孤子状态在具有高阶相互作用的尖峰振荡器中

Vladimir V. Semenov,[1,*] Subhasanket Dutta,[2] Stefano Boccaletti,[3,4,5]
Charo I. del Genio,[4,6,7] Sarika Jalan,[2] and Anna Zakharova[8]

[1] *Department of Physics, Saratov State University, Astrakhanskaya str. 83, 410012 Saratov, Russia*
[2] *Complex Systems Lab, Department of Physics, Indian Institute of Technology Indore, Indore 452020, India*
[3] *Sino-Europe Complexity Science Center, North University of China, Taiyuan 030051, China*
[4] *Institute of Interdisciplinary Intelligent Science, Ningbo University of Technology, Ningbo, China*
[5] *CNR – Institute of Complex Systems, Madonna del Piano 10, Sesto Fiorentino, Firenze 50019, Italy*
[6] *Institute of Smart Agriculture for Safe and Functional Foods and Supplements, Trakia University, Stara Zagora 6000, Bulgaria*
[7] *School of Mathematics, North University of China, 030051, Taiyuan, China*
[8] *Bernstein Center for Computational Neuroscience, Humboldt-Universität zu Berlin, PhilippstraSSe 13, 10115 Berlin, Germany*

我们研究了一个全局耦合的 FitzHugh-Nagumo 振子系统，表明高阶相互作用影响了同步状态和非同步状态之间的过渡特征。特别是，我们证明了在同步过渡附近，由于二阶相互作用的存在，孤立态出现。与相位振子系统的现象学观察不同，我们显示，在低耦合强度下，孤立态出现在两种过渡方向上，而在高耦合情况下，它们仅发生在正向过程中，反向过程则以爆炸性去同步为特征。

I. 介绍

在过去十年中，高阶相互作用的存在被认为对大量复杂系统的行为产生了重大影响 [1, 2]。它们的影响尤为相关，因为在一般情况下，这些影响不能通过成对相互作用的叠加来恢复。这导致了人们对研究代表它们的结构（即超图和单纯复形）的静态和动态属性重新产生了浓厚的兴趣 [3–5]。

高阶相互作用对集体动力学的影响已在震荡器网络中得到了特别深入的研究，它们与同步和共振等现象的关系已经确立 [6–9] 。在这样的系统中，它们最显著的效果之一是在没有突然的同步变化的情况下产生突然的不同步转换。此外，它们还可以诱导极端多稳态的存在，即无限多个稳定和部分同步的状态共存 [10] 。这种共存与孤子状态这一显著现象有关，在这种状态下，一个或多个动力单元分裂出来，并且尽管耦合是均匀的，但其行为不同于其他单元 [11–14] 。部分同步由高阶相互作用引起的效果也可能导致嵌合态的形成 [15] 以及突然同步转换的诱导，伴随有滞后和同步与不一致状态的双稳性 [16, 17]，最终引发爆炸式同步 [18] 。然而，这些复杂的动力学行为迄今为止仅在相位振子网络中被观察和研究过。

在本文中，我们展示了高阶相互作用也对全局耦合脉冲振子系统中的过渡产生了显著影响。更具体地说，我们展示了高阶相互作用如何导致同步路径上的两个方向上孤子状态的出现。然后，我们描述了不同阶次相互作用对这些系统的现象学的具体影响。

II. 模型

我们研究了一个在成对和二阶相互作用同时存在情况下的全局耦合 FitzHugh-Nagumo 振子系统。其一般演化由以下系统描述：

$$\begin{aligned}\varepsilon\dot{x}_i &= x_i - \frac{x_i^3}{3} - y_i + \frac{\sigma_p}{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\tanh(x_j - x_i)\\ &\quad + \frac{\sigma_h}{2N^2}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\tanh(x_j + x_k - 2x_i)\,,\\ \dot{y}_i &= x_i + a_i - by_i\,.\end{aligned} \tag{1}$$

这里，x_i 和 y_i 是第 i 个振子的状态变量，参数 $\varepsilon \ll 1$ 负责状态变量的时间尺度分离，N 是振子的数量，而 σ_p 和 σ_h 分别是成对相互作用和更高阶相互作用的强度。

