

关于表示的非球面性的一个应用

Maxim Zykin

Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University

119991 Moscow, Russia

maksim.zykin@math.msu.com

Abstract

我给出了奥莉加·库利科娃关于群 $\mathfrak{F}/[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$ 中挠元素的工作中引理 3(a) 的一个直接证明，仅使用了奇斯威尔—柯林斯—海布什曼关于组合球面表示的命题 1.2。特别地，我展示了如果两个表示满足 RC 条件并且是组合球面的，则商群 $\mathfrak{N}/[\mathfrak{F}, \mathfrak{N}]$ 在定义关系上是自由交换的，并且在 $\mathfrak{F}/[\mathfrak{F}, \mathfrak{N}]$ 中居中，从而扩展 $\mathfrak{F}/[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$ 是无挠的。

1 介绍

单定义关系的群表示理论有着悠久而丰富的历史，可以追溯到德恩、马格努斯等人奠基性的工作。这一领域的中心概念之一是非球面表示，它确保了相关的二维 CW-复形是无球面性的，即没有超过一维的同伦。无球面性具有强大的代数和几何后果：它可以用于计算群上同调、控制有限阶元素，并推导出群的结构分解。

在最近的一篇论文 [2] 中，O. V. Kulikova 研究了群

$$\mathfrak{F}/[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}],$$

的挠率，其中 $\mathfrak{F}$ 是一个有限集 A 上的自由群，而 $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ 是两个有限关系族 $R_M, R_N \subset \mathfrak{F}$ 的正规闭包。她的引理 3(a) 断言，如果两个表示

$$\langle A \dot{\vee} R_M \rangle \quad \text{and} \quad \langle A \dot{\vee} R_N \rangle$$

都满足 RC 条件（定义 1）并且是组合球面的（定义 3），那么子群 $\mathfrak{N}/[\mathfrak{F}, \mathfrak{N}]$ 是一个由定义关系式的像生成的自由交换中心子群。因此，扩展

$$1 \rightarrow \mathfrak{N}/[\mathfrak{F}, \mathfrak{N}] \rightarrow \mathfrak{F}/[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}] \rightarrow \mathfrak{G} = \mathfrak{F}/\mathfrak{N} \rightarrow 1$$

是没有挠元素的。

在这篇笔记中，我给出了该引理的一个简洁的纯代数证明，避开了任何使用球面图像或 van Kampen 图的方法。关键输入是 Chiswell–Collins–Huebschmann 的组合非球面表示的关系模分解 [1]。

2 基本定义

令 $\mathfrak{F} = F(A)$ 是有限字母表 A 上的一个非交换自由群。如果 $R \subset \mathfrak{F}$ 是任何（有限的）循环规约字族，则记作

$$\mathfrak{N} = \langle\langle R \rangle\rangle \triangleleft \mathfrak{F}, \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{F}/\mathfrak{N}.$$

Definition 1 (RC 条件). 一个展示满足 $\langle A \dot{\vee} R \rangle$ 的电阻率系数（关系子）条件如果：

1. 每个 $r \in R$ 都是非空的, 并且在 $\mathfrak{F}$ 中是循环简约的;
2. 任意两个不同的关系式在 $\mathfrak{F}$ 中都不是彼此共轭的或彼此逆元共轭的。
3. 没有相关者是 $\mathfrak{F}$ 的适当幂。

Definition 2 (关系模块). 关系模块的 $\langle A \dot{\vee} R \rangle$ 是阿贝尔化

$$\mathfrak{N}/\mathfrak{N}^{\sim} = \mathfrak{N}/[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}],$$

配备了由 $\mathfrak{F}$ 中的共轭诱导的自然左 $\mathbb{Z}\mathfrak{G}$ 模结构。

Definition 3 (组合式非球面性 (CA)). 令 $K(A; R)$ 为该表示的标准二维 CW-复形, 并令

$$C(A; R) = K(A; R) / i$$

为通过识别对应于适当幂关系的 2-胞腔而得到的 Cayley 复形。我们说 $\langle A \dot{\vee} R \rangle$ 是组合式渐近球面 (CA) 如果

$$\pi_2(C(A; R)) = 0.$$

3 主要引理

假设 $R_M, R_N \subset \mathfrak{F}$ 同时满足 RC, 且每个 $\langle A \dot{\vee} R_M \rangle, \langle A \dot{\vee} R_N \rangle$ 是 CA, 具有正规闭包 $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \triangleleft \mathfrak{F}$ 。那么:

Lemma 4 (库利科娃 [2]). 子群

$$\mathfrak{N}/[\mathfrak{F}, \mathfrak{N}] \triangleleft \mathfrak{F}/[\mathfrak{F}, \mathfrak{N}]$$

是一个以 $\wedge^r + [\mathfrak{F}, \mathfrak{N}] \dot{\vee} r \in R^{\sim}$ 为基的自由交换群, 并且在 $\mathfrak{F}/[\mathfrak{F}, \mathfrak{N}]$ 中是中心的。因此, 扩展

$$1 \longrightarrow \mathfrak{N}/[\mathfrak{F}, \mathfrak{N}] \longrightarrow \mathfrak{F}/[\mathfrak{F}, \mathfrak{N}] \longrightarrow \mathfrak{G} \longrightarrow 1$$

是没有挠元素的。

4 主引理的证明

Proposition 5 (Chiswell–Collins–Huebschmann [1, Prop. 1.2]). 设 $\langle A \dot{\vee} R \rangle$ 是简洁的, RC 和 CA。则

$$\mathfrak{N}/\mathfrak{N}^{\sim} \cong \bigoplus_{r \in R} \mathbb{Z}[\mathfrak{G}/\langle r \rangle]$$

