$$

2.4. **两中心问题中的平均值计算.** 我们切换到余切丛，同时保持函数符号不变。我们在区域上进行讨论，在该区域内 E_{Kep} 定义了一个圆作用（即即区域内的所有轨道都是闭合的），在该区域内 $\mathbb{R}^d$ 中的轨道避免了第二个开普勒中心。记 E_{Kep} 在 $\mathbb{T}^*\mathbb{R}^d$ 中的轨道集，其投影通过第二个开普勒中心为 $\mathcal{I}$。我们将排除该集合，因为在这些轨道上 $V_{Eucl,2}$ 会遇到奇点。然后由具有负开普勒能量 $E_{Kep} < 0$ 和非零开普勒角动量 $C_{Kep} \neq 0$ 定义的区域 $\mathbb{R}$ 以排除 $T^*\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{I}$ 中的碰撞轨道：

$$\mathcal{R} := \{E_{Kep} < 0, C_{Kep} \neq 0\} \subset T^*\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{I}.$$

此外，后者排除碰撞轨道的条件可能可以省去，因为通过正则化方法，在碰撞轨道之前平均是良好定义的。在二维和三维中，这可以通过分别在 [6] 和 [27] 中解释的方法和坐标来证明。这很可能适用于所有维度，但我们在此不讨论这个问题。

定义 2.1. 部分平均系统是由哈密顿量

$$E_{Eucl,a} = E_{Kep} + \int_{S^1} V_{Eucl,2}\, ds,$$

定义的在 $\mathcal{R}$ 上的系统，其中积分理解为对 E_{Kep} 的闭轨道进行平均。

定义不需要选择一组标准坐标。当 $d = 2, 3$ 时，有几个坐标系可用，包括经典的德洛内变量和庞加莱坐标。莫泽构造了类型为德洛内的作用-角度坐标系 $\mathbb{R}^d$ [15]。一般来说，构造这些坐标并不总是容易的，在涉及更多天体的情况下情况会更加复杂 [19]。此外，所有这些坐标在某些类型的轨道上都会变得奇异。

然而，在这个圆丛的平凡化中，我们在闭合开普勒轨道的空间上进一步局部化后，可以得到一组（抽象的）规范坐标 $(L, \tilde{\ell}, u_1, \cdots, u_{d-1}, v_1, \cdots v_{d-1})$，在这组坐标下，$L$ 是与德鲁纳坐标中的圆形角动量相同的，而 $\tilde{\ell}$ 则是在这个平凡化中参数化开普勒轨道的角度（当两者都有定义时，从平均线度通过一个相位偏移），(u_i, v_i) 是世俗变量，在这个意义上它们仅是轨道的函数，与粒子在轨道上的实际位置和速度无关。关于这些抽象局部坐标的具体讨论，请参见 [26]。不难看出定义 2.1 独立于局部坐标的选取。因此，在一个非平凡主 S^1 丛中平均是明确定义的，在我们的例子中是由沿着闭合开普勒轨道的运动所定义。

以下命题是 [16] 中主要观察结果的无坐标形式。不指定声明中使用的坐标，我们带来一个小的推广。

命题 2.2. *D 是部分平均系统 $E_{Eucl,a}$ 的第一积分：*

$$\{E_{Eucl,a}, D\} = 0.$$

Proof. 我们用上述规范坐标被定义的开子流形来覆盖 M。设 $\tilde{M}$ 是这些子流形中的任意一个，其局部规范坐标为 $(L, \tilde{\ell}, u_1, \cdots, u_{d-1}, v_1, \cdots v_{d-1})$。

在这些坐标的任意一组中，我们可以写出

$$E_{Eucl,a} = E_{Kep} + \langle V_{pl,2} \rangle_{\tilde{\ell}} := E_{Kep} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_{pl,2} d\tilde{\ell}.$$

然后

$$E_{Eucl} = E_{Eucl,a} + V_{pl,2} - \langle V_{pl,2} \rangle_{\tilde{\ell}}.$$

我们应用平均理论。只有一个频率需要进行平均。此外，我们可以使用 m_2 来充当一个小参数。在这种设定下，我们知道存在一个阶数为 $O(m_2)$ 的典范变换 $\phi : \tilde{M} \mapsto \tilde{M}$ 将 E_{Eucl} 共轭到 $E_{Eucl,a}$，也就是说，

$$E_{Eucl,a} = E_{Eucl} \circ \phi.$$

并且

$$\{E_{Eucl,a}, D \circ \phi + K \circ \phi\} = 0.$$

写出 $D \circ \phi + K \circ \phi = D + D \circ \phi - D + K \circ \phi$ 并注意

$$D \circ \phi - D + K \circ \phi = O(m_2),$$

因为 ϕ 是 $O(m_2)$ 接近恒等。此外，K 的阶是 m_2。这意味着

$$D \circ \phi + K \circ \phi = D + O(m_2).$$

因此

$$\{E_{Eucl,a}, D \circ \phi + K \circ \phi\} = 0 = \{E_{Eucl,a}, D\} + O(m_2).$$