[*] semenov.v.v.ssu@gmail.com

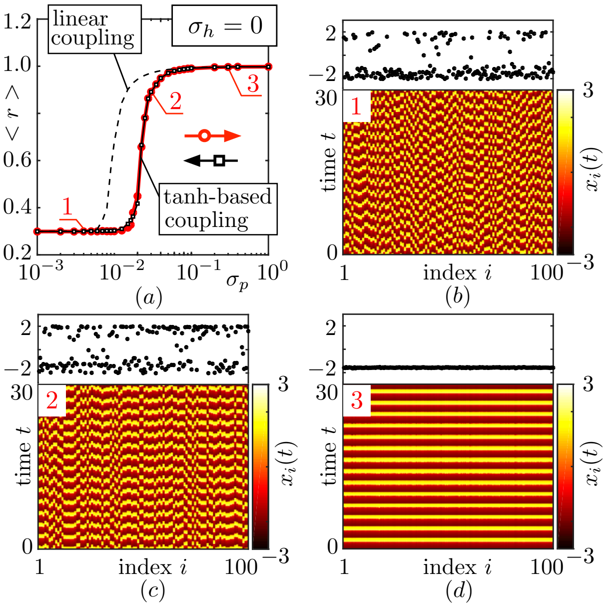

Figure 1. **在没有高阶相互作用的情况下，向同步的过渡是连续的**。(a) 时间平均序参量 $\langle r\rangle$ 随着二体相互作用强度 σ_p 的变化而连续变化。正向曲线（实红线）和反向曲线（实黑线）可以重叠，不会出现滞后环。如果使用的是线性耦合而不是方程 (1) 中的非线性耦合（虚黑线），过渡性质保持不变。注意对 σ_p 采用对数尺度。(b)–(d) 系统的空间时间快照，在面板 (a) 中的 1–3 点处拍摄，说明了随着 σ_p 超过某个临界值时振子如何实现全局同步。在这些面板中，点 1 对应于 $\sigma_p = 0.004$，点 2 对应于 $\sigma_p = 0.02$，点 3 对应于 $\sigma_p = 0.4$。上部的插图显示了系统的最终状态，这些状态被用作模拟中下一阶段的初始条件。

我们考虑方程 (1) 中的系统，在特定情况下于 $b = 0$ 处，使得这些方程类似于 van der Pol 模型的方程。请注意，在这种解释中，ε 是非线性阻尼的逆。此外，我们认为振荡器彼此略有不同，通过设定 a_i 为均值为 0.5、方差为 0.001 的正态分布随机变量。

所定义的模型涉及以双曲正切函数表示的非线性耦合。这一特定选择允许对函数自变量取较大值时出现饱和效应进行建模，这种行为在模拟诸如神经细胞动力学 [19, 20] 等生物过程时通常是有利的。

我们通过数值模拟研究该系统，使用 $N = 100$ 振荡器和 $\varepsilon = -0.01$，从均匀分布的随机初始条件 $x_i \in [-1.5, 1.5]$ 和 $y_i \in [-1, 1]$ 开始。给定耦合强度值的运行的稳态用作下一个运行的初始状态。在每个时间步，我们计算阶参数 $r(t) = \frac{1}{N}\left|\sum_{i=1}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_i}\right|$ 的值，其中 $\theta_i = \arctan(\frac{y_i}{x_i})$ 是第 i 个振子的角度。时间平均阶参数 $\langle r\rangle$ 的范围，在整个系统的稳态下进行平均，介于 0 和 1 之间，0 对应不同步状态，而 1 则对应完全同步的振荡。此外，我们还计算每个振子的平均相位速度 $\omega_i = 2\pi\frac{M_i}{\Delta T}$，其中 M_i 是第 i 个振子在大小为 ΔT 的时间间隔内围绕原点完成的完整旋转次数。

III. 结果

A. 仅有的成对相互作用

我们从仅考虑成对相互作用的系统开始，即具有 $\sigma_h = 0$。在这种情况下，同步和非同步动力学之间的连续转变是交互强度的函数。如图 1（a）所示，时间平均阶参量中没有出现滞后现象，并且前向和后向曲线可以完全重叠。系统的时间快照，如图 1（b）-（d）所示，说明了同步化的转变，所有振荡器在 σ_p 大于临界值时以同相演化。

请注意，耦合的非线性对过渡区域没有深远的影响。实际上，如图 1(a) 所示，由耦合的具体函数形式引起的唯一影响仅仅是曲线 $\langle r\rangle$ 作为 σ_p 的函数发生了位移。

