

# 一种针对线性时变系统非高斯噪声的鲁棒故障检测滤波器

Zhemeng Zhang, Yifei Nie, Le Yin\*

School of Computer and Information Sciences, Southwest University

Chongqing 400715, P. R. China

## 摘要

本文解决了具有非高斯噪声和加性故障的线性时变 (LTV) 系统的鲁棒故障检测滤波问题。传统的广义似然比 (GLR) 方法利用卡尔曼滤波器, 在非高斯噪声条件下可能表现出不足的性能。为缓解这一问题, 提出了一种采用  $H_\infty$  滤波器的故障检测方法。首先推导出  $H_\infty$  滤波器作为正则化最小二乘 (RLS) 优化问题的解, 并分析了故障对输出预测误差的影响。所提出的使用  $H_\infty$  滤波器的方法在非高斯噪声环境中表现出鲁棒性, 并且与采用卡尔曼滤波器的原始 GLR 方法相比, 显著提高了故障检测性能。通过数值示例说明了所提方法的有效性。

关键词: 线性时变系统,  $H_\infty$  滤波器, 故障检测, 非高斯噪声

## 1 介绍

故障检测对于维持系统稳定性至关重要, 特别是在航空航天和制造业 [16]。随着现代控制系统的发展, 研究人员一直致力于提高各种系统的安全性和可靠性 [17, 6]。

线性时不变 (LTI) 系统的故障检测方法已在 [5, 7] 中得到了广泛研究。由于非线性系统在实际应用中更为常见, 已经开发了多种方法来解决非线性系统的问题。其中一种方法涉及使用一阶泰勒级数展开将非线性系统转换为线性时变 (LTV) 系统, 这就是著名的扩展卡尔曼滤波器 (EKF) 方法。然而, 由于忽略了高阶项 [4], EKF 状态估计的准确性受到限制。为了克服这一局限, 提出了一种统计线性化方法, 即无香草卡尔曼滤波器 [9]。与 EKF 相比, 该方法提高了线性化模型的精度。由于非线性系统通常被视为线性系统, 因此对于研究人员而言, 线性系统的故障检测尤为感兴趣。

卡尔曼滤波器在假设高斯噪声的情况下, 以提供最优线性状态估计而闻名。一种基于卡尔曼滤波器的故障检测方法, 在 [2] 中提出, 该方法源于广义最小二乘法。广义似然比 (GLR) 故障检测方法在 [15, 14] 中被引入, 并在 [1] 中进一步探索。一种使用递归卡尔曼滤波器并基于更弱假设的 GLR 方法扩展, 在 [16] 中提出。然而, 这些研究主要集中在具有高斯噪声的模型上。

一种基于博弈论的非高斯噪声故障检测方法在 [3] 中被引入。后续工作, 如 [18, 10], 将  $H_\infty$  滤波器应用于具有非高斯噪声的 LTV 系统的故障检测。这些研究利用了  $H_\infty$  滤波器能够最小化真

\*Corresponding author: yinle0002@swu.edu.cn

实状态与估计状态之间最大估计误差的能力，相比卡尔曼滤波器 [12] 提供了更大的鲁棒性。基于前期工作，结合 GLR 方法和  $H_\infty$  滤波器为非高斯噪声系统中的故障检测提供了一个有前景的方向。

在本文中，首先将  $H_\infty$  滤波器重新形式化为 RLS 形式。然后，在 [16] 中的 GLR 方法的启发下，提出了一种广义创新比（GIR）方法，该方法利用最小二乘法推导故障向量。所提出的 GIR 方法扩展了 GLR 方法以适应非高斯噪声环境，并且新引入的  $H_\infty$  滤波器增强了在这种环境下的故障检测性能。

论文组织如下。2 节将卡尔曼滤波器和  $H_\infty$  滤波器重新表述为 RLS 形式。3 节考察了故障对滤波创新的影响，并引入了持续激励条件，可以替代对多个传感器的需求。4 节提出了一种求解故障向量  $\theta$  的最小二乘法方法。5.1 节提出了 GIR 方法，这是一种针对非高斯噪声 LTV 系统的故障检测方法。5.2 节介绍了一种针对未知起始时间故障的 LTV 系统故障检测方法。最后，在第 6 节通过数值例子验证了所提出的方法。

符号表示法： $(\cdot)^T$  和  $(\cdot)^{-1}$  分别是矩阵的转置和逆。 $\mathbb{E}[\cdot]$  表示期望算子。 $\mathbf{I}$  表示适当维度的单位矩阵。 $\mathbb{R}^n$  代表  $n$  维的欧几里得空间。 $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$  表示为  $x_{0:k}$ 。给定一个向量  $x$  和一个正定矩阵  $A \succ 0$ ， $\|x\|_A^2 = x^T A x$ 。给定一个成本函数  $J(x)$ ， $\hat{x} = \arg \min J(x)$  意味着  $\hat{x}$  是使得  $J(x)$  达到最小值的数值。

## 2 预备知识

考虑以下无故障线性时变系统的状态空间模型，带有控制输入

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k + w_k \\ y_k &= C_k x_k + D_k u_k + v_k \end{aligned}$$

