

# 约瑟夫森异常涡旋

Dan Crawford,<sup>1</sup> Stefan Ilić,<sup>1</sup> Pauli Virtanen,<sup>1</sup> and Tero T. Heikkilä<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Physics and Nanoscience Center, University of Jyväskylä,  
P.O. Box 35 (YFL), FI-40014 University of Jyväskylä, Finland

(10Dated: 2025 年 4 月 25 日)

我们证明了与奇频三重态配对相关的带有循环电流的涡旋出现在约瑟夫森结中，其中势垒是一个具有强自旋轨道耦合的弱铁磁体。通过对称性分析和微观方法，我们表明超导自由能中存在一个额外的项——旋转不变量——这允许即使之前考虑的李兹维茨不变量消失时也产生磁电效应。我们证明了可以通过操纵弱连接中的拉什巴自旋轨道耦合（通过门控）来控制这些涡旋的大小、形状和位置，并建议可以使用扫描磁计量技术检测这些涡旋。我们还表明，超导相关性的横向三重态分量可以形成纹理。

介绍— 超导体中的涡旋自 20 世纪 50 年代被发现以来一直是研究的热点领域。在 Abrikosov[1] 的原始工作中，涡旋出现在第二类超导体中，这些涡旋是由一个磁通量子穿过的，并且由于超导相位绕着奇点  $2\pi$  进行缠绕而产生。这会导致形成具有正常核心的环流电流。超导异质结构允许存在其他各种类型的涡旋。例如，在约瑟夫森结中，由于超导相位 [2, 3] 中的扭折或孤子，可以出现无核且延伸的涡旋。在靠近超导体的正常金属 [4] 以及结点处，也可以观察到带有核心的涡旋，这是由于超导关联的破坏性干涉 [5] 所致。虽然在这种情况下需要外部磁场来生成涡旋，但其他形式的磁性也可以产生涡旋。例如，已经提供了由于内部磁化 [6, 7] 而在 Fe(Se, Te) 中出现涡旋的证据，并且在具有强自旋轨道耦合 (SOC) 和磁性吸附原子 [8] 的超导表面也是如此。在后一种情况下，由铁磁邻近效应产生了自旋三重态超导相关性，并被自旋轨道耦合调制。类似于超流体 He-3[9–11]，也可能有可能生成具有这种三重态相关性的更为奇异的涡旋物质。

这里我们介绍了约瑟夫森异常涡旋 (JAV)。这些出现在二维接头中的环流电流密度 ( Fig. 1(b))，其中约瑟夫森弱链接是铁磁性的，并且具有强烈的自旋轨道耦合 ( Fig. 1(a))，只要没有施加电流。JAV 仅在弱链接，或者弱链接中的栅控区域的长度和宽度接近相干长度时出现。电流密度在涡旋边缘达到最大值，在中心消失。与这些电流涡旋相辅相成，我们还提出了两种超导织构：(i)  $f_z$  分量的相位中的织构，以及 (ii) 由超导关联的  $f_x$  和  $f_y$  分量形成的织构。后者类似于磁性织构。

在这封信中，我们研究了一个以前未被探索的自由能旋转不变量。我们表明，即使标准的 Lifshitz 不

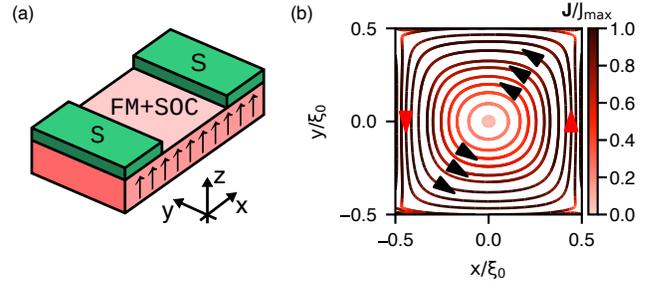


图 1. (a) 此处研究的超导体-铁磁金属-超导体器件的示意图。铁磁层中存在强自旋轨道耦合。(b) 由于旋转不变性，(a) 中弱链接中的环流电流密度。参数：( $L_x, L_y, J, \alpha$ ) = ( $\xi_0, \xi_0, \Delta_0, 2.35/\xi_0$ )。

变量 [12] 为零，这个不变量也能产生循环电流。我们展示了 JAVs 并不是经过精细调节的，因此它们可以在一系列自旋轨道和交换能量中出现。我们认为，由于涡流产生的磁场，JAVs 可以通过扫描磁计量技术被检测到。我们还建议，这些涡旋可能通过弱连接中的 Rashba “岛” 利用背栅进行操控。

在整个信件中，我们使用电极的单重态超导间隙  $\Delta_0$  作为能量的自然单位，并将超导相干长度  $\xi_0$  作为长度单位。在预测可测量量的振幅时，我们会恢复物理单位。在数值计算中，我们将温度固定为  $T = 0.1\Delta_0/k_B$ 。我们约定希腊下标  $\mu, \nu$  遍历 (0, 1, 2, 3)，而拉丁下标则遍历 (1, 2, 3)。重复的指标表示求和。