B. 二阶相互作用的影响

当系统中引入三体相互作用时，如图 2(a) 所示，会出现一个滞后环，在同步与非同步状态之间的转变过程中出现。这表明过渡不再是临界的，而是一个一级相变，并且稳定非相干态和同步态共存的可能性是可以预期的。然而我们注意到，正向和反向转换都伴随着部分同步的发生以及孤立态的出现，如图 2(b)–(d) 所示。

这表明，当 σ_p 超过过渡点增加时，系统并不会直接切换到全局同步。相反，会达到一个部分同步的初始状态，在这种状态下，大多数振荡器同相，而其余的则不同步。最终，当 σ_p 进一步增加时，振荡器实现完全同步。行为在定性上不变，但在研究反向过渡时是相反的。值得注意的是，孤立状态是稳定的，并且它们出现在 σ_p 的一系列值范围内，显示了其稳健性。

孤立状态也通过平均相速度中的异常值来表征，如图 2 (e)–(f) 所示。此外，同步振荡器的相轨迹与对应于孤立状态的那些不同。具体来说，前者是极限环，而后者则是稍微不规则的非闭合轨迹。

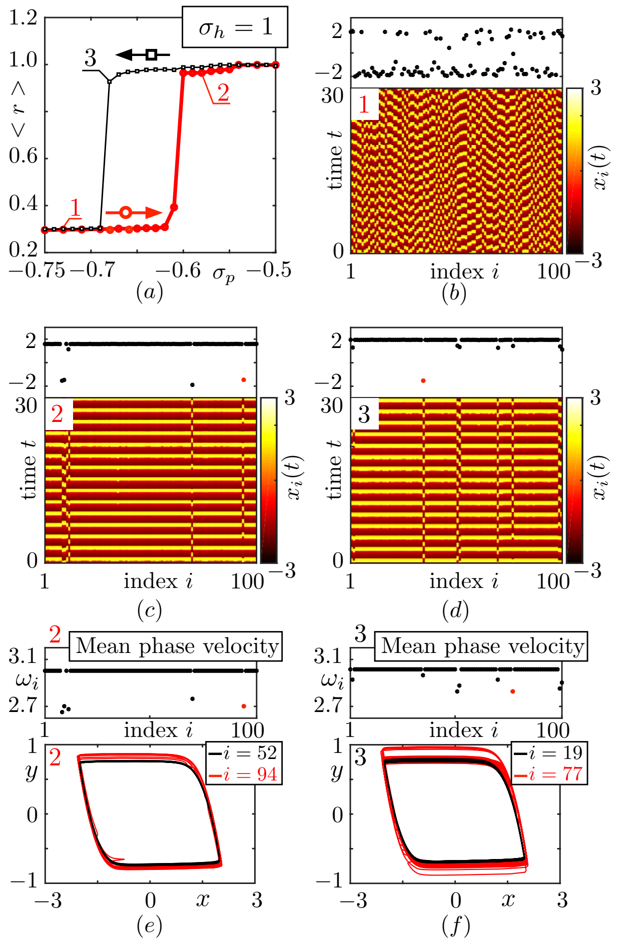

Figure 2. **高阶相互作用使同步转换变得不连续，并诱导孤子状态**。(a) 同步过渡过程中出现滞后回线：系统在 $\sigma_p = -0.6$(红线) 时切换到同步状态，但只有当 σ_p 降低至约 -0.69(黑线) 时才会回到非同步状态，这表明该转变是一级的。(b)–(d) 系统的空间时间快照，在 (a) 图中的 1–3 点处拍摄，显示了在通往同步和脱同步路径上的孤立态的出现。在这些图表中，点 1 对应于 $\sigma_p = -0.73$，点 2 对应于 $\sigma_p = -0.58$，点 3 对应于 $\sigma_p = -0.58$。上方插图展示了系统的最终状态，在模拟中作为下一点的初始条件使用。(e)–(f) 同步振荡器（黑色）的相轨迹是极限环，而那些处于孤立态的振荡器（红色）则是开放轨迹。上方插图显示了每个个体振荡器的平均相位速度。图 (e) 对应于点 2，图 (f) 对应于点 3。