由于上述方程对于所有 m_2 都成立，我们有

$$\{E_{Eucl,a}, D\} = 0.$$

此外，这个等式与 $\tilde{M}$ 的选择无关。因此它在所有 M 上成立。这结束了证明。 □

请注意，证明并不依赖于系统在 $\mathbb{R}^d$ 中的定义，因此可以推广到许多其他情况。

2.5. **球面情形.** 我们现在考虑球面上的系统 $\mathbb{S}^d$。球面上的开普勒问题具有一个很好的且非常特定的性质，即 所有非奇异轨道是闭合的。这使我们能够沿着球面开普勒问题的所有非奇异轨道进行平均。

我们再次将自己限制在情况 $d=2$ 的情况下。为了避免坐标变换带来的复杂化，我们将参考开普勒中心置于 $(0, \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}})$，对应于图表中的点 $(0,a)$。

我们设

$$E_{sKep} := \frac{1}{2}\Big(\dot{x}^2+\dot{y}^2\Big)+\frac{1}{2}(x\dot{y}-\dot{x}y)^2-\frac{m_1\sqrt{1+a^2}(ay+1)}{\sqrt{(y-a)^2+(1+a^2)x^2}}$$

并写出

$$E_{sph} = E_{sKep}+V_{sph,2}.$$

由 (3)，项 $V_{sph,2}$ 在 m_2 上是线性的。请注意，通过解析性，在整个球体除去四个单个球形开普勒势的奇点之外的所有术语和这种关系都是明确定义的，即使我们仅在一个半球的地图中推导出此公式（参见 [22] 中的相关讨论）。这一论点也适用于以下内容。

从 (4) 和 (5) 可知，在球面情况下，(6) 的类似式成立：

$$\{E_{sKep}+V_{sph,2}, D+K\} = 0. \tag{7}$$

$T^*\mathbb{S}^d$ 中使得所有球面开普勒轨道均为非奇异的子集是 $T^*\mathbb{S}^d$ 中的一个稠密开集。我们用 $\mathcal{I}_{Sph}$ 表示 E_{sKep} 在 $T^*\mathbb{S}^d$ 中的那些轨道集合，这些轨道在投影到 $\mathbb{S}^d$ 时会经过其他开普勒中心。我们设定 $\mathcal{R}_{sph} = T^*\mathbb{S}^d \setminus \mathcal{I}_{Sph}$。

定义 2.2. 部分平均系统在平均区域 $\mathcal{R}_{sph}$ 上由以下给出

$$E_{sph,a} = E_{sKep}+\int_{S^1} V_{sph,2}\, ds,$$

其中积分是在 E_{sKep} 的闭轨道上进行的。

现在用与命题 2.2 完全相同的证明方法，将欧几里得量替换为它们的球面对应量，我们得到

命题 2.3. *D 是部分平均系统 $E_{sph,a}$ 在 $\mathcal{R}_{sph}$ 上的第一积分：*

$$\{E_{sph,a}, D\} = 0.$$

3. 拉格朗日问题中的平均值处理

我们现在考虑在 $\mathbb{R}^2$ 中的拉格朗日问题。结果和论证很容易扩展到其他情况。在 $\mathbb{R}^2$ 中，两个开普勒中心分别放置在 $(0,a)$ 和 $(0,-a)$ 的 $\mathbb{R}^2$ 位置上，质量分别为 m_1 和 m_2。此外，在 $(0,0)$ 处放置了一个胡克中心，胡克因子为 f。$\mathbb{R}^2$ 上的度量是 $\|\cdot\|_a$，定义为 $\|(u,v)\|_a = \sqrt{u^2+\frac{v^2}{1+a^2}}$。

该系统的能量是

$$\tilde{E}_{Eucl} = \frac{1}{2}\Big(\dot{x}^2+\frac{\dot{y}^2}{1+a^2}\Big)-\frac{m_1}{\sqrt{x^2+\frac{(y-a)^2}{1+a^2}}}-\frac{m_2}{\sqrt{x^2+\frac{(y+a)^2}{1+a^2}}}+f(x^2+\frac{y^2}{1+a^2}). \tag{8}$$