无黎夫席茨不变量的磁电效应— 在过去几十年里，实验和理论都表明自旋轨道耦合允许材料 [12] 的磁性和电性之间产生耦合。这种耦合体现在超导效应和约瑟夫森二极管效应 [13]、螺旋相 [14] 以及埃德尔斯坦效应和逆埃德尔斯坦效应 [15–17] 等现象中。对于弱超导性，许多磁电效应可以通过在金兹堡-朗道自由能

中添加利夫希茨不变量 [12] 来描述。在这封信中，我们研究了自由能中的一个旋转不变项，它同样会导致电磁效应，即使没有利夫希茨不变量。这一术语在 [18] 中有报道，但其重要性并未被讨论。

首先考虑超导自由能密度

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & a|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2}D_{jk}\Pi_j\psi(\Pi_k\psi)^* + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0} \\ & + d_k[\psi^*\Pi_k\psi + \psi(\Pi_k\psi)^*] \\ & + ie_{jk}\Pi_j\psi(\Pi_k\psi)^*. \end{aligned} \quad (1)$$

这里  $\psi$  是超导体的复序参量,  $a$  和  $b$  是通常的金兹堡-朗道常数,  $D_{jk}$  是超流刚度对称张量,  $\mathbf{B}$  是磁场。为了紧凑起见, 我们定义动量  $\Pi_j = -i\hbar\hat{\nabla}_j = -i\hbar\partial_j - 2eA_j$ , 其中  $A_j$  是电磁矢量势。除了传统的 Ginsburg-Landau 项外, 对称性还允许几个额外的项 [19]: Lifshitz 不变量向量  $d_k$ , 以及在这里感兴趣的旋转变换不变反对称张量  $e_{jk}$ 。

$d_k$  和  $e_{jk}$  的存在要求打破时间反演对称性。向量  $d_k$  还需要内在地打破反演对称性。 $e_{jk}$  项是一个全导数, 要求通过外在非均匀性 (例如系统边界) 打破反演对称性 (详见附录 A)。打破这些对称性的一种机制来自自旋轨道耦合和交换场  $\mathbf{h}$  的结合, 在这里我们考虑这一点。在动量 SOC 线性的情况下, 对于  $H_{\text{SO}} = \mathcal{A}_j^a k_j \sigma^a / (2m)$ , 我们可以定义 SU(2) 场  $\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_j^a \sigma^a$  [20, 21] 和相应的场强张量  $F_{ij} = -i[\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j]$ , 适用于位置无关的 SU(2) 场。使用这些定义, 我们发现 (参见 [22] 的 S2 节) 一般有

$$d_i = i\kappa \text{Tr} \{F_{ij}[\mathcal{A}_j, h_k \sigma_k]\}, \quad e_{ij} = \kappa \text{Tr} [F_{ij} h_k \sigma_k], \quad (2)$$

其中  $\kappa = -\frac{7\zeta(3)\nu_F\eta}{16\pi^2 k_B^2 T_c^2}$ ,  $\nu_F$  是费米能级处每个自旋投影的态密度,  $\eta = D\ell^2 / (k_F \ell)$ ,  $D = v_F \ell / 2$  是扩散常数,  $v_F$  是费米速度,  $k_F$  是费米波矢,  $T_c$  是临界温度, 而  $\ell$  是平均自由程。 $\zeta(n)$  是 Zeta 函数。因此,  $d_k$  是三次的, 而  $e_{ij}$  在自旋轨道耦合强度方面是二次的。此外, 这些形式意味着  $d_k$  仅在交换场和  $F_{ij}$  具有垂直分量时非零, 而  $e_{ij}$  则需要它们的平行分量存在。因此, 我们可以研究一个没有另一个的影响。

如图 Fig. 1(a) 所示, 在存在交换场  $\mathbf{h} = J\hat{z}$  和由于电场而在  $z$  方向产生的 Rashba 自旋轨道耦合的情况下, 自旋轨道耦合哈密顿量为  $H_{\text{SO}} = \alpha(\hat{z} \times \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}$ , 相应的场强张量是  $F_{xy} = -F_{yx} = 2\alpha^2 \sigma_z$ 。因此,  $d_k = 0$

和  $e_{xy} = -e_{yx} = 4\kappa\alpha^2 J$ 。分部积分这个旋转项会导致一个边界项  $\propto n_j e_{jk} [\psi \partial_k \psi^* - \text{c.c.}]$ , 该边界项会产生与边界法线垂直的环流电流  $n_j$ 。

我们从扩散区的微观角度推导出旋转不变量, 基于 Ref. 23 and 24 中描述的方法 (详情见 Sec. S1 在 [22] 中的内容)。虽然 Eq. (1) 适用于块状超导系统, 但对于如 Fig. 1(a) 所示的异质结结构, 微观理论对应的旋转不变量是

$$\mathcal{F}_{\text{rot}} = i\zeta(\hat{\nabla} f_s \times \hat{\nabla}^* f_s^*) \cdot \hat{z}. \quad (3)$$

这里  $\zeta = \pi\nu_F \hbar \eta \alpha^2$ ; 在所有的数值结果中我们假设  $\hbar\eta = 0.01\Delta_0 \xi_0^4$ 。由于这是一个近邻系统, 我们将自由能写为超导关联  $\mathbf{f} = f_s \sigma_0 + f_i \sigma_i$  的形式, 并且由于铁磁近邻效应, 我们要求这些关联具有单态  $f_s$  和三态  $\mathbf{f}_t = (f_x, f_y, f_z)$  组分 [25]。假设铁磁体较弱, 因此准经典近似是有效的 (即, 自旋向上和向下的状态密度相同)。只要存在自旋轨道耦合和交换场, 旋转项  $\mathcal{F}_{\text{rot}}$  就会出现, 即使没有李斯蒂茨不变量也是如此。它生成环流电流密度,

$$\mathbf{J}_{\text{rot}} = 2e\zeta(f_s \text{curl} f_s^* + f_s^* \text{curl} f_s), \quad (4)$$