其中  $x_k \in \mathbb{R}^n$ 、 $u_k \in \mathbb{R}^l$  和  $y_k \in \mathbb{R}^p$  分别表示时间步长  $k$  的状态向量、输入向量和输出向量。过程噪声和测量噪声  $w_k$  及  $v_k$  相互独立，并且与  $x_0$  独立，它们的协方差矩阵分别由  $Q_k$  和  $R_k$  给出。更具体地说，在典型的卡尔曼滤波设置中假定  $w_k$  和  $v_k$  为零均值且高斯分布，而在典型的  $H_\infty$  滤波设置中仅假设它们为零均值。 $A_k$ 、 $B_k$ 、 $C_k$  和  $D_k$  分别是状态转移矩阵、控制输入矩阵、观测矩阵和直接馈通矩阵。

然后，带有加性故障的 LTV 系统可以表示为

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k + w_k + \Psi_k \theta \\ y_k &= C_k x_k + D_k u_k + v_k \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中  $\Psi_k$  是部分已知的  $n \times m$  时变故障轮廓矩阵， $\theta$  是一个  $n$  维常数故障向量。与假设故障剖面  $\Psi$  和时变故障向量  $\theta_k$  已知的 [8] 不同。在这种情况下，传感器的数量  $p$  必须满足  $p \geq m$ 。上述条件可以用 [16] 中所示的持续激励条件来替代。

## 2.1 典型故障

由于  $\theta$  是 (2.1) 中的常数, 带有阶跃故障的故障剖面可以表示为

$$\Psi_k(r) = \tilde{\Psi}_k \times \mathbb{1}_{\{k \geq r\}}$$

其中  $\tilde{\Psi}_k$  是已知的故障剖面,  $r$  是未知的阶跃故障起始时间,  $\Psi_k(r)$  表示  $\Psi_k$  对  $r$  的依赖性, 而  $\mathbb{1}_{\{\cdot\}}$  表示指示函数。

由脉冲故障引起的故障剖面可以表示为

$$\Psi_k(r) = \delta_{k,r} \times \mathbf{I}$$

其中  $\delta_{k,r}$  是克罗内克德尔塔函数, 当  $k = r$  时等于 1。

已经表明, 通过比较故障系统和无故障系统的状态估计之间的差异可以实现故障检测 [16]。因此, 在故障检测中, 使用适当的滤波器进行准确的状态估算是特别关键的。

## 2.2 卡尔曼滤波器

对于具有高斯噪声的系统, 卡尔曼滤波器被认为是最佳线性无偏估计器, 这意味着没有其他线性估计器能提供更小的估计误差方差 [13]。卡尔曼滤波器可以表示为一个批处理形式最小二乘问题的解

$$\begin{aligned} J(x_{0:k+1}) = & \|x_0 - \hat{x}_{0|-1}\|_{P_{0|-1}^{-1}}^2 \\ & + \sum_{k=0}^{N-1} \|x_{k+1} - A_k x_k - B_k u_k\|_{Q_k^{-1}}^2 \\ & + \sum_{k=0}^N \|y_k - C_k x_k - D_k u_k\|_{R_k^{-1}}^2 \end{aligned}$$

其中  $\hat{x}_{k|k-1}$  和  $P_{k|k-1}$  分别是在时间步  $k$  的先验状态估计及其误差协方差。或者, 根据 [13], 卡尔曼滤波器的等效递推最小二乘代价函数由下式给出

$$J(x_k) = \|x_k - \hat{x}_{k|k-1}\|_{P_{k|k-1}^{-1}}^2 + \|y_k - C_k x_k - D_k u_k\|_{R_k^{-1}}^2 \quad (2.2)$$

令  $\tilde{x}_k$  为先验状态估计误差, 即,

$$\tilde{x}_k \triangleq x_k - \hat{x}_{k|k-1}$$

然后, 成本函数 (2.2) 可以重写为以下紧凑的线性回归形式

$$m_k = H_k x_k + e_k \quad (2.3)$$

其中

$$m_k = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k-1} \\ y_k - D_k u_k \end{bmatrix}, \quad H_k = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ C_k \end{bmatrix}, \quad e_k = \begin{bmatrix} -\tilde{x}_k \\ v_k \end{bmatrix}$$

$$W_k = \mathbb{E}[e_k e_k^T] = \begin{bmatrix} P_{k|k-1} & 0 \\ 0 & R_k \end{bmatrix}$$

状态估计  $\hat{x}_{k|k}$  及其相关误差协方差  $P_{k|k}$  可以作为 (2.3) 的解获得，并由以下给出

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1} - D_k u_k) \quad (2.4)$$

$$P_{k|k} = (\mathbf{I} - K_k C_k) P_{k|k-1} \quad (2.5)$$

其中

$$K_k = P_{k|k-1} C_k^T (C_k P_{k|k-1} C_k^T + R_k)^{-1}$$

现在，状态可以使用 (2.4) 和 (2.5) 递归估计。在实际应用中，噪声的分布可能是未知的，需要利用更鲁棒的滤波算法来处理这种不确定性。

### 2.3 $H_\infty$ 过滤器

$H_\infty$  滤波器作为鲁棒滤波算法广泛应用于实际系统中。 $\alpha$  是限制估计误差与系统误差比值的性能参数。成本函数由以下给出：

$$\frac{\sum_{i=0}^{k-1} \|z_i - \hat{z}_{i|i-1}\|_{S_i}^2}{\|x_0 - \hat{x}_{0|-1}\|_{P_{0|-1}}^2 + \sum_{i=0}^{k-1} (\|w_i\|_{Q_i^{-1}}^2 + \|v_i\|_{R_i^{-1}}^2)} < \frac{1}{\alpha} \quad (2.6)$$