如前所述我们写为

$$\tilde{E}_{Eucl} = E_{Kep}+\tilde{V}_{Eucl,2},$$

现在与

$$\tilde{V}_{Eucl,2} := -\frac{m_2}{\sqrt{x^2+\frac{(y+a)^2}{1+a^2}}}+f(x^2+\frac{y^2}{1+a^2}).$$

根据命题 2.1，该系统有一个球面对应的系统，由此推导出一个额外的第一积分，来自于球面能量，并需要加上来自球面调和势的项 $f(x^2+y^2)$。与 (4) 相比，只增加了一个关于 f 的一次项，所以我们满足于写出

$$\tilde{E}_{sph} = (1+a^2)(E_{Kep} + \tilde{V}_{Eucl,2} + (D+\tilde{K})/2). \tag{9}$$

其中现在 $\tilde{K}$ 是分别以 m_2 和 f 为线性项的线性组合。

如在定理 2.1 中，我们现在定义

定义 3.1. 部分平均系统在 $\mathcal{R}$ 上由

$$\tilde{E}_{Eucl,a} = E_{Kep} + \int_{S^1} \tilde{V}_{Eucl,2}\, ds,$$

给出，其中积分是对 E_{Kep} 的闭轨道进行的。

命题 3.1. *D 是拉格朗日问题中部分平均系统 $\tilde{E}_{Eucl,a}$ 的第一积分：*

$$\{\tilde{E}_{Eucl,a}, D\} = 0.$$

Proof. 我们遵循与命题 Prop. 2.2 相同的证明方法，但现在沿着闭合开普勒轨道进行单频平均两次。第一次消除了依赖于 m_2 项的振荡部分，第二次消除了依赖于 f 项的振荡部分。我们得到了命题 Prop. 2.2

$$\{\tilde{E}_{Eucl,a}, D\} + O(m_2, f) = 0$$

的证明，并因此获得了

$$\{\tilde{E}_{Eucl,a}, D\} = 0.$$

□

正如双中心情况一样，将平面系统投影到半球上，我们得到类似于命题 3.1 的结果，适用于定义在半球上的拉格朗日问题。称区域 $\mathcal{R}_s$ 为满足球面开普勒轨道与 m_1 相关联的非奇异、完全包含在此半球内且不经过此半球内的另一个开普勒中心的区域。在 $\mathcal{R}_s$ 上，我们以类似的方式定义部分平均系统 $\tilde{E}_{sph,a}$。这种限制是必要的，因为胡克势能在赤道处变得奇异。然后用同样的论点，我们得到

命题 3.2. *D 是半球拉格朗日问题中系统 $\tilde{E}_{sph,a}$ 在 $\mathcal{R}_{sph}$ 上的第一积分：*

$$\{\tilde{E}_{sph,a}, D\} = 0.$$

4. 双曲空间中的系统

正如在 Killing[13] 中定义的那样，可以在双曲空间中以类似的方式定义开普勒问题、两中心问题和拉格朗日问题。射影动力学同样可以扩展到这种情形。实现双曲空间的一种方法是将其写成单位伪球面 $\mathbb{R}^{d,1}$ 的一片。欧几里得-双曲对应关系现在再次通过从原点 $\mathbb{R}^{d,1}$ 进行中心投影给出。开普勒和胡克势能的类似项可以通过替换余切和正切为双曲余切和双曲正切，以类似于球面情形的方式定义。这样我们就可以获得部分平均系统相同的结果，这些系统来自双曲空间中的两中心问题和拉格朗日问题：D 总是部分平均系统的首积分。在这里，部分平均系统再次在这样的区域内定义，即开普勒轨道是封闭的。

我们参考 [22] 中这些问题的具体设置。

5. 可积弹子球与部分平均系统

5.1. **可积的开普勒弹子球问题.** 设 (M, g, V) 是一个自然机械系统，其中 (M, g) 是黎曼流形且 $V: M \mapsto \mathbb{R}$ 是势能。在数据中添加 M 的余维-1 子流形 $\mathcal{B}$ 定义了一个机械台球系统。在这个系统中，粒子在势能 V 的影响下移动，并且到达 $\mathcal{B}$ 时弹性反射。这定义了一个连续的、非光滑的动力系统。系统的总能量是该系统的守恒量。如同光滑情形一样，如果系统具有独立且相对于余切丛上的标准 Poisson 结构互为对合的 $d := \dim M$ 个守恒量，则该系统被称为可积。特别地，如果 $\dim M = 2$，则在除了能量之外还存在一个守恒量的情况下，该系统是可积的。