其中  $\text{curl} A = (\partial_y A, -\partial_x A)$  和  $e$  是基本电荷。这里  $f_s$  由于邻近效应在结上变化, 而  $\mathbf{f}_t$  一般情况下是有限的, 因为交换场的存在。我们期望传统的 Ginsburg-Landau 项主导旋转变换不变量, 因此为了观察该项的影响, 在结中不应存在电流 (即, 相位偏置  $\varphi$ )。

我们数值求解了完整的非线性问题, 包括单重态-三重态转换和有限尺寸效应, 使用的方法见参考文献 18。在图 Fig. 1(b) 中, 我们绘制了一个  $L_x \times L_y = \xi_0 \times \xi_0$  结的电流密度, 在零相位偏压下。这给出了一个典型的电流涡旋, 其特点是边界处 (与中心相反, 类似于 Abrikosov 涡旋) 有强烈的电流密度。对于大结, 我们在超导终端附近发现了一些旋转电流 [22], 类似于文献 26 中报道的平面内交换场的情况。只要  $\alpha^2 \xi_0^2 \gg \varphi$ , 即旋转不变量, 主导着通常的约瑟夫森电流。对于  $\varphi \gtrsim \alpha^2 \xi_0^2$ , 旋转不变扰动了约瑟夫森电流 (见 [22] 的 S4 节)。

涡旋产生的磁场— 使用毕奥-萨伐尔定律, 在 Fig. 2 中绘制了涡旋中心的磁场, 对于四种不同的连接尺寸在零相位偏置下的情况, 覆盖了一定范围的交换能量  $J$  和自旋轨道耦合强度  $\alpha$ 。图中的磁场尺度

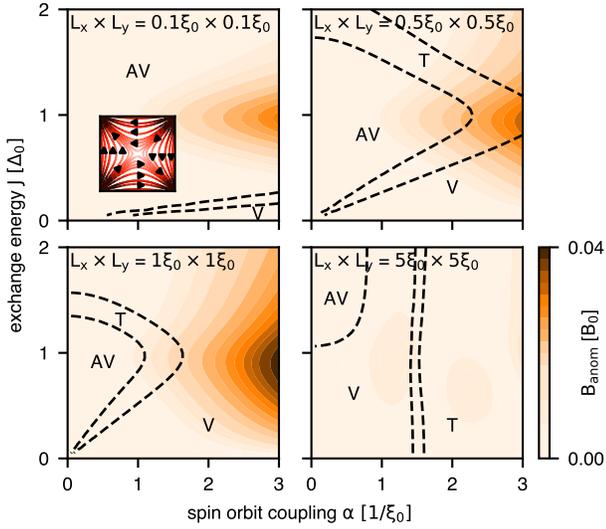


图 2. 中心结处沿  $\hat{z}$  方向由循环电流产生的磁场强度，适用于各种结尺寸，在交换能  $J$  和自旋轨道耦合强度  $\alpha$  的范围内。虚线表示反涡旋 (AV) 和涡旋 (V) 相之间的转变 (T)。插图：反涡旋的代表性图。插图参数：( $L_x, L_y, J, \alpha$ ) = ( $\xi_0, \xi_0, \Delta_0, 1/(2\xi_0)$ )。

为  $B_0 = \mu_0 \sigma_D \Delta_0 t / (4e \xi_0) = 1 \text{mT} \times (t/\xi_0) [\sigma_D / (1.6 \cdot 10^7 \text{ S/m})] [\Delta_0 / (200 \mu\text{eV})]$ ，以无序金属的典型德鲁德电导率  $\sigma_D = \nu_F e^2 D$  表示，并且铝的一个典型值是  $\Delta_0$ 。我们还包括了结的厚度  $t \ll \xi_0$ 。我们没有自治地计算这个磁场（即，通过反馈到电磁矢量势中）。由于旋转不变项与其他自由能项之间的竞争，电流涡旋只能在某些阈值  $\alpha, J$  以上出现，这取决于边界条件、温度和场强（例如）。我们在附录 B 中展示了一个例子，即从 Ginsburg-Landau 自由能来看，当旋转不变项超过超流体重量时涡旋是稳定的。数值上，我们发现涡旋-反涡旋转变作为  $\alpha$  和  $J$  的函数（我们在 Fig. 2 的小图中绘制了一个代表性的反涡旋）。反涡旋相由于边界条件而产生，其精确依赖性随系统大小的变化而变化，与  $\alpha$  和  $J$  相关。请注意，在反涡旋相中，结点之间没有净电流传输，也没有相关的磁场。

为了量化涡旋-反涡旋转变，我们还绘制了从归一化的涡度  $\Gamma/\xi_0 = \int_{\text{area}} \nabla \times (\mathbf{J}/J_{\text{max}}) dx dy$  计算出的环流（Fig. 2 中的虚线），其中  $J_{\text{max}}$  是计算区域边界的电流。一般来说，环流不是量子化的，但很容易证明反涡旋的环流消失，而涡旋的环流是有限的。考虑当前密度