随着高阶相互作用强度的增加，正向和反向过渡表现出行为上的显著变化。一方面，去同步化过渡变得完全突然，并且抑制了任何孤立状态，如图 3所示。另一方面，正向过渡仍然具有孤立状态，但其基本性质发生了改变。特别是参与孤立状态的特定振荡器随时间发生变化。这与在较低的 σ_h 值下发生的情况形成了鲜明对比，在较低值时，构成孤立状态的振荡器保

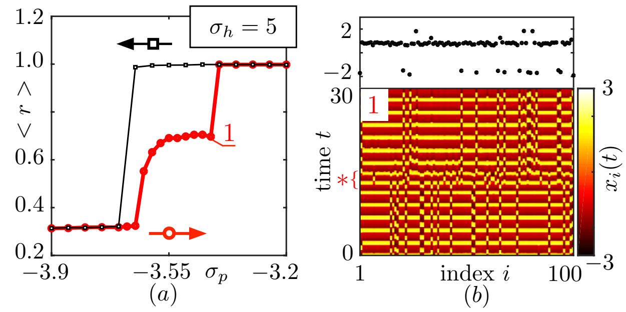

Figure 3. **更强的高阶相互作用在向非同步过渡期间抑制孤子状态** (a) 当 σ_h 增加到约 5 时，在反向转换（黑线）中不再出现孤立状态，而在正向转换（红线）中仍然会出现，其比例大于 σ_h 较低值时的比例。(b) 图 (a) 中的点 1 对应的系统时间演化，即 $\sigma_p = -3.425$，显示了当孤立状态出现时，属于这些状态的具体振荡器可能会随时间变化，但它们的数量保持不变。这种变化的时刻用 $*$ 标记。上部插图展示了系统的最终状态。

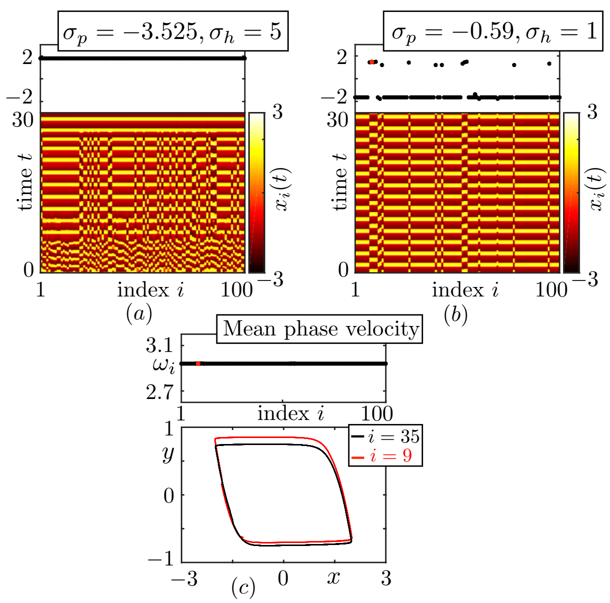

Figure 4. **孤立状态也出现在相同的振荡器中**。(a)-(b) 具有相同振荡器的系统在不同 σ_p 和 σ_h 值下的时空快照显示了稳定孤态的存在，如果相互作用强度足够高，则这些状态会演化为完全同步。上部插图显示了系统的最终状态。(c) 同步状态下（黑色）振荡器的相轨迹与孤态下（红色）的不同，尽管它们的平均相位速度相同（上部插图）。参数值与 (b) 图中相同。