其中  $Q_k$ ,  $R_k$  和  $S_k$  是根据特定问题由设计者选择的对称正定矩阵。与  $H_\infty$  滤波器不同，卡尔曼滤波器最小化了由  $S_k$  [12] 加权的估计误差方差。在成本函数 (2.6) 中，预测对象成为状态估计的线性组合

$$z_k = L_k x_k$$

其中假设  $L_k$  是由设计者选择的一个满秩矩阵。当  $L_k = \mathbf{I}$  时，状态将被直接估计。

应提到的是， $H_\infty$  滤波器在 (2.7) 中的成本与 Kalman 滤波器在 (2.2) 中的成本相比有一个额外的正则化项。

$$J(x_k) = \|x_k - \hat{x}_{k|k-1}\|_{P_{k|k-1}^{-1}}^2 - \alpha \|z_k - \hat{z}_{k|k-1}\|_{S_k}^2$$

$$+ \|y_k - C_k x_k - D_k u_k\|_{R_k^{-1}}^2 \quad (2.7)$$

(2.7) 中的正则化最小二乘问题的解由以下给出

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} + K_k (y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1} - D_k u_k) \\
P_{k|k} &= \left( P_{k|k-1}^{-1} - \alpha L_k^T S_k L_k + C_k^T R_k^{-1} C_k \right)^{-1} \\
K_k &= \left( P_{k|k-1}^{-1} - \alpha L_k^T S_k L_k + C_k^T R_k^{-1} C_k \right)^{-1} C_k^T R_k^{-1} \\
\hat{x}_{k+1|k} &= A_k \hat{x}_{k|k} + B_k u_k \\
P_{k+1|k} &= A_k P_{k|k} A_k^T + Q_k
\end{aligned} \tag{2.8}$$

**备注 2.1.** 在实际应用中,  $S_k$  通常设置为单位矩阵, 这表明对  $z_k$  的状态赋予相同的兴趣。请注意, 选择参数  $\alpha$  需要平衡滤波器的鲁棒性和敏感性。当  $\alpha \rightarrow 0$  时, 成本函数 (2.7) 中的加性正则项消失, 且  $H_\infty$  滤波器退化为卡尔曼滤波器。

令  $\tilde{z}_k = z_k - \hat{z}_{k|k-1}$ , 则类似地, (2.3),  $H_\infty$  滤波问题也可以被公式化为线性回归形式 [11]。

$$\tilde{m}_k = \tilde{H}_k x_k + \tilde{e}_k \tag{2.9}$$

其中

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_k &= \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k-1} \\ \hat{z}_{k|k-1} \\ y_k - D_k u_k \end{bmatrix}, \quad \tilde{H}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ L_k \\ C_k \end{bmatrix}, \quad \tilde{e}_k = \begin{bmatrix} -\tilde{x}_k \\ -\tilde{z}_k \\ v_k \end{bmatrix} \\
\tilde{W}_k = \mathbb{E}[\tilde{e}_k \tilde{e}_k^T] &= \begin{bmatrix} P_{k|k-1} & P_{k|k-1} L_k^T & 0 \\ L_k P_{k|k-1} & L_k P_{k|k-1} L_k^T & 0 \\ 0 & 0 & R_k \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

为了获得  $H_\infty$  滤波器的递推公式, 将使用不同的权重矩阵  $W_k$  来求解 (2.9)。

$$W_k = \begin{bmatrix} P_{k|k-1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} S_k^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & R_k \end{bmatrix}$$

然后, 可以通过求解如下线性回归问题获得状态估计及其误差协方差

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{k|k} &= (\tilde{H}_k^T W_k^{-1} \tilde{H}_k)^{-1} \tilde{H}_k^T W_k^{-1} \tilde{m}_k \\
P_{k|k} &= (\tilde{H}_k^T W_k^{-1} \tilde{H}_k)^{-1}
\end{aligned}$$

其可以进一步表示为

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{k|k} &= (\mathbf{I} - K_k C_k) \hat{x}_{k|k-1} + K_k (y_k - D_k u_k) \\
P_{k|k} &= \left( P_{k|k-1}^{-1} - \alpha L_k^T S_k L_k + C_k^T R_k^{-1} C_k \right)^{-1}
\end{aligned}$$

其中

$$K_k = \left( P_{k|k-1}^{-1} - \alpha L_k^T S_k L_k + C_k^T R_k^{-1} C_k \right)^{-1} C_k^T R_k^{-1}$$

### 3 故障对创新的影响

为了检测故障，需要定义一个指标来衡量系统中的故障程度。 $\epsilon_k$  是输出预测误差（也称为创新）。 $\epsilon_k$  的定义如下

$$\epsilon_k \triangleq y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1} - D_k u_k$$