$\mathbf{J}_V$  和  $\mathbf{J}_{AV}$ ，它们分别近似于一个涡旋和一个反涡旋，

$$\mathbf{J}_V = J_0 \left( \frac{-y}{\xi_0} \hat{x} + \frac{x}{\xi_0} \hat{y} \right), \quad \mathbf{J}_{AV} = J_0 \left( \frac{y}{\xi_0} \hat{x} + \frac{x}{\xi_0} \hat{y} \right), \quad (5)$$

其中  $J_0 = e \zeta \Delta_0 / (\hbar \xi_0)$ 。于是，对于一个反涡旋，环流是  $\Gamma_{AV} = 0$ ，但是对于一个涡旋，环流是  $\Gamma_V = 2J_0 A$ ，其中  $A$  是涡旋的面积。通过在涡旋相中弱链接中心的一个方形区域内计算  $\Gamma$ ，我们得到  $J_{\text{max}} \approx J_0$ 。因此在数值计算中， $\Gamma \approx 2A$  表示一个涡旋， $\Gamma \approx 0$  表示反涡旋，而  $\Gamma \approx A$  则表示过渡相。由于有限尺寸效应以及方形几何与圆盘之间的差异，数值梯度不具量子化特性，并且与解析结果相比存在一些小的变化。

在极坐标中，涡旋的近似电流密度为  $\mathbf{J}_V = J_0 \rho / \xi_0 \hat{\phi}$ ，其中  $\rho$  是径向坐标， $\phi$  是角坐标。涡旋中心 ( $\rho = 0$ ) 的磁场是

$$\mathbf{B}_{\text{anom}} = \mu_0 J_0 \frac{Rt}{2\xi_0}, \quad (6)$$

其中  $\mu_0$  是真空磁导率， $R$  是涡旋的半径。将  $R = \xi_0$  代入，我们发现磁感应强度的最大值为  $B_{\text{anom}} = 2\pi(R/\xi_0)(\alpha \xi_0)^2 (\eta/\Delta_0 \xi_0^4) B_0$ ，大约是数值中看到的 1.5 倍。

对于非常小的 ( $L_x \times L_y = 0.1\xi_0 \times 0.1\xi_0$ ) 连接，系统主要受反涡旋相支配，因此中心处的磁场通常很小。对于较大的  $\alpha$ ，系统接近转变点，所以由于有限尺寸我们发现有一个小磁场。对于大的连接 ( $L_x \times L_y = 5\xi_0 \times 5\xi_0$ )，参数空间主要由涡旋相和过渡相支配。围绕终端的大反向传播电流抵消了中心涡旋产生的磁场（参见 [22] 中的 S3 节）。对于  $L_x \times L_y = 0.5\xi_0 \times 0.5\xi_0$  连接，参数空间均匀混合着反涡旋、涡旋和过渡相。大约在  $J = \Delta_0$  处，由于这一转变产生了大的磁场（参见 [22] 中的 S3 节）。当系统仅略大一些 ( $L_x \times L_y = \xi_0 \times \xi_0$ )，参数空间主要由涡旋相主导，其间有一个小的过渡相。大约在  $J = \Delta_0$  处，由于涡旋的存在，存在一个约  $B_{\text{anom}} = 0.04B_0$  的大磁场，这与上述简单近似一致。因为  $f_z \sim J/(J^2 + \omega^2)$ （其中  $\omega$  是马茨布拉频率）[22]，我们预期磁场强度会在某个有限的  $J$  处达到峰值，并在较大的  $J$  时衰减；在数值计算中，这个峰值出现在大约  $J \approx \alpha/2$  处。

特征与操控— 因为环流会产生磁场，因此表征这些涡旋的自然方法是通过纳米磁计量。扫描探针技术

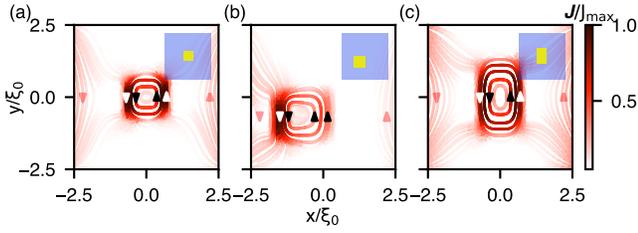


图 3. JAV 的大小 (a)、位置 (b) 和形状 (c) 可以通过在弱自旋轨道耦合  $\alpha_{\text{back}}$  的弱链中, 利用门控定义具有强 Rashba 自旋轨道耦合  $\alpha_{\text{island}}$  的岛来操纵。插图: 展示了在弱链 (蓝色正方形) 内通过门控定义  $\alpha_{\text{island}}$  (黄色区域) 的示意图。参数:  $(L_x, L_y, J, \alpha_{\text{island}}, \alpha_{\text{back}}) = (5\xi_0, 5\xi_0, \Delta_0, 2/\xi_0, 1/(2\xi_0))$ 。