持不变。请注意，这种一些振荡器动力学行为的变化并不会显著影响异步振荡器的比例。因此，随着时间的推移，时间平均阶参量的值不会出现大的波动。

为了确认孤立状态不仅仅是由于非同质振子系统中的不均匀性而产生的伪像，我们研究了当所有振子

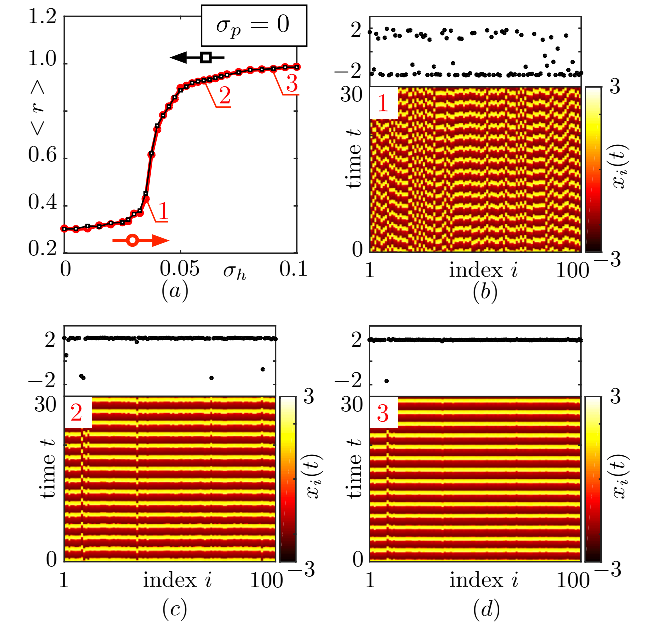

Figure 5. **孤子状态是一种高阶效应**。(a) 在缺乏成对相互作用的情况下，同步转换是连续的，正向曲线（红色）和反向曲线（黑色）可以完全重叠。(b)–(d) 系统的空间时间快照，在图 (a) 中的点 1–3 处拍摄，展示了孤立状态的出现。这些面板中，点 1 对应于 $\sigma_h = 0.0375$，点 2 对应于 $\sigma_h = 0.06$，点 3 对应于 $\sigma_h = 0.09$。上方的小图显示了系统的最终状态，这些状态在模拟中被用作下一个点的初始条件。

都被迫成为相同的情况下的系统，这对应于施加 $a_i = 0.5$。图 4(a) 所示的快照表明，在足够高的 σ_p 和 σ_h 下，孤立状态最终会演变成完全同步。然而，在较低的交互强度下，如图 4(b) 所示，孤立状态在时间上是稳定的。类似于非同质振子的情况，对应于同步状态和那些孤立状态的吸引子相位轨迹，如图 4(c) 所示，彼此不同。然而，它们的平均相位速度相同，与振子不同时的情形不同。这种现象学使我们能够得出结论：孤立状态的发生并不依赖于振子之间动态差异的存在，而是系统中存在高阶交互的结果。

为了更好地理解两种相互作用顺序的作用，我们考虑系统在没有成对相互作用的情况下，这对应于 $\sigma_p = 0$。在这种情况下，图 5(a) 中报告的结果显示同步转换是连续的，没有任何双稳态或滞后循环。然而，孤立状态仍然会发生，如图 5(c)–(d) 的时空快照所示，这强烈表明它们的出现本质上是一种高阶效应，而不是由一阶和二阶相互作用的同时存在引起的。

为了验证所观察到的现象是否可以归因于有限尺寸效应，我们研究了不同系统规模下的同步转换。这

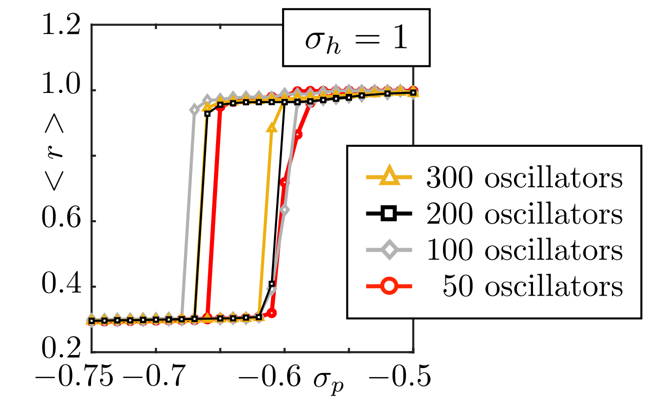

Figure 6. **同步转换的特性不受系统大小的影响**。具有不同数量振荡器的系统仍然经历一次向同步的一阶转变，唯一的变化是转变点有轻微偏移。

尤其重要，因为在具有高阶相互作用的网络中，最近报道表明这种转换在小系统规模下受到强烈的随机波动影响 [21] 。在我们的案例中，系统中的振荡器数量仅导致过渡过程出现轻微的定性变化，但其一级特性，如图 6 所示，以及孤立状态的存在保持不变。

IV. 结论

成对和二阶相互作用在振荡器系统中的交织使得同步状态与非同步状态之间发生突然转变成为可能，伴随着滞后和双稳态现象，其中相干和不相干状态共存。此前，这类效应已在相位振荡器网络中进行了研究，这是用于研究同步的最简单模型之一。在这里，我们展示了这些转变也可以在更复杂的动力学存在的情况下发生，通过使用 FitzHugh-Nagumo 振荡器系统作为案例研究。