其中  $\hat{x}_{k|k-1}$  是物理模型的状态估计值和前一时间步的值。注意， $\epsilon_k$  表示观测与预测之间的误差。创新反映了观测偏离的程度。创新越大，观测值与无故障系统间的偏差也越大，反之亦然。因此，一种故障检测工具就是创新  $\epsilon_k$ 。

状态预测误差和创新也可以表示为

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= A_k (\mathbf{I} - K_k C_k) \tilde{x}_k - A_k K_k v_k + w_k + \Psi_k \theta \\ \epsilon_k &= C_k \tilde{x}_k + v_k \end{aligned} \quad (3.1)$$

故障向量  $\theta$  与创新  $\epsilon_k$  之间的关系可以得到如下表达

$$\epsilon_k = \epsilon_k^0 + C_k \Gamma_k \theta \quad (3.2)$$

其中， $\epsilon_k^0$  是应用于无故障系统的相同  $H_\infty$  滤波器的创新。 $\Gamma_k$  的递归形式如下：

$$\Gamma_{k+1} = A_k (\mathbf{I} - K_k C_k) \Gamma_k + \Psi_k$$

从 (3.1)，创新的协方差  $\Sigma_k$  是

$$\Sigma_k = \mathbb{E}[\epsilon_k \epsilon_k^T] = C_k P_{k|k-1} C_k^T + R_k \quad (3.3)$$

其中  $P_{k|k-1}$  是先验估计误差  $\tilde{x}_k$  的协方差矩阵。

持续激励条件 [16] 由

$$\sum_{k=k-s+1}^k \Gamma_k^T C_k^T \Sigma_k^{-1} C_k \Gamma_k \geq \gamma \times \mathbf{I}$$

给出存在一个整数  $s > 0$ ，一个实数  $\gamma > 0$ ，对于任意的  $k > s$ ，上述不等式总是成立。在 [8] 中的传感器数量条件可以替代此条件。

### 4 求解故障向量

在第 3 节中，讨论了故障检测的创新方法。本节为 GIR 算法奠定了初步工作。这两种方法都将在第 6 节的数值例子中得到验证。

为了解决 (3.2) 中的故障向量，采用了 [16] 的极大似然估计方法。相比之下，本文采用最小二乘法求解故障向量。(3.2) 的成本函数由以下给出

$$J(\theta) = \sum_{j=1}^k \|\epsilon_j^0\|_{\Sigma_j^{-1}}^2 = \sum_{j=1}^k \|\epsilon_j - C_j \Gamma_j \theta\|_{\Sigma_j^{-1}}^2 \quad (4.1)$$

**备注 4.1.** 由假设可知， $\theta$  是一个常数，而  $C_k$  和  $\Gamma_k$  在时间步  $k$  时是已知的。因此，在无故障系统中，创新  $\epsilon_k^0$  的协方差  $\Sigma_k^0$  等于 (3.3) 中的协方差  $\Sigma_k$ 。

(4.1) 的解可以写为

$$\hat{\theta}_k = \arg \min_{\theta} \sum_{j=1}^k (\epsilon_j - C_j \Gamma_j \theta)^T \Sigma_j^{-1} (\epsilon_j - C_j \Gamma_j \theta)$$

设  $\frac{dJ}{d\theta} = 0$ ，可以得到

$$\sum_{j=1}^k \Gamma_j^T C_j^T \Sigma_j^{-1} \epsilon_j = \sum_{j=1}^k \Gamma_j^T C_j^T \Sigma_j^{-1} C_j \Gamma_j \theta$$

和

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_k &= \left( \sum_{j=1}^k \Gamma_j^T C_j^T \Sigma_j^{-1} C_j \Gamma_j \right)^{-1} \left( \sum_{j=1}^k \Gamma_j^T C_j^T \Sigma_j^{-1} \epsilon_j \right) \\ &= E_k^{-1} d_k \end{aligned} \quad (4.2)$$

其中

$$\begin{aligned} E_k &\triangleq \sum_{j=1}^k \Gamma_j^T C_j^T \Sigma_j^{-1} C_j \Gamma_j \\ d_k &\triangleq \sum_{j=1}^k \Gamma_j^T C_j^T \Sigma_j^{-1} \epsilon_j \end{aligned}$$

然后， $E_k$  和  $d_k$  的递归形式可以表示为

$$\begin{aligned} E_k &= E_{k-1} + \Gamma_k^T C_k^T \Sigma_k^{-1} C_k \Gamma_k \\ d_k &= d_{k-1} + \Gamma_k^T C_k^T \Sigma_k^{-1} \epsilon_k \end{aligned}$$

## 5 故障检测

### 5.1 故障对广义创新比率的影响

考虑 GIR，它被定义为

$$h_k \triangleq e \ln \frac{\sum_{j=1}^k \|\epsilon_j\|_{\Sigma_j^{-1}}^2}{\sum_{j=1}^k \|\epsilon_j^0\|_{\Sigma_j^{-1}}^2} \quad (5.1)$$

其中  $e$  是自然常数。

**命题 5.1.** 在 (5.1) 中定义的  $GIR$  可以用  $E_k$  和  $d_k$  表示如下

$$h_k = d_k^T E_k^{-1} d_k \quad (5.2)$$

证明.