已经成熟, 并且可以在低温下以高空间分辨率运行。磁力显微镜已经被用于研究常规约瑟夫森涡旋 [27, 28], 并且可以达到 10—50 nm 的分辨率 [29], 甚至原子分辨率 [30]。扫描氮空位中心 [31] 和纳米 SQUID 方法 [32] 现在都可以达到大约 50 nm 的空间分辨率。这些磁计量技术因需要减去背景铁磁信号而变得复杂。一个可能的解决方案是包含一个背栅来控制 Rashba 相互作用 [33]。然后可以有效地关闭 SOC 以隔离背景铁磁信号。例如, 可以通过不存在约瑟夫森二极管效应来确认 SOC 的缺失。

此类基于门控的技术可用于控制 Rashba 自旋轨道耦合, 也可以用来操纵这些涡旋。考虑一个具有弱 (或不存在) Rashba 自旋轨道耦合的大弱链接。可以通过一个小背栅在弱链接内定义一个具有强 Rashba 自旋轨道耦合的岛。我们在 Fig. 3 中展示了示例, 说明如何使用这种 Rashba “岛” 来控制 JAV 的大小、位置和形状。此类方法可用于实现任意尺寸接头中的 JAV, 克服了定义相干长度方形几何结构的必要性。确实, 可以利用此技术在一个弱链接内定义几个不同的涡旋。

超导纹理 — 超导关联的所有成分都必须遵守结的  $180^\circ$  旋转对称性。这一要求与结的几何形状和自旋轨道耦合相结合, 允许存在如 Fig. 4(a) 所示的  $f_z$  相位纹理。这种纹理特征在于  $x$  和  $y$  方向上的相梯度。我们发现所有研究系统的尺寸超过阈值  $J, \alpha$  时都存在类似的纹理。我们还指出, 在同时具有自旋轨道耦合和铁磁性的超导异质结构中,  $f_x$  和  $f_y$  组件可以是有限的。

考虑一个具有强自旋轨道耦合的铁磁盘, 其边缘为超导体。由于旋转对称性,  $f_s$  和  $f_z$  只能有径向依赖性。相反,  $f_x$  和  $f_y$  可以同时具有径向和角向依赖

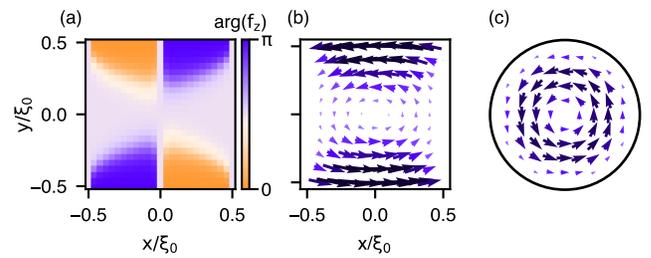


图 4. (a) 在方形几何结构中计算的相位纹理。在  $x \approx 0, f_z = 0$  处。数值上计算的超导  $f_x, f_y$ -纹理 (b) 在方形几何结构上 ( $L_x = L_y = \xi_0$ ), 以及 (c) 在圆盘几何结构上, 边缘为超导体, 而圆盘内部是具有自旋轨道耦合的铁磁体 (半径  $R = \xi_0$ )。我们绘制了在最小马蒂巴频率下的分量。参数:  $(J, \alpha) = (\Delta_0, 2/\xi_0)$ 。

性, 意味着可能会形成纹理。我们数值求解了这样一个圆盘的问题 ( Fig. 4(b)), 以及一个方形几何问题 ( Fig. 4(c)), 如图 1-3 所示。确实, 我们发现这些  $f_x - f_y$  纹理与磁性纹理有显著的相似之处。目前尚不清楚如何观察这些涡旋。

展望 — 我们描述了约瑟夫森异常涡旋的特性和操控, 这些涡旋出现在弱链接是具有强自旋轨道耦合的弱铁磁体的约瑟夫森结中。交换场和自旋轨道耦合共同导致循环电流, 我们将这种现象与自由能中的一个先前未探索的旋转项联系起来。我们还发现, 同样的成分会导致三重态分量  $f_t$  的纹理, 这些并不直接贡献于电流。

约瑟夫森异常涡旋可以在基于异质结构的弱链接中找到, 例如铁磁薄膜/正常金属双层、沉积在金属上的铁磁合金薄层, 或二维范德华异质结, 与常规超导电极耦合。可能的薄层双层包括 YIG/InAs 或 EuS/InAs [34], 必须调整这些材料使得磁化方向偏离平面 (参见例如, 参考文献 [35] 及其中引用的文献)。候选铁磁合金包括 Pd/Ni [36] 或 Cu/Ni 合金 [37]。必须谨慎选择层以最小化 Dzyaloshinskii-Moriya 相互作用, 这将产生磁性纹理而不是纯偏离平面的交换场。最后, 我们建议将具有面外磁化 [38] 的范德瓦尔斯单层磁性材料  $\text{CrI}_3$  与具有强 Rashba 自旋轨道耦合的其他范德瓦尔斯材料 (如  $\text{MoS}_2$  或  $\text{WSe}_2$  [39]) 结合, 以寻找异常涡旋。

作者感谢与 G. E. Volovik、E. Strambini、A. Dunbrack 和 R. Ojajärvi 的讨论。本工作得到了欧盟的 HORIZON-RIA 计划 (资助协议号 101135240