作为 $\mathbb{Z}\mathfrak{G}$ 模。

Definition 6 (扩增和协变量). 增广映射 $\epsilon: \mathbb{Z}\mathfrak{G} \rightarrow \mathbb{Z}$ 发送 $\sum a_g g \mapsto \sum a_g$, 其核为 $I_{\mathfrak{G}} = \ker \epsilon$ 。对于一个 $\mathbb{Z}\mathfrak{G}$ -模 M , 这些 *coinvariants* 是

$$M_{\mathfrak{G}} = M/I_{\mathfrak{G}}M \cong M \otimes_{\mathbb{Z}\mathfrak{G}} \mathbb{Z}.$$

这个商将 $g \cdot m$ 与 m 识别, 并消除了 G -作用。

Claim 7 (Triviality of the Module Action). 作用 $g \cdot (n + [\mathfrak{F}, \mathfrak{N}]) = (gng^{-1}) + [\mathfrak{F}, \mathfrak{N}]$ 的 $g \in \mathfrak{G}$ 在 $n + [\mathfrak{F}, \mathfrak{N}] \in \mathfrak{N}/[\mathfrak{F}, \mathfrak{N}]$ 上是平凡的。

Proof. 根据定义 $[g, n] = g^{*1}n^{*1}gn \in [\mathfrak{F}, \mathfrak{N}]$, 且正态性给出 $f[g, n]f^{*1} = gng^{*1}n^{*1} \in [\mathfrak{F}, \mathfrak{N}]$ 。因此在商中 $gng^{*1} + [\mathfrak{F}, \mathfrak{N}] = n + [\mathfrak{F}, \mathfrak{N}]$ 。 $\square$

Claim 8 (Centrality). $\mathfrak{N}/[\mathfrak{F}, \mathfrak{N}]$ 包含在 $\mathfrak{F}/[\mathfrak{F}, \mathfrak{N}]$ 的中心。

Proof. 对于任意的 $n + [\mathfrak{F}, \mathfrak{N}]$ 和 $f + [\mathfrak{F}, \mathfrak{N}]$,

$$(f + [\mathfrak{F}, \mathfrak{N}]) (n + [\mathfrak{F}, \mathfrak{N}]) (f + [\mathfrak{F}, \mathfrak{N}])^{*1} = f \cdot (n + [\mathfrak{F}, \mathfrak{N}]) = n + [\mathfrak{F}, \mathfrak{N}].$$

因此它们可交换。 $\square$

引理的证明. 从命题 1.2,

$$\mathfrak{N}/\mathfrak{N} \cong \bigoplus_{r \in R} \mathbb{Z}[\mathfrak{G}/\langle r \rangle].$$

过渡到余不变量:

$$\mathfrak{N}/[\mathfrak{F}, \mathfrak{N}] = (\mathfrak{N}/\mathfrak{N})_{\mathfrak{G}} = (\mathfrak{N}/\mathfrak{N})/I_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N}/\mathfrak{N}) \cong \bigoplus_{r \in R} (\mathbb{Z}[\mathfrak{G}/\langle r \rangle] \otimes_{\mathbb{Z}\mathfrak{G}} \mathbb{Z}).$$

每个项为何是 $\mathbb{Z}$:

- $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}/\langle r \rangle]$ 是陪集集 $\mathfrak{G}/\langle r \rangle$ 上的自由阿贝尔模, $h \in G$ 通过置换陪集作用:

$$h \cdot (g\langle r \rangle) = (hg)\langle r \rangle.$$

- 张量与 $\mathbb{Z}$ (平凡模) 的乘积对所有 h 施加 $h \cdot x = x$, 因此将每个陪集基元与其他每一个等同。
- 因此,

$$\mathbb{Z}[\mathfrak{G}/\langle r \rangle] \otimes_{\mathbb{Z}\mathfrak{G}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z},$$

由任何陪集的公共类生成。

对 r 求和得到

$$\mathfrak{N}/[\mathfrak{F}, \mathfrak{N}] \cong \bigoplus_{r \in R} \mathbb{Z},$$

由 $\mathfrak{F} + [\mathfrak{F}, \mathfrak{N}]$ 自由生成。中心性由声明 2 得出。 $\square$

备注. 由于 $\mathfrak{N}/[\mathfrak{F}, \mathfrak{N}]$ 是中心且无挠的, 而 $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ 是无挠的, 因此 $\mathfrak{F}/[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$ 中的任何挠必须位于 $\mathfrak{N}/[\mathfrak{F}, \mathfrak{N}]$ 中, 从而是平凡的。因此 $\mathfrak{F}/[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$ 是无挠的。

应用

正如 [2] 中所示, 本引理表明由 CA 表述构建的 HNN-扩张和自由并集保持为 CA 并且无挠。

致谢

我要感谢米哈伊尔·米赫耶诺夫对我有用的评审以及他对群论深刻的了解。我也非常感激安东 A. 克利亚奇科在我将近两年的时间内担任我的导师。

References

- [1] I. M. Chiswell, D. J. Collins, and J. Huebschmann, *Aspherical group presentations*, Math. Zeitschrift **178** (1981), 1–36.
- [2] O. V. Kulikova, *On the torsion in a group $F/[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$ under combinatorial asphericity of $F/\mathfrak{M}$ and $F/\mathfrak{N}$* , arXiv:2402.10531 (2024).
- [3] R. C. Lyndon and P. E. Schupp, *Combinatorial Group Theory*, Springer–Verlag, 1977.