$$\begin{aligned} h_k &= e \ln \frac{\sum_{j=1}^k \|\epsilon_j\|_{\Sigma_j^{-1}}^2}{\sum_{j=1}^k \|\epsilon_j^0\|_{\Sigma_j^{-1}}^2} \\ &= \sum_{j=1}^k \epsilon_j^T \Sigma_j^{-1} \epsilon_j \\ &\quad - \sum_{j=1}^k \left( \epsilon_j - C_j \Gamma_j \hat{\theta}_k \right)^T \Sigma_j^{-1} \left( \epsilon_j - C_j \Gamma_j \hat{\theta}_k \right) \\ &= \sum_{j=1}^k \left( 2 \epsilon_j^T \Sigma_j^{-1} C_j \Gamma_j \hat{\theta}_k - \hat{\theta}_k^T \Gamma_j^T C_j^T \Sigma_j^{-1} C_j \Gamma_j \hat{\theta}_k \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

其中假设  $\theta$  是 (2.1) 中的一个常数故障向量,  $E_k$  是一个对称矩阵。从 (4.2), 因此可以重写 (5.3)

$$\begin{aligned} h_k &= 2 \left( \sum_{j=1}^k \epsilon_j^T \Sigma_j^{-1} C_j \Gamma_j \right) E_k^{-1} d_k \\ &\quad - d_k^T E_k^{-1} \left( \sum_{j=1}^k \Gamma_j^T C_j^T \Sigma_j^{-1} C_j \Gamma_j \right) E_k^{-1} d_k \\ &= d_k^T E_k^{-1} d_k \end{aligned}$$

□

值得注意的是,  $h_k$  表示  $\sum_{j=1}^k \|\epsilon_j\|_{\Sigma_j^{-1}}^2$  和  $\sum_{j=1}^k \|\epsilon_j^0\|_{\Sigma_j^{-1}}^2$  之间的差异。  $h_k$  的值越大, 实际系统的估计状态与无故障系统估计状态之间的偏差就越大, 表明发生故障的可能性越高, 反之亦然。

**备注 5.2.** 需要注意的是, 如果将  $H_\infty$  滤波器替换为卡尔曼滤波器, 则  $GIR$  方法将在 [16] 中退化为传统的  $GLR$  方法。

## 5.2 故障检测与未知的发生时间

故障发生时间  $r$  在实际的故障系统中总是未知的。有一个简单的方法 [16] 来估计发生时间  $r$ 。将  $\Gamma_k$  关于  $r$  进行公式化

$$\Gamma_{k+1}(r) = A_k (\mathbf{I} - K_k C_k) \Gamma_k(r) + \Psi_k(r)$$

其中  $k$  是当前时间步长, 且  $\Gamma_0(r) = 0$ 。现在将  $E_k$ ,  $d_k$  和  $h_k$  写为

$$\begin{aligned} E_k(r) &\triangleq \sum_{j=r+1}^k \Gamma_j^T(r) C_j^T \Sigma_j^{-1} C_j \Gamma_j(r) \\ d_k(r) &\triangleq \sum_{j=r+1}^k \Gamma_j^T(r) C_j^T \Sigma_j^{-1} \epsilon_j \\ h_k &= d_k^T(r) E_k^{-1}(r) d_k(r) \end{aligned}$$

然后故障发生时间的估计值是  $r$

$$\hat{r}_k = \arg \max_{1 \leq r \leq k-s} d_k^T(r) E_k^{-1}(r) d_k(r) \quad (5.4)$$

现在, 可以通过 (5.2) 检测具有非高斯噪声的 LTV 系统中的故障, 并通过 (5.4) 估计故障发生时间  $r$ 。

## 6 数值例子

考虑由 [16] 建模的脉冲故障的状态空间系统

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k + w_k + \delta_{k,r} \theta$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + v_k$$

其中  $x_k \in \mathbb{R}^2$ ,  $y_k \in \mathbb{R}$ ,  $u_k \in \mathbb{R}$  和故障向量  $\theta \in \mathbb{R}^2$ 。一维输出噪声  $v_k$  的协方差是  $R_k = 0.0025$  和  $v_k \sim \mathcal{N}(0, R_k)$ 。过程噪声的形式如下

$$w_k = w_{k-1} + I_{2 \times 1} \times v_k$$

其中  $I_{2 \times 1} = [1, 1]^T$ 。假设  $r = 201$ , 意味着脉冲故障发生在  $k = 201$ , 搜索窗口为  $\bar{w} = 100$ 。在 (2.8) 中的参数矩阵被设置为  $S_k = \mathbf{I}$ ,  $L_k = \mathbf{I}$  和  $\alpha = 60$ 。

该系统不稳定, 并应用了传递函数为  $G(z) = 0.209 + 0.0011/(z - 1)$  的 PI 控制器以确保状态保持有界。

图 1 描述了卡尔曼滤波器和  $H_\infty$  滤波器在故障发生时刻  $k = 201$  和故障向量  $\theta = [1.5, 0]^T$  下的创新。可以观察到, 卡尔曼滤波器对非高斯噪声更为敏感, 导致其创新出现较大的波动。在这种情况下, 故障对创新的影响变得相对不显著。然而, 对于  $H_\infty$  滤波器, 可以通过几乎不受名义噪声影响的创新来清楚地识别出故障。这种优势在图 2 所示的  $\theta = [0.6, 0]^T$  情况下变得更加显著, 其中故障在卡尔曼滤波器的创新中几乎无法区分, 但在  $H_\infty$  滤波器的创新中仍然可以区分。