JOGATE) 的支持, 该计划由 Chips Joint Undertaking 管理, 以及芬兰研究理事会 (合同号 355056 和 354735) 的支持。我们感谢芬兰网格和云基础设施提供的计算能力配额 (持久标识符 urn:nbn:fi:research-infras-2016072533)。

- 
- [1] A. A. Abrikosov, *Journal of Physics and Chemistry of Solids* **2**, 199 (1957).
- [2] A. V. Ustinov, *Physica D: Nonlinear Phenomena Annual International Conference of the Center for Nonlinear Studies*, **123**, 315 (1998).
- [3] V. S. Stolyarov, V. Ruzhitskiy, R. A. Hovhannisyanyan, S. Grebenchuk, A. G. Shishkin, O. V. Skryabina, I. A. Golovchanskiy, A. A. Golubov, N. V. Klenov, I. I. Soloviev, M. Y. Kupriyanov, A. Andriyash, and D. Roditchev, *Nano Lett.* **22**, 5715 (2022).
- [4] V. S. Stolyarov, T. Cren, C. Brun, I. A. Golovchanskiy, O. V. Skryabina, D. I. Kasatonov, M. M. Khapaev, M. Y. Kupriyanov, A. A. Golubov, and D. Roditchev, *Nat Commun* **9**, 2277 (2018).
- [5] D. Roditchev, C. Brun, L. Serrier-Garcia, J. C. Cuevas, V. H. L. Bessa, M. V. Milošević, F. Debontridder, V. Stolyarov, and T. Cren, *Nature Phys* **11**, 332 (2015).
- [6] K. Jiang, X. Dai, and Z. Wang, *Phys. Rev. X* **9**, 011033 (2019).
- [7] Y. S. Lin, S. Y. Wang, X. Zhang, Y. Feng, Y. P. Pan, H. Ru, J. J. Zhu, B. K. Xiang, K. Liu, C. L. Zheng, L. Y. Wei, M. X. Wang, Z. K. Liu, L. Chen, K. Jiang, Y. F. Guo, Z. Wang, and Y. H. Wang, *Phys. Rev. X* **13**, 011046 (2023).
- [8] S. S. Pershoguba, K. Björnson, A. M. Black-Schaffer, and A. V. Balatsky, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 116602 (2015).
- [9] R. Rantanen and V. B. Eltsov, *Phys. Rev. B* **107**, 104505 (2023), arXiv:2301.05558 [cond-mat].
- [10] R. Rantanen and V. Eltsov, *Competition of vortex core structures in superfluid  $^3\text{He-B}$*  (2024), arXiv:2406.13649 [cond-mat].
- [11] R. Rantanen, E. Thuneberg, and V. Eltsov, *Structure of a single-quantum vortex in  $^3\text{He-A}$*  (2024), arXiv:2412.13764 [cond-mat].
- [12] D. F. Agterberg, in *Non-Centrosymmetric Superconductors: Introduction and Overview*, edited by E. Bauer and M. Sgrist (Springer, Berlin, Heidelberg, 2012) pp. 155–170.
- [13] M. Nadeem, M. S. Fuhrer, and X. Wang, *Nat Rev Phys* **5**, 558 (2023).
- [14] J. Hasan, D. Shaffer, M. Khodas, and A. Levchenko, *Phys. Rev. B* **110**, 024508 (2024).
- [15] V. M. Edelstein, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2004 (1995).
- [16] V. M. Edelstein, *Phys. Rev. B* **72**, 172501 (2005).
- [17] O. Dimitrova and M. V. Feigel'man, *Phys. Rev. B* **76**, 014522 (2007).
- [18] P. Virtanen, *Phys. Rev. B* **111**, 024510 (2025).
- [19] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, in *Course of Theoretical Physics, Volume 5, Statistical Physics* (Pergamon Press Ltd, Oxford, 1958) pp. 424–454.
- [20] C. Gorini, R. Raimondi, and P. Schwab, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 246604 (2012).
- [21] FS. Bergeret and IV. Tokatly, *Phys. Rev. B* **89**, 134517 (2014).
- [22] See Supplemental Material at <http://XXX> for derivation of the rotary invariant from the microscopic nonlinear  $\sigma$  model; analytic derivation of the prefactors for the Lifshitz and rotary invariants; additional plots highlighting the transition between vortices and antivortices as a function of  $\alpha$  and system size; and additional plots showing the effect of finite phase bias.
- [23] P. Virtanen, F. S. Bergeret, and I. V. Tokatly, *Phys. Rev. B* **104**, 064515 (2021).
- [24] P. Virtanen, F. S. Bergeret, and I. V. Tokatly, *Phys. Rev. B* **105**, 224517 (2022).
- [25] F. S. Bergeret, A. F. Volkov, and K. B. Efetov, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4096 (2001).
- [26] F. S. Bergeret and I. V. Tokatly, *Phys. Rev. B* **102**, 060506 (2020).
- [27] V. V. Dremov, S. Y. Grebenchuk, A. G. Shishkin, D. S. Baranov, R. A. Hovhannisyanyan, O. V. Skryabina, N. Lebedev, I. A. Golovchanskiy, V. I. Chichkov, C. Brun, T. Cren, V. M. Krasnov, A. A. Golubov, D. Roditchev, and V. S. Stolyarov, *Nat Commun* **10**, 4009 (2019).
- [28] S. Y. Grebenchuk, R. A. Hovhannisyanyan, V. V. Dremov, A. G. Shishkin, V. I. Chichkov, A. A. Golubov, D. Roditchev, V. M. Krasnov, and V. S. Stolyarov, *Phys. Rev. Res.* **2**, 023105 (2020).
- [29] J. Šoltýs, J. Feilhauer, I. Vetrova, J. Tóbiš, K. Bublikov, T. Ščepka, J. Fedor, J. Dérier, and V. Cambel, *Applied Physics Letters* **116**, 242406 (2020).
- [30] U. Kaiser, A. Schwarz, and R. Wiesendanger, *Nature* **446**, 522 (2007).
- [31] P. Welter, J. Rhensius, A. Morales, M. S. Wörnle, C.-H. Lambert, G. Puebla-Hellmann, P. Gambardella, and C. L. Degen, *Applied Physics Letters* **120**, 074003 (2022).