在平面中，已经识别出几个具有开普勒势场的机械台球族。类似的结论也适用于二维球面和双曲平面。在其最一般的设定下，我们有

定理 5.1. *([22]) 在平面、球体和双曲平面中，来自固定共焦圆锥截面族及其退化的任何有限组合，并将一个开普勒中心放置在其中一个焦点上，都会产生一个可积的开普勒台球，其中 D 是额外的第一个积分，h 是焦点-中心距离。*

我们考虑平面上的一组共焦二次曲线，并将开普勒势放置在它们的一个公共焦点上。这总是导致平面中可积的开普勒台球，其中 D 是额外的第一个积分，在这里 h 被解释为焦点中心距离。[22]。很可能这些就是所有可积的情况 [3]。

定理 5.2. *([24]) 在欧几里得空间中，考虑围绕固定轴的一系列旋转不变二次曲面，使得这些二次曲面与通过该固定轴的任何平面的交集都属于相同的共焦圆锥截面族。交点的焦点对于所有通过固定轴的平面都是相同的，被称为该族的焦点。在球面和双曲空间中，考虑这些二次曲面族从欧几里得空间在中心投影下的图像的自然解析延拓。该族焦点在欧几里得空间中的图像被称为球面和双曲空间中该族的焦点。通过进一步将一个开普勒中心放置在该族的一个共同焦点处，并考虑来自这些族的开子集的任何有限组合，我们获得欧几里得空间、球面和双曲空间中的可积开普勒台球，其中 D 是一个额外的第一个积分。*

5.2. **带有部分平均系统的台球系统.** 我们将稍微推广可积机械台球的概念。基础机械系统现在被一个光滑的、自主的 Hamilton 系统所替代，该系统定义在 T^*M 上。如果配置空间 M 的维度为 2，并且它具有两个独立的、可交换的守恒量，则称这样的系统为*可积的*。我们现在定义一组台球系统：

在欧几里得空间，球面和双曲空间中，考虑从定理 5.2 中定义的二次型族中的任意有限组合开子集。然后，这个族中的任何有限组合开子集作为反射墙，并且以部分平均系统作为基础动力学系统，就定义了一个台球系统。该系统结合了由部分正则化系统描述的轨道连续长期演化以及由于与反射墙碰撞而引起的轨道急剧变化。然而这样的系统并不符合上述机械台球系统的定义，因为它不一定是在总能量为动能和势能之和的自然力学系统中定义的。尽管如此，它仍然定义了一个结合了机械动力学和台球动力学的系统。

结合命题 2.2 及其在球面和双曲空间中的类似版本与定理 5.1，5.2，我们得到

定理 5.3. *开普勒能量 E_{Kep} 和 D 是上述定义的碰撞系统中的守恒量。因此它们是可积的。*

Proof. 我们证明了 E_{Kep} 是一个守恒量。首先，由于哈密顿量的平均化，任何部分平均系统的哈密顿量在局部作用角坐标中都不依赖于开普勒快速角度，因此开普勒轨道的半长轴是不变的。因为 E_{Kep} 仅是这个半长轴的函数，所以它也是不变的。另一方面，E_{Kep} 是粒子在纯开普勒系统中的动能和势能之和。由于弹性反射中动能和势能都不发生变化，因此在反射壁处发生反射时，E_{Kep} 也保持不变。 □

例如，这断言了在平面上的系统中，一个粒子按照流 $E_{Eucl,a}$ 移动直到碰到一条直线并在该直线上反射，这个系统有两个守恒量，即开普勒能量 E_{Kep} 和 D。然而，系统的哈密顿量 $E_{Eucl,a}$ 在反射过程中不一定是守恒的。

我们因此识别出了一大类具有常曲率空间上力学性质的动力学的可积弹子系统。

致谢： L. Z. 获得了德国研究基金会海森堡计划 ZH 605/4-1 的支持。

References

[1] A. Albouy, There is a projective dynamics, *EMS Newsetters*, 89, Sept-Dec., (2013).

[2] L. Boltzmann, Lösung eines mechanichen Problems, *Wiener Berichte*, **58**: 1035-1044, (1868), *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Vol. 1, 97-105.

[3] I. de Blasi, A. Cherubini, V. Barutello, Exploration of billiards with Keplerian potential, arXiv: 2312.01312v2 (2024).