上述观察结果是由于卡尔曼滤波器在应用于非高斯噪声系统时性能受限，无法提供准确的状态估计。由名义噪声和故障引起的较大估计误差几乎无法区分。相比之下， $H_\infty$  滤波器在这种系统中表现出强大的鲁棒性。这证明了在具有非高斯噪声的系统中选择  $H_\infty$  滤波器进行故障检测的合理性。

图示. 3 和 4 分别说明了  $\text{GIR}h_k$  对于  $\theta = [1.5, 0]^T$  和  $\theta = [0.6, 0]^T$  的阈值处理结果（其中小于阈值的值被设为零）。每幅图的顶部结果显示使用卡尔曼滤波器获得的结果，而底部则显示使用  $H_\infty$  滤波器获得的结果。

可以看出，当将带有卡尔曼滤波器的 GLR 方法应用于非高斯噪声系统时，由于较大的估计误差，故障检测变得具有挑战性。随着故障幅度减小，这一问题变得更加严重。相比之下，带有所述  $H_\infty$  滤波器的 GIR 方法即使在存在较小故障幅度的情况下也表现出更清晰的故障检测模式。

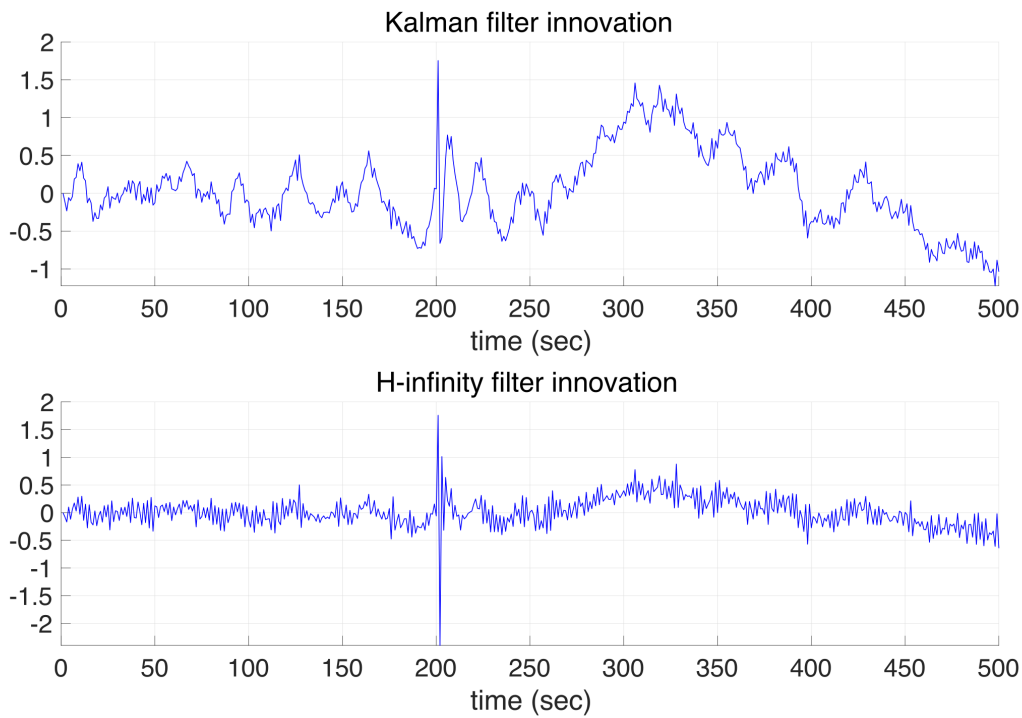


图 1: 卡尔曼滤波器（上方）和  $H_\infty$  滤波器（下方）在脉冲故障下的创新之处在于  $\theta = [1.5, 0]^T$

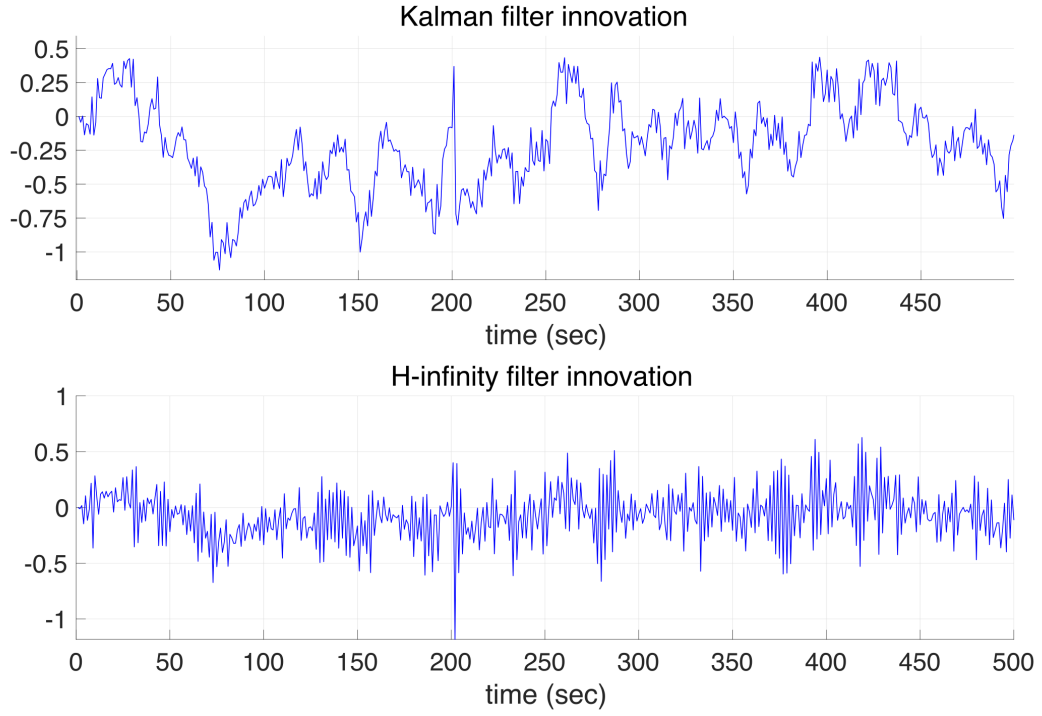


图 2: 卡尔曼滤波器(顶部)和  $H_\infty$  滤波器(底部)在脉冲故障情况下的创新之处在于  $\theta = [0.6, 0]^T$

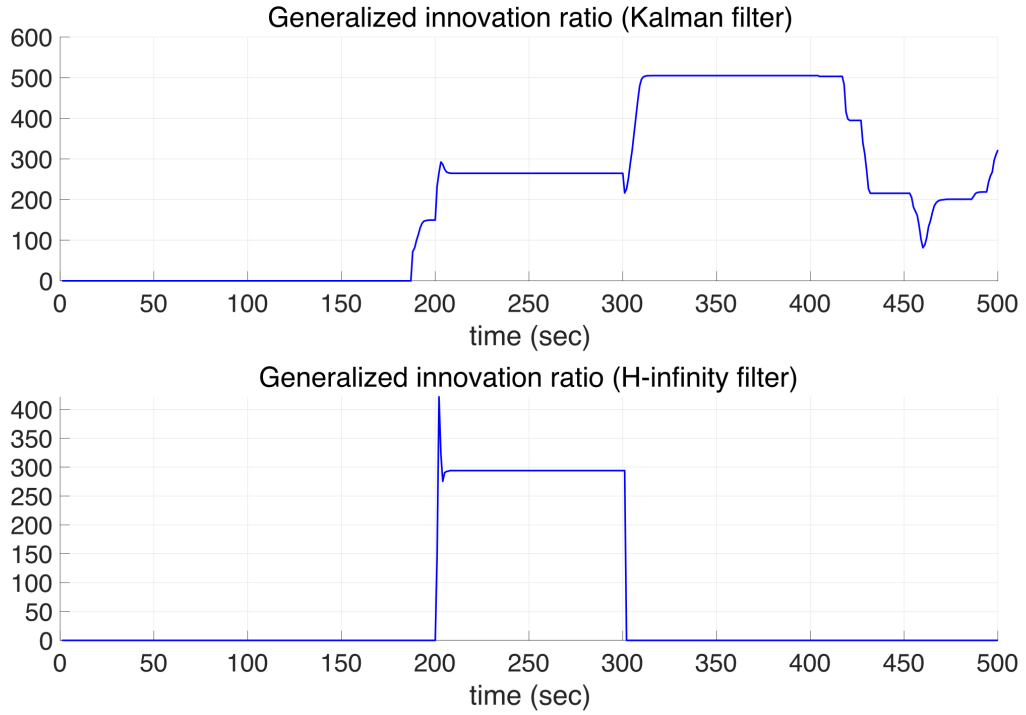


图 3: 卡尔曼滤波器的  $GIRh_k$  (顶部) 和  $H_\infty$  滤波器的  $GIRh_k$  (底部) 对于脉冲故障的情形  $\theta = [1.5, 0]^T$