- [32] D. Vasyukov, Y. Anahory, L. Embon, D. Halbertal, J. Cuppens, L. Neeman, A. Finkler, Y. Segev, Y. Myasoedov, M. L. Rappaport, M. E. Huber, and E. Zeldov, *Nature Nanotech* **8**, 639 (2013).
- [33] S. M. Farzaneh, M. Hatefipour, W. F. Schiela, N. Lotfizadeh, P. Yu, B. H. Elfeky, W. M. Strickland, A. Matos-Abiague, and J. Shabani, *Phys. Rev. Research* **6**, 013039 (2024).
- [34] Z. Geng, A. Hijano, S. Ilić, M. Ilyn, I. Maasilta, A. Monfardini, M. Spies, E. Strambini, P. Virtanen, M. Calvo, C. González-Orellána, A. P. Helenius, S. Khorshidian, C. I. L. de Araujo, F. Levy-Bertrand, C. Rogero, F. Gizotto, F. S. Bergeret, and T. T. Heikkilä, *Supercond. Sci. Technol.* **36**, 123001 (2023).
- [35] H. Bai, J. Li, X. Deng, Q. Guo, X. Zhan, Y. Sun, S. Cheng, S. Xiao, P. Liu, D. Liu, J. Cai, and T. Zhu, *ACS Appl. Nano Mater.* **8**, 50 (2025).
- [36] T. Kontos, M. Aprili, J. Lesueur, and X. Grison, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 304 (2001).
- [37] V. V. Ryazanov, V. A. Oboznov, A. Yu. Rusanov, A. V. Veretennikov, A. A. Golubov, and J. Aarts, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2427 (2001).
- [38] B. Huang, G. Clark, E. Navarro-Moratalla, D. R. Klein, R. Cheng, K. L. Seyler, D. Zhong, E. Schmidgall, M. A. McGuire, D. H. Cobden, W. Yao, D. Xiao, P. Jarillo-Herrero, and X. Xu, *Nature* **546**, 270 (2017).
- [39] Q. Shao, G. Yu, Y.-W. Lan, Y. Shi, M.-Y. Li, C. Zheng, X. Zhu, L.-J. Li, P. K. Amiri, and K. L. Wang, *Nano Lett.* **16**, 7514 (2016).

### 结尾事项

附录 A: *Ginzburg-Landau* 理论中的 *Lifshitz* 和旋转变量不变性— 这里我们在金兹堡-朗道图像中从现象学角度推导出旋转不变量, 并更详细地讨论其意义。

自由能的表达式必须在保持物理系统不变的各种全局变换下保持不变 [19]。序参数场的变换是  $\psi \mapsto \psi^*$  (时间反演  $\mathcal{T}$ , TR),  $\psi(\mathbf{r}) \mapsto \psi(-\mathbf{r})$  (反演变换  $\mathcal{I}$ ),  $\psi(\mathbf{r}) \mapsto \psi(R_{ij}r_j)$  (全局旋转), 和  $\psi(\mathbf{r}) \mapsto e^{i\varphi}\psi(\mathbf{r})$  (全局  $U(1)$ ); 系数保持  $\mathcal{F}$  不变且为实数。进一步的限制来自晶体对称性, 但这里我们不考虑这一点。

展开梯度并用实数系数表示结果, 含一个梯度的可能项为

$$\mathcal{F}_1 = d_k i [\psi \partial_k \psi^* - \text{c.c.}] + c_k \partial_k |\psi|^2 \quad (7)$$

然后,  $d_k$  是一个 TR-奇向量 ( $\mathcal{T}, \mathcal{I} = -, -$ ), 而  $c_k$  是一个 TR-偶向量 ( $\mathcal{T}, \mathcal{I} = +, -$ )。由分部积分可知,  $c_k$  项等价于 Ginzburg-Landau  $|\psi|^2$  项, 并且有一个类似的边界项  $n_k c_k |\psi|^2$  其中  $n_k$  是边界法向量。

可能包含两个梯度的项是

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2 = & D_{jk} \partial_j \psi \partial_k \psi^* + i e_{jk} \partial_j \psi \partial_k \psi^* + f_{jk} \partial_j \partial_k |\psi|^2 \\ & + g_{jk} i \partial_j [\psi \partial_k \psi^* - \text{c.c.}] \end{aligned} \quad (8)$$