此外，我们展示了孤立状态如何在特定情况下以任一过渡方向出现。这些现象发生在由相同和不同元素组成的系统中，并且它们的发生与成对交互的作用强度无关。实际上，即使忽略两体相互作用，它们仍然会出现。相反，在没有高阶相互作用的情况下，孤立状态会被抑制。这表明这种状态是尖峰振荡器中的固有高阶效应，并且它们与系统的同质性或大小无关。请注意，与之前报告的孤立状态 [10] 不同，后者仅在正向过渡中出现，我们这里研究的状态可以在同步过渡和去同步过渡中出现，只要耦合强度低于临界值即可。

因此，我们的研究结果构成了对孤立状态理解的

一个进步，并提供了存在本质上高阶效应的额外证据。将多体相互作用与临界现象和动力学转变联系起来，我们的工作强调了在建模复杂系统时考虑高阶网络的相关性。

致谢

V.S. 感谢俄罗斯科学基金会（项目编号：24-72-00054）的支持。S.B. 感谢意大利外交部和国际合作部的项目编号为 PGR01177 的项目的资助。S.J. 和 S.B. 感谢 VAJRA 基金 VJR/2019/000034 的资助。C.I.D.G. 感谢保加利亚教育部和科学部在项目编号 BG-RRP-2.004-0006-C02 下的资金支持。

[1] F. Battiston, G. Cencetti, I. Iacopini, V. Latora, M. Lucas, A. Patania, J.-G. Young and G. Petri, Phys. Rep. **874**, 1 (2020).

[2] F. Battiston and G. Petri, *Higher-order systems*, Springer (2022).

[3] S. Boccaletti, P. De Lellis, C. I. del Genio, K. Alfaro-Bittner, R. Criado, S. Jalan and M. Romance, Phys. Rep. **1018**, 1 (2023).

[4] C. I. del Genio, arXiv:2412.06935.

[5] Y.-J. Ma, Z.-Q. Jiang, F. Fang, C. I. del Genio and S. Boccaletti, Phys. Rev. E **111**, 044304 (2025).

[6] A. Tlaie, I. Leyva and I. Sendiña-Nadal, Phys. Rev. E **100**, 052305 (2019).

[7] L. Gallo, R. Muolo, L. V. Gambuzza, V. Latora, M. Frasca and T. Carletti, Commun. Phys. **5**, 263 (2022).

[8] F. Parastesh, M. Mehrabbeik, K. Rajagopal, S. Jafari and M. Perc, Chaos **32**, 013125 (2022).

[9] V. V. Semenov, Eur. Phys. J. Spec. Top., `https://doi.org/10.1140/epjs/s11734-025-01567-2` (2025).

[10] P. S. Skardal and A. Arenas, Phys. Rev. Lett. **122**, 248301 (2019).

[11] P. Jaros, S. Brezetsky, R. Levchenko, D. Dudkowski, T. Kapitaniak and Y. Maistrenko, Chaos **28**, 011103 (2018).

[12] S. Majhi, T. Kapitaniak and D. Ghost, Chaos **29**, 013108 (2019).

[13] F. Hellmann, P. Schultz, P. Jaros, R. Levchenko, T. Kapitaniak, J. Kurths and Y. Maistrenko, Nat. Commun. **11**, 582 (2020).

[14] L. B. Schülen, D. A. Janzen, E. S. Medeiros and A. Zakharova, Chaos Soliton. Fract. **145**, 110670 (2021).

[15] S. Kundu and D. Ghost, Phys. Rev. E **105**, L042202 (2022).

[16] P. S. Skardal and A. Arenas, Commun. Phys. **3**, 218 (2020).

[17] A. D. Kachhval and S. Jalan, Phys. Rev. E **105**, L062203 (2022).

[18] S. Boccaletti, J. A. Almendral, S. Guan, I. Leyva, Z. Liu, I. Sendiña-Nadal, Z. Wang and Y. Zou, Phys. Rep. **660**, 1 (2016).

[19] M. Snipas, T. Kraujalis, K. Maciunas, L. Kraujaliene, L. Gudaitis and V. Verselis, Biophys. J. **119**, 1640 (2020).

[20] F. Hejri, M. Veleti and I. Balasingham, IEEE Access **9**, 61114 (2021).

[21] A. Suman and S. Jalan, Chaos **34**, 101101 (2024).