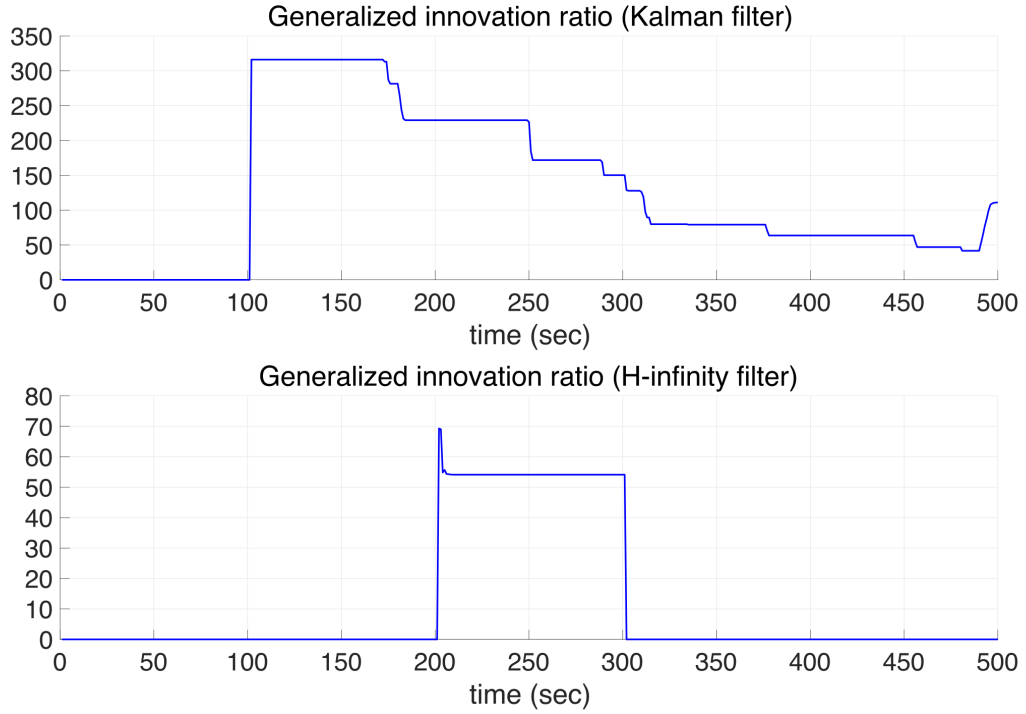


图 4: 卡尔曼滤波器的  $GIRh_k$  (顶部) 和  $H_\infty$  滤波器的  $GIRh_k$  (底部) 对于脉冲故障的情况  $\theta = [0.6, 0]^T$

## 7 结论

基于 RLS 的  $H_\infty$  滤波器的解首先被提出。然后, 使用最小二乘法求解故障向量  $\theta$ 。GIR 方法基于之前开发的 GLR 方法和  $H_\infty$  滤波器, 在存在非高斯噪声的情况下用于故障检测。这种方法能够放大使用 GLR 方法难以检测到的突然变化 (故障)。此外, 由于  $H_\infty$  滤波器对系统参数变化的鲁棒性, 扩展了  $H_\infty$  滤波器的 GLR 方法 (称为 GIR) 在具有非高斯噪声的 LTV 系统中表现出优越的故障检测性能。

## 参考文献

- [1] Michele Basseville, Igor V Nikiforov, et al. *Detection of abrupt changes: theory and application*, volume 104. Prentice hall Englewood Cliffs, 1993.
- [2] Robert H Chen and Jason L Speyer. A generalized least-squares fault detection filter. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 14(7):747–757, 2000.
- [3] Walter H Chung and Jason L Speyer. A game theoretic fault detection filter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(2):143–161, 1998.
- [4] Garry A Einicke and Langford B White. Robust extended kalman filtering. *IEEE transactions on signal processing*, 47(9):2596–2599, 1999.
- [5] Paul M Frank. Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy: A survey and some new results. *automatica*, 26(3):459–474, 1990.

- [6] Inseok Hwang, Sungwan Kim, Youdan Kim, and Chze Eng Seah. A survey of fault detection, isolation, and reconfiguration methods. *IEEE transactions on control systems technology*, 18(3):636–653, 2009.
- [7] Rolf Isermann. Supervision, fault-detection and fault-diagnosis methods—an introduction. *Control engineering practice*, 5(5):639–652, 1997.
- [8] Zhicheng Ji, Rongjia Zhu, and Feng Ding. On the fault diagnosis of linear time-varying systems. In *IEEE International Conference Mechatronics and Automation, 2005*, volume 2, pages 811–814. IEEE, 2005.
- [9] Tine Lefebvre, Herman Bruyninckx, and Joris De Schuller. Comment on” a new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators”[with authors’ reply]. *IEEE transactions on automatic control*, 47(8):1406–1409, 2002.
- [10] Xiaobo Li and Kemin Zhou. A time domain approach to robust fault detection of linear time-varying systems. *Automatica*, 45(1):94–102, 2009.
- [11] Yifei Nie, Kunpeng Ren, and Le Yin. An optimization-based framework for constrained  $h_\infty$  filtering. In *2024 43rd Chinese Control Conference (CCC)*, pages 3262–3267. IEEE, 2024.
- [12] Dan Simon. *Optimal state estimation: Kalman, H-infinity, and nonlinear approaches*. John Wiley & Sons, 2006.
- [13] Harold W Sorenson. Least-squares estimation: from gauss to kalman. *IEEE spectrum*, 7(7):63–68, 1970.
- [14] Alan Willsky and H Jones. A generalized likelihood ratio approach to the detection and estimation of jumps in linear systems. *IEEE Transactions on Automatic control*, 21(1):108–112, 1976.
- [15] Alan S Willsky and Harold L Jones. A generalized likelihood ratio approach to state estimation in linear systems subjects to abrupt changes. In *1974 IEEE conference on decision and control including the 13th symposium on adaptive processes*, pages 846–853. IEEE, 1974.
- [16] Qinghua Zhang and Michèle Basseville. Statistical detection and isolation of additive faults in linear time-varying systems. *Automatica*, 50(10):2527–2538, 2014.
- [17] Youmin Zhang and Jin Jiang. Bibliographical review on reconfigurable fault-tolerant control systems. *Annual reviews in control*, 32(2):229–252, 2008.
- [18] Maiying Zhong, Donghua Zhou, and Steven X Ding. On designing  $h_\infty$  fault detection filter for linear discrete time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(7):1689–1695, 2010.