不失一般性, 我们取了  $D_{jk} = D_{kj}$ ,  $e_{jk} = -e_{kj}$  和  $f_{jk} = f_{kj}$ ,  $g_{jk} = g_{kj}$ 。然后,  $D_{jk}$  是一个 TR 偶张量 ( $\mathcal{T}, \mathcal{I} = +, +$ ), 而  $e_{jk}$  是一个 TR 奇张量 ( $\mathcal{T}, \mathcal{I} = -, +$ )。类似地:  $f_{jk}$  是一个 TR 偶张量, 而  $g_{jk}$  是一个 TR 奇张量。

对于空间常数系数, 除了超流刚度  $D_{jk}$  部分外的项都是全导数。通过分部积分,  $f_{jk}$  项等价于  $c_k$  项和一个边界项  $n_j f_{jk} \partial_k |\psi|^2$ 。另一部分  $g_{jk}$  等价于 Lifshitz 不变量  $(\partial_j g_{jk}) i [\psi \partial_k \psi^* - \text{c.c.}]$  和类似的边界项  $n_j g_{jk} i [\psi \partial_k \psi^* - \text{c.c.}]$ 。  $e_{jk}$  项的贡献也减少为

$$\int_M i e_{jk} \partial_j \psi \partial_k \psi^* = - \int_{\partial M} \frac{1}{2} n_j e_{jk} i [\psi \partial_k \psi^* - \psi^* \partial_k \psi] \quad (9)$$

$$+ \int_M \frac{1}{2} (\partial_j e_{jk}) i [\psi \partial_k \psi^* - \psi^* \partial_k \psi]. \quad (10)$$

因此,  $\partial_j e_{jk}$  等同于一个体 Lifshitz 不变量, 而  $e_{jk}$  则类似于边界项。

在现象学层面上,  $e_{jk}$  项可以始终用边界项来表示。然而, 如 [22] 的 S1 节所示, 在微观理论中, 等效的项自然地作为体积贡献出现, 这适用于任意平滑的空间变化规范和交换场 (即, 在大于平均自由程的尺度上)。对于由该理论描述的界面, 负责量子的有效边界利夫席茨不变量微观上是由体积  $e_{jk}$  项生成的。

附录 B: 由于超导盘中的旋转不变性形成的涡旋— 旋转不变量可以导致超导涡旋的形成。考虑在超导圆盘  $M$  中, 半径为  $R$  的空间常数旋转不变量  $e_{xy} = -e_{yx} = \epsilon$  的影响, 在没有 Lifshitz 不变量的情况下以及对于空间均匀且旋转向对称的超流体权重  $D_{jk} =$

$D_S \delta_{jk}$ 。总自由能为

$$F = \int_M d^2r (-a|\psi|^2 + b|\psi|^4 + D_S |\nabla\psi|^2) + \epsilon \int_{\partial M} \hat{n} \cdot \text{Im}[\psi^* \nabla \times (\psi \hat{u}_z)] \quad (11)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr (-a|\psi|^2 + b|\psi|^4 + D_S |\nabla\psi|^2) + \epsilon \int_0^{2\pi} d\varphi \text{Im}[\psi^* \partial_\varphi \psi], \quad (12)$$

其中第二行是以极坐标书写的。请注意，我们选择了一个惯例，其中  $a > 0$  对应于超导状态。

空间均匀的超导序参数满足 Ginzburg-Landau 方程，即  $\psi = \psi_0 \equiv \sqrt{a/(2b)}$  的能量是  $F_0 = -\pi R^2 a^2/(4b)$ 。我们来检查一下旋转不变量是否能提供一个能量更低的非均匀状态。我们做出变分猜测 Ansatz

$$\psi(r, \varphi) = \psi_0 \tanh(r/\xi) e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (13)$$

确保在盘内的所有位置上， $\psi$  唯一确定。这里  $\xi$  是一个优化下的猜测长度尺度。最多到指数级小的修正项对于  $R \gg \xi$ ，变化  $\delta F = F - F_0$  表示为

$$\delta F = \frac{\pi a}{b} \left[ a\xi^2 c_0 + D_S \left( c_1 + n^2 \log \frac{c_2 R}{\xi} \right) + \epsilon n \right], \quad (14)$$

其中  $c_0 = (1 + 20 \log 2)/12$ ， $c_1 = (4 \log 2 - 1)/3$  和  $c_2 \approx 1.25$ 。与  $a$  成比例的项来自自由能密度中  $a$  和  $b$  项的组合，当使用  $\psi_0$  的特定值时。将此相对于  $\xi$  最小化得到  $\xi = |n| \sqrt{D_S/(c_0 a)}$ ，在这一最小尺度下自由能的变化为

$$\delta F = \frac{\pi a}{b} \left\{ D_S [c_1 + n^2 (1 + \log \frac{c_2 R}{\xi})] + \epsilon n \right\}. \quad (15)$$

这一变分近似表明，转动不变量可以驱动系统进入非均匀涡旋状态。涡旋状态的转变（即，带有  $\delta F < 0$ ）对于  $\epsilon > 0$  发生在  $n = -1$  时，当

$$\epsilon \geq D_S \left( 1 + c_1 + \log \frac{c_2 R}{\xi} \right). \quad (16)$$

换句话说，涡旋过渡要求转动不变量基本上超过超流体权重。

请注意，这个结果是基于一个粗糙的变分近似，因此 Eq. (16) 是旋转不变量临界值的近似估计。