[4] L. Euler, De motu corporis ad duo centra virium fixa attracti, *Nov. Comm. Acad. Imp. Petropolitanae*, **10**: 207-242, (1767).

[5] G. Felder, Poncelet property and quasi-periodicity of the integrable Boltzmann system, *Lett. Math. Phys* 111, no. 12 (2021).

[6] J. Féjoz, Averaging the planar three-body problem in the neighborhood of double inner collisions, *J. Diff. Eq.*, **183**(2):303–341, (2002).

[7] F. Cardin, M. Guzzo. Integrability of close encounters in the spatial restricted three-body problem. *Commun. Contemp. Math.*, 24(6):41, 2022.

[8] C. Graves, On the Motion of a Point upon the Surface of a Sphere, *Proc. R. Irish Acad.*, v. II, 33:207–210, (1842).

[9] G. Gallavotti, I. Jauslin, A Theorem on Ellipses, an Integrable System and a Theorem of Boltzmann, arXiv preprint, (2020).

[10] S, Gasiorek, M. Radnovi, Periodic trajectories and topology of the integrable Boltzmann system, in *Recent Progress in Special Functions, Cont. Math.* 807, (2024).

[11] J.-L. Lagrange, Recherches sur le mouvement d'un corps qui est attiré vers deux centres fixes, Second mémoire, VIII, *Miscellanea Taurinensia*, t. IV(1):67–121, (1766–1769).

[12] T. Levi-Civita. Sur la régularisation du problème des trois corps. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 162:625–628, 1916.

[13] W. Killing, Die Mechanik in den Nicht-Euklidischen Raumformen, *J. reine angew. Math.*, **98**:1-48, (1885).

[14] V. V. Kozlov, Some integrable extensions of Jacobi's problem of geodesics on an ellipsoid, *J. Appl. Math. Mech.*, 59(1):1-7 (1995).

[15] J. Moser, E. Zehnder, *Notes on Dynamical Systems*, AMS-Courant Institute, (2005).

[16] G. Pinzari, A first integral to the partially averaged Newtonian potential of the three-body problem, *Cel. Mech. Dynam. Astron.*, **131**, no. 22, (2019).

[17] G. Pinzari, Euler integral and perihelion librations, *Disc. Conti. Dynam. Syst.* **40**(12):6919-6943, (2020).

[18] G. Pinzari, Perihelion librations in the secular three-body problem, *J. Nonlinear Sci.* **30**: 1771-1808 (2020).

[19] G. Pinzari, Perturbation theory and canonical coordinates in celestial mechanics, Lecture Notes for *18th School on Interactions Between Dynamical Systems and Partial Differential Equations*, Barcelona, (2022).

[20] S. Di Ruzza, G. Pinzari, Euler integral as a source of chaos in the three-body problem, *Comm. Nonl. Sci. Numer. Simul.*, **110**, 106372, (2022).

[21] P. Serret, *Théorie Nouvelle Géométrique et Mécanique des Lignes à Double Courbure* Mallet-Bachelier, Paris, (1860).

[22] A. Takeuchi, L. Zhao, Projective Integrable Mechanical Billiards, *Nonlinearity*, **37**(1): 015011, (2023)

[23] A. Takeuchi, L. Zhao, Conformal transformations and integrable mechanical billiards, *Adv. Math*, **436**, 109411, (2024)

[24] A. Takeuchi and L. Zhao. Integrable Mechanical Billiards in Higher-Dimensional Space Forms, *Regul. Chaotic Dyn.*, **29**(3): 405-434, (2024).

[25] L. Zhao, Projective Dynamics and an integrable Boltzmann billiard model, *Comm. Cont. Math.*, 24(10), no. 2150085, (2022).

[26] L. Zhao, Generalized Periodic Orbits of Time-Periodically Forced Kepler Problem Accumulating the Center and of Circular and Elliptic Restricted Three-Body Problems (with an appendix jointly written with U. Frauenfelder), *Math. Ann.* **385**:59-99, (2023);

[27] L. Zhao, Kustaanheimo-Stiefel regularization and the quadrupolar conjugacy. *Regul. Chaot. Dyn.* 20: 19-36, (2015).

[1] Department of Mathematics, University of Padova, Via Trieste, 63 - 35121 Padova, Italy
Email address: pinzari@math.unipd.it

[2]Institute of Mathematics, University of Augsburg, 86159 Augsburg, Germany and School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116000, China
Email address: lei.zhao@uni-a.de